

《講座》

システム同定—入門から最近の話題まで—〔2〕

足立 修一*・佐野 昭**

ABSTRACT In this chapter, practical issues on system identification are presented. They include sampling period selection, identification inputs selection, signal processing for identification, for example filtering and decimation, and so on. Moreover, the determination of identification model order is discussed.

3. 同定のための信号処理

われわれが同定対象とするシステムは、一般に連続時間で動作している。第2章では、すでに離散化されているシステムの同定法について詳しく解説したが、連続時間システムのパラメータを直接同定することが要請される場合もある。そこで本章では、まず3.1節において連続時間システム同定のさまざまなアプローチを紹介する。3.2節では、離散時間モデルを用いてシステム同定を行う場合、最も重要な設定パラメータの1つであるサンプリング周期の選定法について述べる。3.3節では、これも同定精度に大きく影響する同定入力の与え方を示し、3.4節では入出力信号を同定アルゴリズムにおいて処理しやすくするための信号処理法をまとめる。さらに、3.5節では同定モデルの次数決定法を示す。

3.1 連続時間システムの同定

連続時間システムを同定する代表的な3つの方法を以下に挙げる¹⁴⁾。

- (1) 離散時間モデルを用いた同定法
- (2) ノンパラメトリックモデルを用いた同定法
- (3) 直接法

(1)の方法を図3.1に示した。この中で離散時間モデルのためのパラメータ推定アルゴリズムは、本講座を通して詳しく解説するが、問題となるのはサンプリング周期 T の決定であり、この点に関して次節で詳しく述べる。つぎに、離散時間から連続時間の変換は、

さまざまな方法が提案されているが、その中で双一次変換

$$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \quad (3.1)$$

は、計算が容易で安定性が保存されるためしばしば用いられる。また、文献15)の変換法も有効である。

つぎに、(2)の方法の流れを図3.2に示した。この方法では、第一段階で同定対象のノンパラメトリックモデル（インパルス応答、ステップ応答、周波数応答など）を同定し、つぎに第二段階で同定されたノンパラメトリックモデルを連続時間モデルにフィッティングする。ここで、ノンパラメトリック同定法は、確定的、確率的に分類でき、前者はステップ応答、インパルス応答に、後者はランダム信号を用いた相関法に対応する。また、時間領域、周波数領域という分類をとることもでき、これらはフーリエ変換対の関係である（それぞれの関係は図1.3を参照）。いずれかのノンパラメトリックモデルが求めれば、さまざまなフィッテ

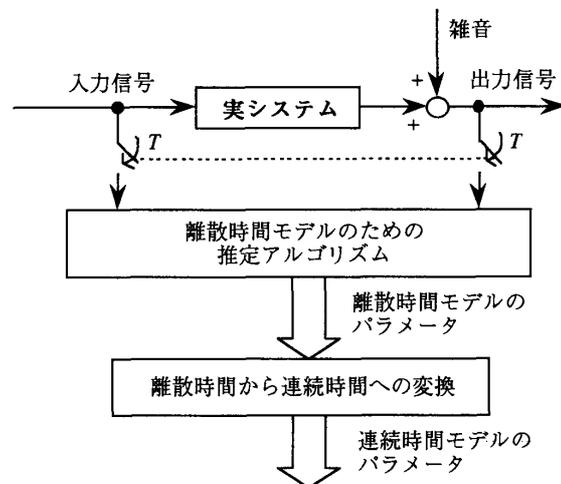


図3.1 離散時間モデルを用いた連続時間システムの同定

System Identification—From fundamentals to recent topics—〔2〕. By Shuichi Adachi (Dept. of Electrical and Electronic Engineering, Utsunomiya Univ.) and Akira Sano (Dept. of Electrical Engineering, Keio Univ.).

*宇都宮大学工学部

**慶応義塾大学理工学部

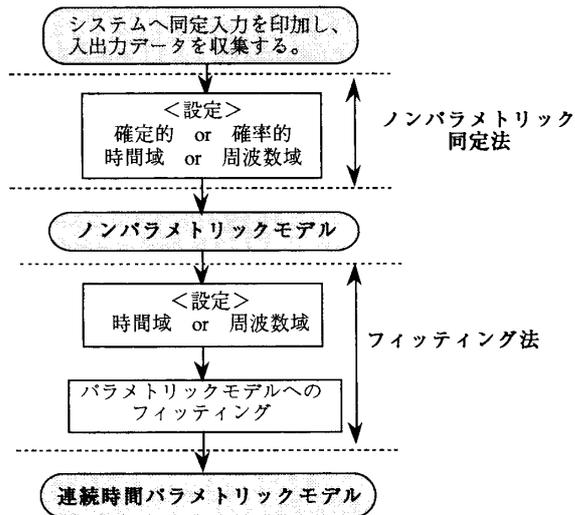


図3.2 ノンパラメトリックモデルを用いた連続時間システムの同定法

ィング法で連続時間伝達関数を計算することができる。たとえば、時間領域ではステップ応答の諸特性（立ち上がり時間、定常値のあるパーセンテージに達する時間など）より、ある連続時間標準形（たとえば二次系）を求める方法がある。また、推定（あるいは測定）された周波数応答データをパラメトリックモデルにフィッティングする方法は、カーブフィッティング法と呼ばれ、機械システムなどではしばしば用いられる¹⁶⁾。これは、2.4節で述べた周波数重み付きの最小2乗問題ととらえることもできる¹⁷⁾。

最後に、(3)の直接法を図3.3に示した。図中のLDは、線形オペレータを表し、代表的なものとしては、状態変数フィルタなどの線形フィルタによるもの、変調関数を用いたもの、直交基底関数による信号のスペクトル表現によるものなどがあるが詳細は省略する。特に、状態変数フィルタによる方法は、信号を直接微分することなく推定が行えるため、適応制御系などで広く用いられている。図3.3において、評価規範を構成するために必要な誤差として、第2章で述べたように出力誤差、式誤差が考えられ、出力誤差に基づく定式化はモデル規範型適応制御（MRAS）と密接に関係している。したがって、適応制御の分野で開発されたさまざまな適用手法、たとえば、勾配法による方法、リアプノフの方法、ポポフの超安定理論に基づく方法、などを適用することが可能である。つぎに、式誤差に基づく方法は、2.2.2節で述べたように未知パラメータに関して線形になるため、計算が容易である。おおまかにいえば、線形オペレータLDを用いて

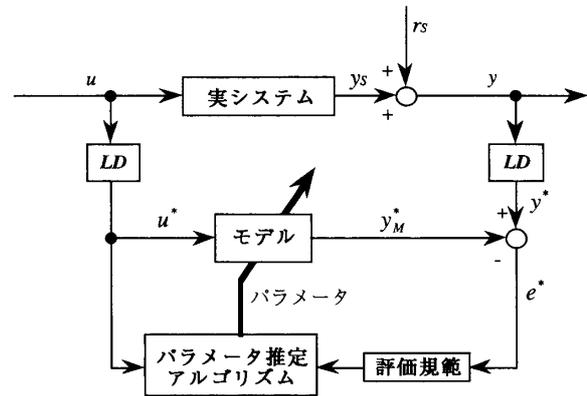


図3.3 連続時間システムのパラメータ推定法（直接法）

いる点のみが離散時間モデルの同定と異なる点であり、基本的には最小2乗法（あるいはその拡張）によってパラメータ推定が行える^{18),19)}。

3.2 サンプル周期の決定法

実システムの同定を離散時間モデルを用いて行う場合、最も頭を悩ます問題の1つにサンプリング周期(T)の選定がある。サンプリング周期は、システム同定アルゴリズム、使用する計算機の精度、実装化の環境、そしてもちろん同定対象のダイナミクスなど、さまざまな要因に依存するからである。また、システム同定が制御系設計のために行われているのならば、制御系の立場からの要請も考慮して選定されなくてはならない。しかしながら、一般的なシステムマティクなサンプリング周期の決定法は存在せず、試行錯誤に頼っているのが現状であろう。そこで本節では、これまでに提案されたいくつかの選定法を紹介する²⁰⁾。

まず、サンプリング周期の上界は、つぎに与えるサンプリング定理により規定される。

[定理3.1] サンプリング定理

あるシステムを同定するとき、着目する周波数帯域、あるいは制御系設計において考慮しなくてはならない周波数帯域の最大周波数を f_s とすると、その周波数範囲を忠実に再現するためには、サンプリング周期Tを

$$T \leq \frac{1}{2f_s} \quad (3.2)$$

に選定しなくてはならない。□

一方、サンプリング周期の下界は、上界のように明確に規定できない。まず、簡単な例題を通して、サンプリング周期が短ければ短いほど同定の精度が向上するとは限らないことを示そう。

[例題3.1] 伝達関数

$$G(s) = \frac{a}{s+a}, \quad (a>0) \quad (3.3)$$

で記述される連続時間1次システムを考える。(3.3)式を z 変換すると、つぎのパルス伝達関数が得られる。

$$G(z) = \frac{z}{z-z_1} \quad (3.4)$$

ただし、 $z_1 = \exp(-aT)$ 。このように、 s 平面の左半平面に存在する連続時間システムの極 $s=-a$ は、 z 平面の単位円内の極 z_1 に変換されることがわかる。いま、極端に短いサンプリング周期 T を用いて離散化を行うと、連続時間システムの極が s 平面の虚軸上から離れた安定な領域に存在していても、 z 平面上では単位円の $z=1$ の近くに極が存在することになる。この傾向は一般的な n 次系でも成立する。したがって、連続時間システムが非常に安定であっても、短いサンプリング周期で離散化を行うと、 z 平面上では安定限界である単位円上の $z=1$ に極が集中する。 $z=1$ の近傍に離散時間システムの極が存在すると、対応する同定問題は数値的に悪条件になることが知られており、精度よい同定が困難になる²¹⁾。

このように、サンプリング周期を極端に短く選定することは望ましくない。よって、何らかの最適なサンプリング周期が存在することが予想でき、これまでに提案された代表的な方法を以下に示す。

(a) ステップ応答からの決定法

- (a1) T_{95} を同定対象のステップ応答が定常値の95%に達する時間としたとき、

$$\frac{1}{15} T_{95} \leq T \leq \frac{1}{4} T_{95} \quad (3.5)$$

より T を決定する²²⁾。

- (a2) T_r を立ち上がり時間(定常値の63%に達する時間)としたとき、次式より T を決定する。

$$\frac{T_r}{10} \leq T \leq \frac{T_r}{6} \quad (3.6)$$

(b) 連続時間システムの極を用いた決定法

同定対象である連続時間システムの極のうち、大きさが最大のものを s_{\max} とすると、

$$T \leq \frac{1}{2s_{\max}} \quad (3.7)$$

より T を決定する²³⁾。□

実際には、ステップ応答試験が行えなかったり、 s_{\max} は事前には未知であるので、これらの条件を直接利用することはできないが、おおまかな時定数の値な

どから推定することは可能である。

このほかにも、最小2乗法を用いて、十分な精度の同定が行える周波数帯域は、 $1/100T$ から $1/5T$ の間の約1(decade)であるという報告もある²⁴⁾。したがって、この関係式を用いて、同定のために着目する周波数帯域からサンプリング周期を逆算することも可能である。

以上、さまざまなサンプリング周期の決定法を示したが、本講座では、“ハードウェアの制限まで、可能な限り短いサンプリング周期を用いる”ことを勧める。なぜならば、後述するデジメーションと呼ばれる信号処理の利用²⁵⁾、あるいはデルタオペレータの利用²⁶⁾などによって、短いサンプリング周期に起因する問題点の多くは回避することができるからである。

3.3 同定入力の与え方

3.3.1 PE性

システム同定を行うためには、適切な入力信号を用いて同定対象を励起しなくてはならない。このとき、同定対象、同定目的、環境などによって利用できる入力のクラスは制限される。そこで本節では、同定入力とシステム同定の関係について考察する。

さて、1次系を同定するとき、一定値信号を入力しても同定は行えないが、単一の周波数をもつ正弦波を利用すれば同定できることが知られている。この概念は、(2.34)式で示した信号のPE性に基いている。そこで、PE性の次数を判定するために有用な定理をつぎに与える。

[定理3.2] $u(k)$ を定常信号とし、その自己相関関数

$$\phi_{uu}(l) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u(k)u(k-l), \quad l=0, 1, \dots, n-1$$

から構成される自己相関行列をつぎのようにおく。

$$R_n = \begin{bmatrix} \phi_{uu}(0) & \phi_{uu}(1) & \cdots & \phi_{uu}(n-1) \\ \phi_{uu}(1) & \phi_{uu}(0) & \cdots & \phi_{uu}(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{uu}(n-1) & \phi_{uu}(n-2) & \cdots & \phi_{uu}(0) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

このとき、行列 R_n が正則のときに限り、 $u(k)$ は次数 n のPE性信号になる¹²⁾。□

定理3.2を用いると、一定値信号($u(k)=\bar{u}$)は1次のPE性信号であり、単一の周波数をもつ正弦波信号($u(k)=\sin \omega k$)は、2次のPE性信号であることがわかる。さらに、理想的な白色雑音は任意の次数に対するPE性信号となり、前述したようにシステム同定のための理想的な入力となる。なぜならば、白色雑音はすべての周波数成分を含んでいるからである。PE

性の次数と同定対象の次数との関係を示したものがつぎの定理である。

[定理3.3] パルス伝達関数

$$G(q) = \frac{B(q)}{A(q)} = \frac{b_1 q^{-1} + \dots + b_n q^{-n}}{1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_n q^{-n}} \quad (3.9)$$

で記述される離散時間システムを同定する場合、入力信号が $2n$ 次の PE 性信号であれば、この同定対象は可同定である。□

定理3.3は、 n 次系を同定するためには、入力信号のパワースペクトル $\Phi_u(\omega)$ が、 $2n$ 個の周波数点で非零の値をとらなければならないことを意味している。たとえば、このような入力信号の一例は、 n 個の異なる周波数の正弦波の線形和で表される信号

$$u(k) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sin \omega_i k, \quad \omega_i \neq \omega_j, i \neq j, \omega_i \neq 0.$$

である。したがって、 n 次系を同定するためには、 n 個の正弦波を用いれば十分である。

さて、白色雑音は高次の PE 性信号になるため、システム同定にとって都合がよいが、理想的な白色雑音を実現することは物理的に不可能であるため、人為的に不規則信号を生成することになる。このようにして生成されたものを擬似不規則信号といい、そのなかで M 系列信号³⁾がよく知られている。

以上で説明したように、システム同定を行う場合、白色性の同定入力を利用することが望ましいが、現実には対象の物理的制約や、対象への影響をできるだけ少なくしたいなどの理由から白色性信号が印加できないことがほとんどである。特にプロセス制御などの現場では、対象に擾乱を与えることは極度に嫌われ、M 系列信号のように時間的に変化の激しい信号を用いることができず、できるだけ時間変動の滑らかな入力を用いて同定を行うことが要請される。次節でこの問題について考えよう。

3.3.2 帯域制限された同定入力信号

本節では、滑らかに変動する入力、すなわち周波数域で考えると帯域制限された信号を用いて同定を行うと、同定精度がどの程度劣化するかについて検討する。ここでは、簡単のために FIR モデル

$$y(k) = B(q)u(k) + w(k) \quad (3.10)$$

に含まれる未知パラメータより構成されるベクトル $\theta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ を最小 2 乗法により同定する問題を通して検討する。パラメータ同定誤差を

$$\hat{\theta}_N \equiv \theta - \hat{\theta}_N \quad (3.11)$$

と定義すると、パラメータ推定値の平均 2 乗誤差（以下では MSE と略記する）は、次式で評価できる²⁷⁾。

$$E\|\hat{\theta}_N\| = \frac{\sigma_w^2}{N} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i(N)} \quad (3.12)$$

ただし、 $\lambda_i(N)$, $i=1, 2, \dots, n$ は(3.8)式と同様に定義される自己相関行列 R_N の i 番目の固有値である。

(3.12)式より、MSE はデータ数 N が無限大に向かうとき 0 に収束するが、有限個のデータの場合、雑音の分散 (σ_w^2)、データ数 (N)、そして入力相関行列 (R_N) の固有値 ($\lambda_i(N)$) に依存している。たとえば、白色性の入力の場合には $R_N = \sigma_u^2 I$ (ただし、 σ_u^2 は入力の分散) となるので、(3.12)式は

$$E\|\hat{\theta}_N\|^2 = \frac{n}{N} \sigma_u^2 \sigma_w^2 \quad (3.13)$$

のように簡潔に表現できる。

一方、帯域制限された滑らかな入力信号の場合、MSE は(3.13)式のように簡単に記述できない。しかしながら、滑らかな信号では小さな値の固有値を含むため、入力相関行列の固有値の広がりが大きくなり、(3.12)より MSE の値は増大してしまう。このような問題点に対処できる同定法の 1 つである正則化法を次節で紹介する。

さて、パルス伝達関数の周波数域における同定誤差は、次式で評価できる²⁸⁾。

$$|\hat{G}(e^{j\omega}) - G(e^{j\omega})| \leq n \|R_n^{-1}\|_2 C_w C_u \quad (3.14)$$

ただし、 $|w(k)| \leq C_w$, $|u(k)| \leq C_u$ であり、 $\|R_n^{-1}\|_2$ は行列 R_n^{-1} のユークリッドノルムである。また、 $G(e^{j\omega})$ は真のシステムの周波数伝達関数である。(3.14)式より、帯域制限された入力信号を用いると、周波数域においても同定モデルの誤差が増大することがわかる。

(3.13), (3.14)の評価式は、真のシステムの構造(すなわち次数)と推定モデルの構造が同一であるという仮定をしていることに注意する。モデルの次数が真のシステムの次数より小さい場合に関しては、第4章のロバスト制御のための同定法で詳しく解説する。

3.3.3 正則化法

正則化とは、適切な制約条件を用いて不良設定問題 (ill-posed problem) を良設定問題 (well-posed problem) に変換する手法であり、通常、悪条件である係数行列 R に ρI のような非負定数 ρ を対角要素に付加することにより、正則性を回復し、安定化を図る方法である。ここでは ρ のことを正則化定数と呼ぶが、統計学ではこれをリッジ定数と呼び、リッジトレース法、クロスバリデーション法など数多くの手法が提案されている。また、最近では画像工学の分野でも標準正則化として用いられている。以下では、正則化法を用いた FIR モデルのシステム同定法を紹介する。

まず, (2.29)式で与えた最小2乗法のための評価規範の代りに,

$$I_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y(k) - \varphi^T(k)\theta)^2 + (\theta - \theta_0)^T Q_N (\theta - \theta_0) \quad (3.15)$$

を考える. ここで, θ_0 は θ の先験値 (prior) であり, Q_N は正則化行列である. 第2章で述べた通常の最小2乗法は $Q_N \equiv 0$ に, リッジ推定は $Q_N = \rho I$, $\theta_0 = 0$ に相当する. このように, 正則化法は(3.15)式の右辺第2項で与えられる制約条件付きの最小2乗法とみなすことができる. ここで, 制約項の導入には自由度があり, 正則化行列は目的に応じてさまざまなものが考えられるが, ここでは議論を簡単にするためにすべてのパラメータに対して同一の重みを付加するリッジ推定の場合を取り扱う. 一般的な議論は, 文献2)を参照していただきたい.

この場合, (3.15)式は次式のように変形できる.

$$I_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y(k) - \varphi^T(k)\theta)^2 + \rho_N \|\theta\|^2. \quad (3.16)$$

(3.16)式を最小にする推定値は,

$$\hat{\theta}_N = F_N^{-1} g_N \quad (3.17)$$

で与えられる. ただし,

$$F_N = R_N + \rho_N I = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k)\varphi^T(k) + \rho_N I, \quad (3.18a)$$

$$g_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k)\varphi^T(k). \quad (3.18b)$$

(3.18a)より明らかなように, 正則化法とは逆行列をとる行列 (ここでは R_N) の対角要素に小さな正数 ρ_N を加えて, 正則性を回復させる手法である. このとき問題となるのは, 正則化定数 ρ_N の選定法である.

正則化定数と MSE の関係をつぎの定理で与える.

[定理3.4]²⁷⁾ パラメータ推定値の MSE は,

$$E\|\hat{\theta}_N\|^2 = \text{MSE}_b(N) + \text{MSE}_n(N) \quad (3.19)$$

で与えられる. ただし, $\text{MSE}_b(N)$, $\text{MSE}_n(N)$ はそれぞれバイアスによる誤差, 雑音による誤差であり, つぎのように与えられる.

$$\text{MSE}_b(N) = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\rho_N}{\rho_N + \lambda_i} \right\}^2 (v_i^T \theta)^2, \quad (3.20a)$$

$$\text{MSE}_n(N) = \frac{\sigma_w^2}{N} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{(\rho_N + \lambda_i)^2}. \quad (3.20b)$$

ここで, $\{v_i, i=1, \dots, n\}$ は入力相関行列 R の固有値 $\{\lambda_i, i=1, \dots, n\}$ に対応する固有ベクトルである. \square

(3.19)式において, バイアス誤差 $\text{MSE}_b(N)$ は ρ_N に関して単調増加であり, 雑音誤差 $\text{MSE}_n(N)$ は ρ_N に関して単調減少であるため, (3.19)式を最小にする

最適な ρ_N が存在することがわかる. しかし, (3.20a)式はパラメータの真値を含み, (3.20b)式は雑音の分散を含むため, (3.19)式を利用して正則化定数の最適値を決定することはできない. 観測データのみから最適な正則化定数を決定する方法が数多く提案されているが²⁸⁾, ここでは紙面の都合上割愛する.

3.4 入出力データのための信号処理

適切なサンプリング周期で収集された同定対象の入出力データを, システム同定アルゴリズムで利用するためには, それらの信号を処理あるいは調整する必要がある²⁹⁾. 本節ではフィルタリングを用いた周波数帯域ごとの信号処理, デシメーション, そして入出力信号のスケールングについて解説する.

3.4.1 低周波外乱の除去

オフセット, ドリフト, トレンドなどのように低周波域に存在する外乱は, システム同定にとって望ましくないもので, それらの影響を入出力データから除去する必要がある. ここでオフセットとは, 平均値が一定である信号を意味し, ドリフトあるいはトレンドとは平衡点が時変である信号のことである.

さて, オフセットを除去する方法として,

- (a) 物理的平衡点からの偏差を利用する方法,
- (b) サンプル平均値をデータから減ずる方法,
- (c) オフセットをオンラインで推定する方法,
- (d) データを差分する方法

など, さまざまな方法が提案されているが, ここではサンプリングされた生の入出力データを $\{u^m(k), y^m(k)\}$ とし, このデータに(a)の方法を適用して $\{u(k), y(k)\}$ を生成する方法について述べる.

(a)の方法は, 一定値入力 $u^m(k) = \bar{u}$ に対応する定常出力 \bar{y} のレベルを望ましい動作点の近傍に選ぶ方法である. すなわち, この方法では入出力信号を新たに

$$y(k) = y^m(k) - \bar{y}, u(k) = u^m(k) - \bar{u} \quad (3.21)$$

のように平衡点からの偏差とする. そして, それらをたとえば ARX モデル

$$A(q)y(k) = B(q)u(k) + w(k) \quad (3.22)$$

にフィッティングすればよい.

このモデルの妥当性を以下で明らかにしよう. まず, (3.22)式に(3.21)式を代入すると,

$$\begin{aligned} A(q)\{y^m(k) - \bar{y}\} &= B(q)\{u^m(k) - \bar{u}\} + w(k) \\ A(q)y^m(k) &= B(q)u^m(k) + w(k) + \{A(1)\bar{y} - B(1)\bar{u}\} \end{aligned} \quad (3.23)$$

が得られる. ここで, 一定値入力 \bar{u} とそれに対応する定常出力 \bar{y} の間には, $A(1)\bar{y} = B(1)\bar{u}$ が成り立つので, 結局(3.23)式は

$$A(q)y^m(k) = B(q)u^m(k) + w(k) \quad (3.24)$$

となり、 $\{u^m(k), y^m(k)\}$ の代わりに $\{u(k), y(k)\}$ を用いてシステム同定を行えばよいことが導かれた。この方法は、平衡点近傍に線形化モデルとしての(3.22)式のARXモデルの物理的な解釈ができる³⁾。

さて、観測したデータ長よりも長い周期をもった低周波数成分であるトレンドに対しては、Box and Jenkinsらの研究で有名なARIMAモデル³⁰⁾

$$A(q)(1-q^{-1})^d y(k) = B(q)w(k) \quad (3.25)$$

が有効である。ARIMAモデルでは、単位円上に d 個の根を配置することにより、非定常性を記述している。

3.4.2 デシメーション

実際にシステム同定を行う場合、同定実験の立場からサンプリング周期を決定できない場合がしばしばある。たとえば、着目したい周波数帯域と比べて非常に短いサンプリング周期で行われた実験データからシステム同定を行わなければならないこともある。このようなとき、実験データをもう一度異なるサンプリング周期でリサンプルする必要がある。このとき有用な信号処理にデシメーションがある^{13),31)}。

デシメーションとは、ある周期でサンプリングされた離散時間信号をそれよりも荒いサンプリング周期をもつ信号に変換する信号処理であり、デジタル信号処理の分野では、インターポレーションとならんでマルチレート信号処理の基本的なツールとして知られている。

まず、ローパスフィルタを用いたデシメーションの概念について、図3.4を用いて説明する。図において $y(n)$ は周期 T でサンプリングされた信号である。この信号を理想的なローパスフィルタ $h(n)$ に通し、信号 $\xi(n)$ を得る。すなわち、

$$\xi(n) = h(n) * y(n) \quad (3.26)$$

ただし、 $*$ はコンボリューションを表す。ここで、ローパスフィルタの通過域を $|\omega| \leq \pi/d$ とする。そして、 $\xi(n)$ を新しい周期 $T' = dT$ （ただし、 d は自然数）でダウンサンプリングした信号を $x(n) = \xi'(n)$ とする。つまり、信号 $\xi(n)$ を d おきに間引いてサンプリングしたこととなり、これがデシメーションの名の由来となる。

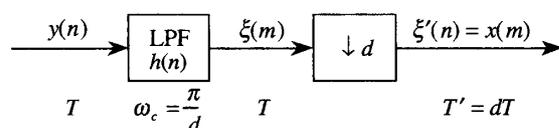


図3.4 デシメーションのブロック線図

結局、デシメーションとは入出力信号のサンプリング周期を増加させ、

$$\xi'(n) = \begin{cases} \xi(n), & n=0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \quad (3.27)$$

とすることであり、 $\xi'(n)$ はつぎのように書ける。

$$\xi'(n) = \xi(n) \left[\frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} e^{j2\pi kn/d} \right]. \quad (3.28)$$

一方、図3.4の入出力関係より

$$x(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(dm-n)y(n) \quad (3.29)$$

であり、 $x(m) = \xi'(dm) = \xi(dm)$ が成立している。

以上の準備のもとで簡単な式変形を行うと、

$$X(z) = \frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} \Xi(e^{-j2\pi kn/d} e^{1/d}) \quad (3.30)$$

が得られる。ただし、 $X(z)$ 、 $\Xi(z)$ はそれぞれ $x(n)$ 、 $\xi(n)$ の z 変換である。(3.26)式より $\Xi(z) = H(z)Y(z)$ であるので、 $z = e^{j\omega'}$ （ただし、 $\omega' = 2\pi fT'$ ）で評価すると、

$$X(e^{j\omega'}) = \frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} H(e^{j(\omega' - 2\pi k)/d}) Y(e^{j(\omega' - 2\pi k)/d}) \quad (3.31)$$

となる。 $H(e^{j\omega'})$ はローパス特性なのでエイリアシングが除去され、(3.31)式の第1項のみが取り出され、

$$X(e^{j\omega'}) \cong \frac{1}{d} Y(e^{j\omega'/d}) \quad (3.32)$$

が得られる。

短いサンプリング周期による問題点は、デシメーションを利用することにより解決できる。したがって、3.2節で述べたように、入出力データの収集に関してはできる限り短いサンプリング周期を利用し、もし問題があれば、そのデータにデシメーションを適用して条件のよいデータに変換すればよい。

3.4.3 入出力信号のスケージング

入力と出力信号の測定値の比は、ほぼ1になることが望ましいが、一般にはつぎのような理由で不適切な比をとってしまうことが多い。

- 入出力変数は、つねに異なる物理量の単位、あるいは定格値に対する比で表現されている。
- 実システムにおいて、信号は、センサ、アンプ、AD変換器からなる直列回路の出力として得られるため、それぞれの要素のゲインが不適切であると入出力信号のレンジが劣化する。

第2章で述べたように最小2乗法は連立一次方程式

$$R\hat{\theta} = r \quad (3.33)$$

を解くことに帰着される。ただし、 R 、 r の定義は

(2.36), (2.37)式による. ARX モデルに対応する行列 R は, つぎのように分解できる.

$$R = \begin{bmatrix} R_{yy} & R_{yu} \\ R_{uy} & R_{uu} \end{bmatrix}.$$

たとえば, 出力が入力と比べて非常に小さな値をとる場合, サブ行列 R_{yy} と R_{uu} の要素の大きさが異なってくるため, 行列 R は数値的に悪条件になってしまう. このような問題点を手軽に解決できる方法にスケールリング法がある. この方法は, 入出力信号のレベルがほぼ等しくなるように出力信号を定数倍し, そのデータを同定アルゴリズムで利用し, 最後に出力に対応する推定値を定数倍した数で割るという方法である. これは, 非常に簡単な方法であるが, 実データをスケールリングすることにより, 推定精度はかなり向上する.

3.5 モデル次数の決定

システム同定を行う場合には, 数学モデルの構造を決定する必要がある, この手順を構造同定という. 線形システムを, (2.11)式で与えた ARX モデルのようなパルス伝達関数を用いて同定する場合, 構造同定はモデルの次数決定問題に帰着される. 入出力データから次数を決定する方法のなかでは, AIC (赤池情報量規範) 法³¹⁾がおそらく最もよく知られているだろう. しかしながら, AIC 法は本質的に対象をブラックボックスと考えたときの次数決定法であり, 未知パラメータの個数に比べてデータ数がそれほど多くない場合に, 予測の観点から最適なモデル次数を求めようとする方法である³²⁾. よって, 制御系設計のためにモデルを構成するのであれば, 設計の立場, コントローラを実装化する観点を考慮してモデル次数を決定すべきであり, AIC 法のように入出力データのみから次数決定を行う方法は適切ではないと思われる.

そこで, 図3.5にモデル次数決定のための簡単な流れ図を示した. まず, 数値計算上, 不安定にならない範囲で高次モデルを用意しシステム同定を行う. このモデル次数は, 入力信号の PE 性の次数, 同定対象の特性, そして計算精度に依存する. ここで, 数値的不安定性には3.3.3節で述べた正則化法が有効である. つぎに, 事前情報, 制御系からの要請などを参考にし, 制御系設計のためのモデル次数を決定し, その次数までモデル低次元化を行う. 紙面の制約上, モデル低次元化については文献³³⁾を参考にさせていただきたい.

ここで, 制御系設計用のモデル次数決定は, システム同定を行うユーザが, 同定対象である実システムの物理的あるいは化学的な特性をどの程度理解している

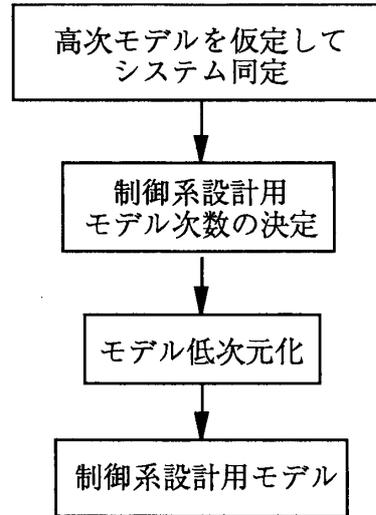


図3.5 制御系設計用モデル次数の決定手順

かに大きく依存する. たとえば, メカニカルシステムを同定する場合には, モデル次数は運動方程式などから比較的簡単に決定しやすいが, 産業用のプラントでは難しい. しかし, 温度, 流量, 圧力制御系などのようなプロセス制御系では, モデル次数を2あるいは3次とすること推奨されている.

図3.5に示した次数決定の手順のなかで, モデル低次元化を行うと, 実際の同定対象に関する情報が欠落することになる. このような情報の欠落を, モデリングではアンモデルダイナミクス, あるいはシステムティック誤差と呼び, これは同定モデルの不確かさの一因となる. モデルの不確かさを考慮した制御系設計法として, 近年ロバスト制御が精力的に研究されており, モデルの不確かさの同定法については第4章で詳しく解説する.

参考文献

- 14) H. Unbehauen and G. P. Rao: Continuous-time approaches to system identification—A survey, *Automatica*, 26-1, 23/35 (1990)
- 15) 美多, 海津: 多入出力離散時間系から連続時間系への逆変換問題, *電気学会論文誌C*, 104-11, 273/280 (1984)
- 16) A. H. Whitfield: Transfer function synthesis using frequency response data, *Int. J. Control*, 43-5, 1413/1426 (1986)
- 17) B. O. Lataire, et al.: A frequency-domain estimation for use in adaptive control systems, *Automatica*, 27-1, 23/38 (1991)
- 18) P. Young: Parameter estimation for continuous-time models—A survey, *Automatica*, 17-1, 23/29 (1981)
- 19) B. Wahlberg: The effects of rapid sampling in system identification, *Automatica*, 26-1, 167/170 (1990)
- 20) 相良: システム同定とサンプリング, 第16回確率シス

- テムシンポジウム資料, 13/18 (1984)
- 21) 足立, 和泉沢, 佐野: 悪条件を考慮した伝達関数モデルの同定, 電子情報通信学会論文誌, **J70-A-3**, 410/418 (1987)
 - 22) R. Isermann: *Digital Control Systems*, Springer-Verlag (1981)
 - 23) N. K. Sinha and S. Puthenpura: Choice of sampling interval for the identification of continuous-time systems from sampling of input/output data, *IEE Proc.*, **132-D-6**, 263/267 (1985)
 - 24) G. C. Goodwin, et al.: Indirect adaptive control—A integrated approach, *Proc. ACC*, 2440/2445 (1988)
 - 25) 辻, 佐野: デシメーションとインターポレーションを利用したシステム同定のための最適サンプリング間隔, 計測自動制御学会論文集, **29-2**, 179/187 (1993)
 - 26) 足立: デジタル制御系における同定, 計測と制御, **32-2**, 128/134 (1993)
 - 27) 足立, 佐野: 入力相関行列の悪条件を考慮したインパルス応答の最小2乗推定, 計測自動制御学会論文集, **22-11**, 1156/1161 (1986)
 - 28) B. Wahlberg and L. Ljung: Hard frequency-domain model error bound from least-squares like identification techniques, *IEEE Trans. Automat. Contr.* **37-7**, 900/912 (1992)
 - 29) 相良, 江口: システム同定における信号処理, 計測と制御, **28-4**, 309/315 (1989)
 - 30) G. E. P. Box and G. M. Jenkins: *Time Series Analysis* (revised ed.), Holden-Day (1976)
 - 31) 足立: デシメーションを用いたシステム同定法, システム/制御/情報, **35-12**, 739/747 (1991)
 - 32) 和田: システム同定の方法, システム/制御/情報, **37-1**, 15/22 (1993)
 - 33) “制御系の低次元化小特集号”, システム/制御/情報, **34-9**, 491/523 (1993)
-