

ポポフの超安定理論を使った片持梁振動の能動的制御<sup>†</sup>川辺尚志\*・吉田和信\*  
西尾洋彦\*\*・池田工\*\*

**ABSTRACT** The active control of cantilevered-beam vibrations has been investigated both from simulation and experiment points of view, by positively utilizing the adaptive model-following control techniques based on the hyperstability theorem by Popov. The followings have been obtained. The choice of the elements ( $\text{diag}[q_i]_{i=1,2}$ ) of the matrix  $Q$  in the Lyapunov eq. ( $A_M'P + PA_M = -Q$ , where the  $A_M$  is a reference model matrix) affects the decaying speed of the tracking error  $e(t)$  on a sliding mode ( $v=0$ ), and the more prominent the relation  $q_1 \gg q_2$ , the more greatly is improved the steady tracking error  $e(\infty)$ . By taking the continuous function  $\text{cont}(v) = v / (\|v\| + \delta)$  in place of the discontinuous input function  $\text{sgn}(v)$  for the robust compensation, the chattering during the sliding mode is not only removed, but the  $e(\infty)$  can be also minimized when there is employed an optimal value of  $\delta$ . Under the condition of  $Q = \text{diag}[10^3, 1]$  and  $\delta = 0.2$ , the maximum controlled logarithmic decrement ( $\delta_1$ ) is  $\delta_{1\max} = 0.3248$  including the free vibration damping  $\delta_{1f} = 0.0117$  in the open loop system. Furthermore, it is found that the adaptive control scheme adopted here guarantees a fairly large robustness even in the presence of the imprecise modeling and parameter variations.

## 1. はじめに

従来、外部からのエネルギー補給の不用なダイナミックダンパー<sup>1)</sup>のような受動型制振法が主流であったが、田中ら<sup>2)</sup>によって現代制御理論を用いたサーボダンパーの制御系設計法が試みられて以来、各種構造物の高度な振動制御技術として制御則を積極的に適用する能動的制振法がコンピュータ利用技術や測定技術の進展とともに中心的に研究されるようになった<sup>3)</sup>。

しかし、これらの多くは RICCATI 方程式を用いて最適状態フィードバックゲインを決定する、いわゆる LQ 制御法<sup>4)</sup>に基づくものである。この手法は、線形系でシステムダイナミックスの厳密なモデリングが可能な場合には極めて有効な制御法であるが、パラメータ変動や外乱により最適制御設計条件がずれた場合にはロバスト制御性が欠如し易い。

ロバストな制御則でモデル追従制御系の 1 つに、POPOV の超安定論<sup>5)</sup>に基づいた可変ゲイン型モデル追従制御法<sup>6)</sup>がある。この手法の特徴は、非連続制御入力 ( $\text{sgn}(v) = v / \|v\|$ ) により、パラメータ変動を含む不確かな状態をすべり面 ( $v=0$ ) に拘束するスライディングモードを有する。従って、制御対象が未知のパラメータを含む不確かな系であっても規範モデルとのモデルマッチング条件が満たされていれば、その追従性が保証されるロバストな制御方式である。この手法は、元来、ロボットマニピュレータの高速制御用に開発されたものであるが、アクティブダンパーのような振動制御への実用例はあまり見られない<sup>7)</sup>。従って今まで主に採用されてきた LQ 方式と異なり、特に強い外乱や負荷変動を伴う場合の能動的制振技術開発の面で有用な知見が得られるものと考えられる。

本研究は、片持ち梁系（1 自由度モデリング）の制振に同制御則を適用し、シミュレーションおよび実機実験の両面より、その能動的制振性を超安定化設計条件（特に LYAPUNOV 方程式の係数行列要素依存性）や、非連続制御入力 ( $\text{sgn}(v)$ ) の連続化に伴う最適化問題や、ロバスト制振性等の観点より検証する。

Active Control of Cantilevered-Beam Vibrations Using the Popov's Hyperstability Theorem. By Hisashi Kawabe and Kazunobu Yoshida (Dept. of Mechan. Eng., Faculty of Eng., Hiroshima Institute of Technology), Hirohiko Nishio and Takuji Ikeda (Mechan. System Eng., Graduate School, Hiroshima Institute of Technology).

\*広島工業大学工学部機械工学科

\*\*広島工業大学大学院機械システム工学専攻

†1992年8月24日受付 1993年1月5日再受付

## 2. 超安定論に基づく可変ゲイン型モデル追従制御則と振動制御系の構成

上述の通り、ここで扱う制御則は、元来、美多ら<sup>6)</sup>によるロボットマニピュレータのロバスト制御用のものであるが、超安定理論に基づくスライディングモード制御法をアクティブランピングに適用した例はあまり見られない<sup>7)</sup>。従って、同制御則適用による能動的制振性の有効性やロバスト性の実験的検証がここでの主眼点であるが、実験条件の展開に必要な範囲で、以下にその理論の特徴を述べる。

いま、制御対象を一般的な非線形系のダイナミクスの形

$$\dot{x} = A_1(x(t))x(t) + A_2(x(t))g(x(t), t) + B(x(t))u(t) \quad (1)$$

とする。ここで、 $x(t) \in R^n$ ,  $g(x(t), t) \in R^r$ ,  $u(t) \in R^m$  であり、 $x(t)$ ,  $g(x(t), t)$  は観測可能とする。特に  $g(x(t), t)$  は、 $x(t)$  が有界ならば、有界になるものとする。また  $A_1(x(t)) \in R^{n \times n}$ ,  $A_2(x(t)) \in R^{n \times r}$ ,  $B(x(t)) \in R^{n \times m}$  はそれぞれ有界な  $x(t)$  の非線形関数行列であり、未知な場合について考える。

一方、追従すべき規範モデルは、 $m$  入力  $n$  次元で可制御かつ安定な線形時不变系

$$\dot{x}_m = A_m x_m(t) + B_m u_m(t) \quad (2)$$

$$A_m \in R^{n \times n}, \quad B_m \in R^{n \times m}$$

とする。 $A_m$ ,  $B_m$  は定数行列であり、以後、

$$\text{rank}(B_m) = m$$

とし、 $u_m(t)$  は有界で、 $x_m(t)$  は観測できるものとする。

次のモデルマッチング条件 (① $A_m - A_1(x(t)) = B_m C_{A1}(x(t))$  を満たす有界行列  $C_{A1} \in R^{m \times n}$  が存在する。② $A_2(x(t)) = B_m C_{A2}(x(t))$  を満たす有界行列  $C_{A2}(x(t)) \in R^{m \times r}$  が存在する。③ $B(x(t)) = B_m C_B(x(t))$  を満たす有界正則行列  $C_B(x(t)) \in R^{n \times m}$  が存在する。④ $C_B(x(t))$  は正定行列である。) を満たすこととして、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 : e = x_m - x \quad (3)$$

が達成できる制御則を、POPOV の超安定論に基づいて設計する。なお、条件①～④は、モデルの入力行列  $B_m$  の像 ( $I_m B_m$ ) の中の変動を扱うということで、物理的には、入力によって直接補償できる範囲のみを考慮することを意味する。また条件④の正定性は、入力方向がモデルと制御対象とで逆にならないようにするための仮定である。

誤差システム状態方程式は

$$\dot{e} = A_m e + B_m w \quad (4)$$

$$w = -C_B(x)u + \psi z \quad (5)$$

ただし、

$$\psi = [C_{A1}(x), -C_{A2}(x), I] \quad (6)$$

$$z = \begin{bmatrix} x \\ g(x, t) \\ u_m \end{bmatrix} \quad (7)$$

ここで、 $C_{A1}(x)$ ,  $C_{A2}(x)$ ,  $C_B(x)$  は未知である。

POPOV の超安定論に従い、まず

(I) システム (4) に対して、出力方程式

$$v = Ce \quad (8)$$

に関する伝達関数

$$G(s) = C(sI - A_m)^{-1} B_m$$

が強正実になるよう行列  $C$  を設計する。すなわち、任意の正定行列  $Q$  を用いた LYAPUNOV 方程式

$$PA_m + A_m^T P = -Q \quad (9)$$

の正定対称行列解  $P$  を用いて

$$C = B_m^T P \quad (10)$$

より  $C$  を定める。

次に、

(II) システム (4)(5) の入出力 ( $w$  と  $v$ ) について

$$\rho = \int_0^T v^T w \, d\tau \leq \gamma_0^2 : \forall t \geq 0$$

が満たされるように制御入力  $u$  を決める。まず

$$v^T w = -v^T C_B(x)u + v^T \psi z \quad (11)$$

また行列のノルムの性質より

$$v^T \psi z \leq \|v\| \|z\| \|\psi\| \quad (12)$$

$C_B(x)$  の正定性より

$$v^T C_B(x) v \geq \|v\|^2 \lambda_{\min}\{C_B(x)\} \quad (13)$$

が成り立つ。

そこで、 $u$  として正のスカラの可変ゲイン  $h(z, v)$  を用いた

$$u = h(z, v) v \quad (14)$$

を考え、式(11)に代入すると、式(12)(13)より、

$$\begin{aligned} v^T w &= -h(z, v) v^T C_B(x) v + v^T \psi z \\ &\leq -h(z, v) \|v\|^2 \lambda_{\min}\{C_B(x)\} - \|z\| \|z\| \|\psi\| \\ &= -\|v\| [h(z, v) \|v\| \lambda_{\min}\{C_B(x)\} - \|z\| \|\psi\|] \end{aligned} \quad (15)$$

が得られる。したがって

$$h(z, v) > \frac{\|z\| \|\psi\|}{\|v\| \lambda_{\min}\{C_B(x)\}} \quad (16)$$

を満たすようなゲイン  $h(z, v)$  を求めることができれば

$$v^T w \leq 0 \quad (17)$$

となり

$$\rho = \int_0^T \mathbf{v}^T \mathbf{w} d\tau \leq \gamma_0^2 : \forall t \geq 0 \quad (18)$$

を成立させることができる。

式(16)を満たす  $h(\mathbf{z}, \mathbf{v})$  として、モデルマッチング条件 (①～④) より

$$h_0 > \frac{\|\psi\|}{\lambda_{\min}\{C_B(\mathbf{x})\}} \quad (19)$$

を満たす有界定数  $h_0$  が存在することと、その大きさは、 $\psi, C_B(\mathbf{x})$  の正確な値がわからなくても大ざっぱに見積ることができるということに注意して

$$h(\mathbf{z}, \mathbf{v}) = h_0 \frac{\|\mathbf{z}\|}{\|\mathbf{v}\|} \quad (20)$$

とおく。実際、式(20)は式(16)を満足している。

以上より、式(1)に対し、制御入力

$$\mathbf{v} = B_m^T \mathbf{P} \mathbf{e} \quad (21)$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ g(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{u}_m \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\mathbf{u} = \begin{cases} h_0 \|\mathbf{z}\| \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} : \mathbf{v} \neq 0 \\ 0 : \mathbf{v} = 0 \end{cases} \quad (23)$$

を加えると、誤差システム(4)は漸近的超安定になります、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = 0$$

が達成される。ここで、本制御系を設計する(パラメータ  $h_0$  を決定する)には、LQ 法に比べて制御対象の大ざっぱな特性さえわかれればよいという利点がある。また、 $\mathbf{v} \neq 0$  のとき、 $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$  は単位ベクトルになっており、制御入力の加えるべき方向を指定しているとみることもできる、そのような意味で本制御則は単位ベクトル法とも呼ばれている。ただし、この制御則は超平面  $\mathbf{v} = 0$  面を境に不連続になる。

以上、超安定論に基づく全制御系のブロック図を Fig. 1 に示す。

### 3. 実験方法

#### 3.1 振動制御のための可変ゲイン型モデル追従制御系の設計

制御対象は Fig. 2 に示す縦型の片持ち梁振動系である。このシステムのパラメータ同定より、制御対象状態方程式は、1 入力系として結局次式で与えられる。

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + b\mathbf{u} \quad (24)$$

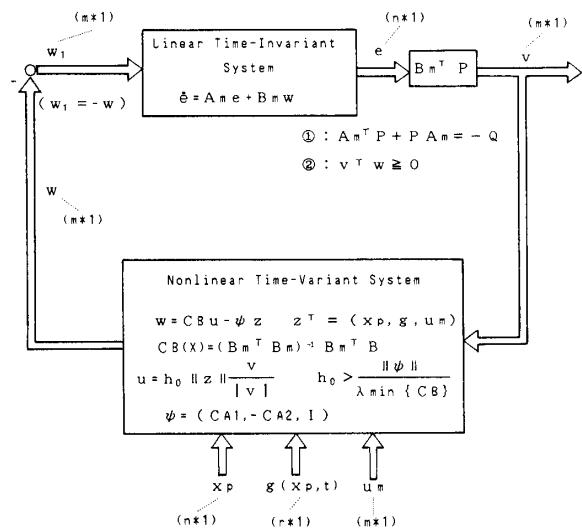


Fig. 1 Block diagram of the control system based on the hyperstability theorem

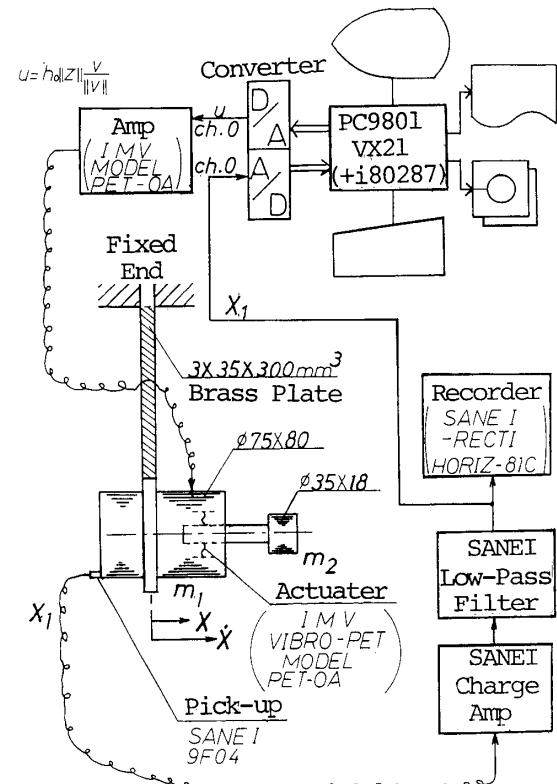


Fig. 2 Setup of the experimental apparatus

$$\left. \begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -713.1 & -0.1214 \end{bmatrix} \\ b &= [0, 0.4961]^T \\ x &= [x_1, x_2]^T = [x, \dot{x}]^T \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

一方、規範モデル状態方程式は、2 次系(減衰係数比  $\zeta$ 、角固有振動数  $\omega_n$  [rad/s])を採用するとき、次式

で与えられる。

$$\dot{x} = A_m x_m + b_m u_m \quad (26)$$

$$\left. \begin{array}{l} A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -\zeta\omega_n \end{bmatrix} \\ b_m = [0, \omega_n^2]^T \\ x_m = [x_{m1}, x_{m2}]^T \end{array} \right\} \quad (27)$$

従って次のモデルマッチング条件を確認する。

(I)  $A_m - A_1 = b_m C_{A1}$  を満たす  $(1 \times 2)$  の有界行列  $C_{A1}$  が存在することより,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -\zeta\omega_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -713.1 & -0.1214 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\omega_n^2 + 713.1 & -2\zeta\omega_n + 0.1214 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_n^2 \end{bmatrix} [C_{A1} \ C_{A2}] \\ \therefore C_{A1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_n^2} [-\omega_n^2 + 713.1] \\ \frac{1}{\omega_n^2} [-2\zeta\omega_n + 0.1214] \end{bmatrix} \quad (28) \end{aligned}$$

(II)  $A_2 = b_m C_{A2}$  を満たす  $(1 \times 1)$  の有界行列  $C_{A2}$  が存在することより,

$$A_2 = 0, C_{A2} = 0$$

(III)  $b = b_m C_B$  を満たす  $(1 \times 1)$  の有界正則行列  $C_B$  が存在することより,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.4961 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_n^2 \end{bmatrix} C_B \\ \therefore C_B = \frac{0.4961}{\omega_n^2} \quad (29)$$

(N)  $C_B$  は正定である。

なお,  $x_2$  の推定は差分をとり,  $x_2 = (x_1(k) - x_1(k-1))/T$  とするが, ノイズの影響を防ぐ為に 4 回の平均を取るものとする。

以上の結果をふまえて, 超安定論に基づく可変ゲイン型モデル追従制御系の全構成ブロック図を Fig. 3 に示す。

### 3.2 実験装置

Fig. 2 で示した実験装置の全体写真と実機制御プログラムのフローチャートを Fig. 4, Fig. 5 に示す.  $x_1(t)$  は振動計 (SANEI CHARGE AMP) で検出する. 浮動小数点演算は数値データプロセッサー (i80287) で補強し, 1 サンプリング時間 5.6[msec] で制御した. A/D, D/A 変換器はコンテック製 AD12-16A(98), DA12-4(98) を用い (この部分の変換は機械語), 主プログラムは Turbo C で処理した. ( $x_2(k)$  は上述の通り,  $x_1(k)_{k=1,0,1,2}$  に関する 4 個の平均量で

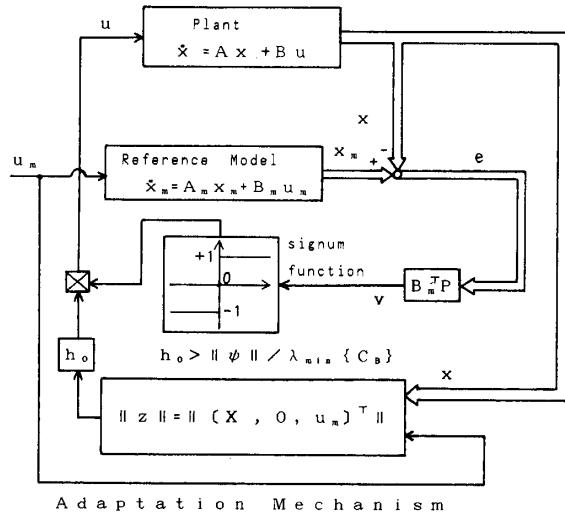


Fig. 3 Block diagram of the adaptive model-following control system based on the hyperstability theorem

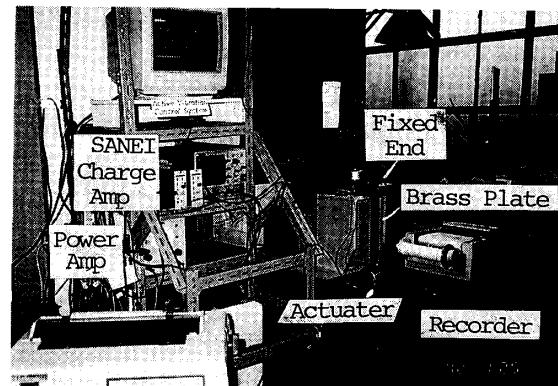


Fig. 4 View of the experimental apparatus

推定するが,  $x_1$  の顕在周期成分は  $\sim 2[\text{Hz}]$  であり, 一方サンプリング速度は  $\sim 180[\text{Hz}]$  であるので平均を取ることによる信号の遅延はあまりない。)

## 4. 実験結果および考察

上述の通り, 超安定化理論に基づいたスライディングモード制御によるアクティブダンピングへの有効性を, LYAPUNOV 方程式における係数行列要素 ( $Q = \text{diag}[q_1, q_2]$ ) 依存性や, 非連続制御入力 ( $\text{sgn}(v)$ ) の連続化制御入力 ( $\text{cont}(v) = v / (\|v\| + \delta)$ ) のための最適化の問題 (最適値  $\delta = \delta_{\text{opt}}$  の存在) や, ロバスト制振性等の観点から, シミュレーションおよび実機の両面より検討する。

### 4.1 シミュレーションによる結果および考察

#### 4.1.1 重み係数行列 $Q$ の制御性能への影響

制御入力  $u$  は (1 入力系につき  $\|v\| = |v|$  として),

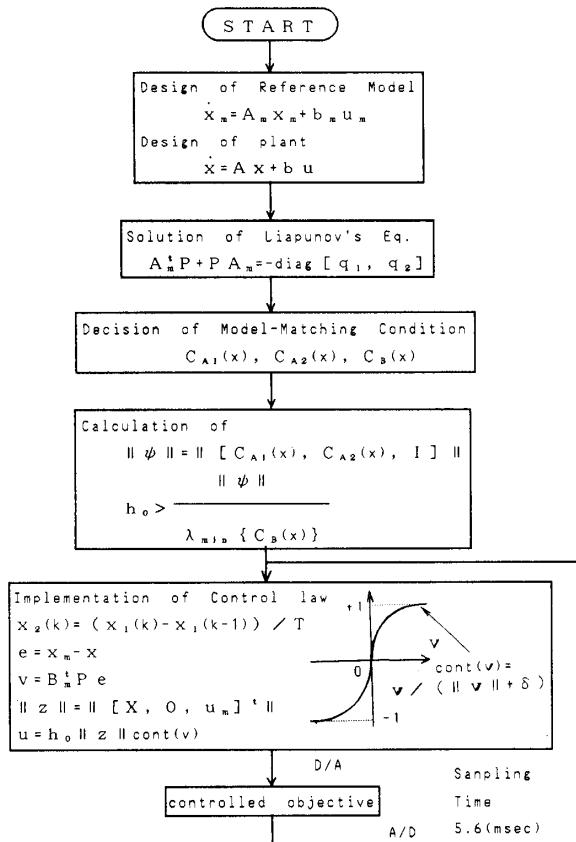


Fig 5 Flow chart of the executing procedure for controlling the vibration system

$$u = h_0 \|z\| \frac{v}{|v|} = h_0 \|z\| \operatorname{sgn}(v)$$

$$= h_0 \|z\| \operatorname{sgn}(B_m^T P e) \quad (30)$$

で与えられるので、正定対称行列  $P$  に依存している。この  $P$  は前述のとおり、強正実条件としての次の LYAPUNOV 方程式

$$A_m^T P + P A_m = -Q \quad (31)$$

$$Q = \operatorname{diag}[q_1, q_2] \quad (32)$$

を満足するものである。従って、係数行列  $Q = \operatorname{diag}[q_1, q_2]$  に依存している。この点について、制御系の規範モデル ( $\omega_n = 6.0 \text{ rad/sec}$ ,  $\zeta = 0.8$ ), 連続化入力閾数  $\delta = 8.0$  (4.4.2項参照) に対して  $q_i$  依存性を検討した。 $q_i$  の条件を Table 1 に示し、この表の条件に従ってシミュレーションした結果を Fig. 6 および Fig. 7 に示す。

Fig. 6(a) は超安定制御設計条件として、 $Q = \operatorname{diag}[10^3, 1]$  の場合を、同図(b) は  $Q = \operatorname{diag}[10^2, 1]$  を、Fig. 7(a) は  $Q = \operatorname{diag}[10, 1]$  の場合を、また同図(b) は  $Q = \operatorname{diag}[1, 1]$  の場合をそれぞれ示す。ここで、 $x_m$  は規範モデルの特性を、 $x(t)$  はそれに対する制御応答

Table 1 Parameters of  $Q$

	$\omega_n = 6.0 \text{ (rad/sec)}$ , $\zeta = 0.8$ , $\delta = 8$
	$Q = \operatorname{diag}[q_1, q_2]$
No	$q_1$
A	1000
B	100
C	10
D	1
	1

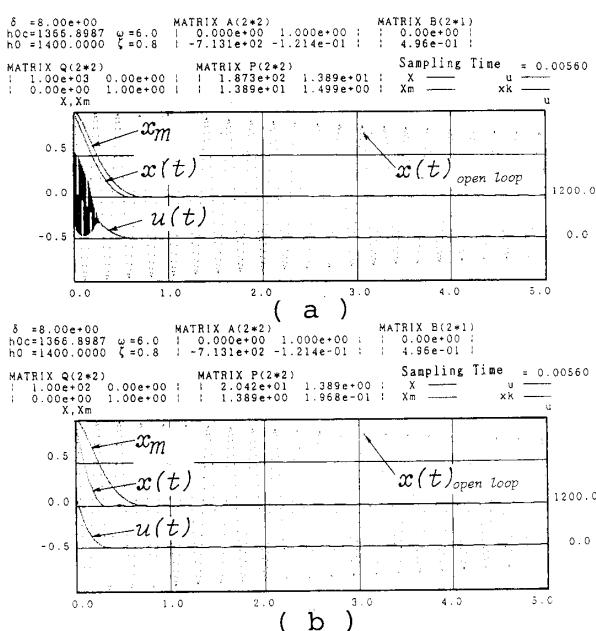


Fig 6 Simulated control responses (a) and (b) corresponding to Table 1-A and Table 1-B

を、 $u(t)$  は制御入力をそれぞれ示す。また、 $x(t)_{\text{open loop}}$  は開ループ系なわち梁の自由振動の応答を示す。

これらの図から、傾向として  $q_1 \gg q_2$  になるにつれて制御制が改善されていることがわかる。このことは、追従制御誤差  $e = x_m - x$  がより減少することより以下のように説明される。

超安定面  $v$  は

$$v = B_m^T P e$$

$$= [0 \ \omega_n^2] \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

$$= \omega_n^2 (p_2 e_1 + p_3 e_2) = 0$$

$$\therefore p_2 e_1 + p_3 e_2 = 0 \quad (33)$$

と表すことができる。

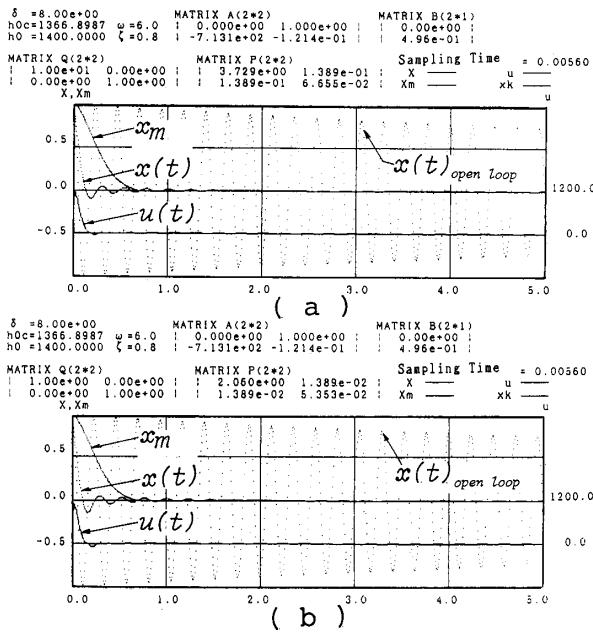


Fig 7 Simulated control responses (a) and (b) corresponding to Table 1-C and Table 1-D

次に、LYAPUNOV 方程式  $A_m^T P + P A_m = -Q$  ( $Q > 0$ ) より  $P$  を求める。

$$\begin{bmatrix} 0 & -a_{m1} \\ 1 & -a_{m2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_{m1} & -a_{m2} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix}$$

より

$$\begin{bmatrix} -2a_{m1}p_2 & p_1 - a_{m2}p_2 - a_{m1}p_3 \\ p_1 - a_{m2}p_2 - a_{m1}p_3 & 2p_2 - a_{m2}p_3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix} \quad (34)$$

よって  $p_2, p_3$  は

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{1}{2a_{m1}} q_1 \\ p_3 &= \frac{1}{2a_{m2}} \left[ q_2 + \frac{q_1}{a_{m1}} \right] \end{aligned} \quad (35)$$

また式(33)は

$$\begin{aligned} p_3 e_2 &= -p_2 e_1 \\ e_2 &= -\frac{p_2}{p_3} e_1 \end{aligned} \quad (36)$$

上式に式(33)の  $p_2, p_3$  を代入すると

$$e_2 = -\frac{\frac{q_1}{2a_{m1}}}{\frac{1}{2a_{m2}} \left[ q_2 + \frac{q_1}{a_{m1}} \right]} e_1$$

$$= -\frac{a_{m2}q_1}{a_{m1}q_2 + q_1} e_1 \quad (37)$$

この式からわかるように、 $q_1/q_2$  に設定する方が  $e_1$  の係数部（絶対値）はより大きくなり、制御誤差の減衰性が大きくなることから、制御誤差の改善性が説明される。

#### 4.1.2 制御入力の連続化要素 $\delta$ の制御性への影響

可変ゲイン型モデル追従制御則における制御入力は、式(30)に示すように、（連続系）制御設計条件的に本来非連続入力関数  $\text{sgn}(v)$  を含む。この  $\text{sgn}(v)$  により、デジタル化演算も関連して状態誤差空間内の超平面  $v=0$  近傍において、チャタリングが生じる。この現象を防ぐため  $\text{sgn}(v)$  の部分を連続化関数  $\text{cont}(v) = v/(|v| + \delta)^{8,9}$  に置き換えてみる。同関数の導入により、非連続な入力を連続化近似することができる。

Table 2 は LYAPUNOV 方程式の係数行列を  $Q = \text{diag}[10^3, 1]$ 、規範モデルパラメータを  $\omega_n = 6.0$  [rad/s]、 $\zeta = 0.8$  にそれぞれ設定した場合の、 $\delta$  の変化条件を示す。同表に従ってシミュレーションした結果を Fig. 8 および Fig. 9 に示す。 $\delta$  が大きくなるに従って、制御入力が滑らかになっており、チャタリングも減少していくが、同時に規範モデルへの追従性が低下していくのがわかる。厳密には、4.2.2項で述べるよう非連続制御入力 ( $\text{sgn}(v)$ ) のデジタル化演算上の問題にからんで<sup>10)</sup>、 $\delta$  には追従制御誤差を最小にする最適値<sup>11)</sup>が存在する（図説は省略）。

#### 4.2 実機制御による結果および考察

前節でのシミュレーション面での検討と同様、更に実機面より、超安定化設計条件（LYAPUNOV 方程式の係数行列値依存性）と制振性、デジタル化演算に伴うスライディングモード制御入力関数の最適化、スライディングモード制御特有のロバスト制振性等の問題について検討する。

Table 2 Parameters of  $Q$

No	$\delta$	$\omega = 6.0$ [rad/sec], $\zeta = 0.8$	
		$q_1$	$q_2$
A	10		
B	100		
C	1000	1000	1
D	10000		

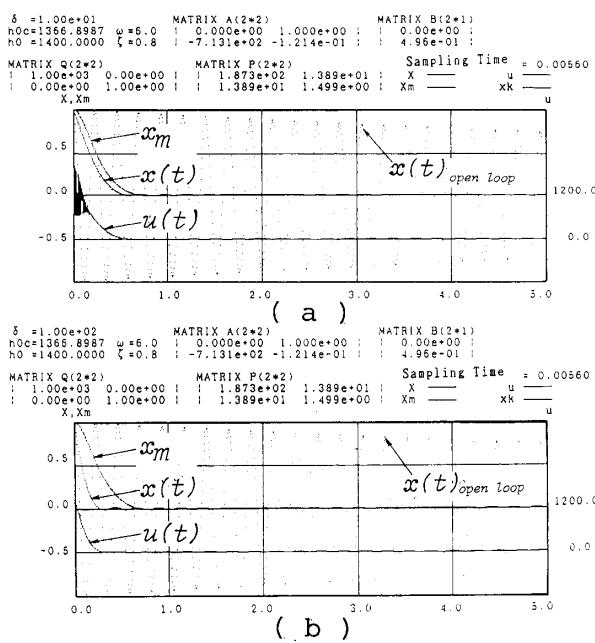


Fig. 8 Simulated control responses (a) and (b) corresponding to Table 2-A and Table 2-B

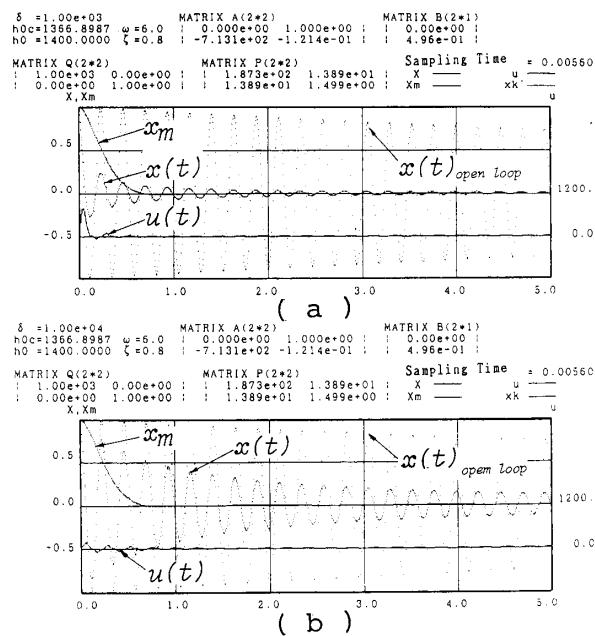


Fig. 9 Simulated control responses (a) and (b) corresponding to Table 2-C and Table 2-D

#### 4.2.1 実機制御における重み係数行列 $Q$ の制御性能への影響

4.1.1項で述べた  $q_i$  依存性を実機制御実験より検証する。Table 3は、規範モデルパラメータを  $\omega_n = 6.0$  [rad/s],  $\zeta = 0.8$ ，入力関数の線形化要素を  $\delta = 2.0$  にそれぞれ設定し，LYAPUNOV方程式の係

Table 3 Parameters of  $Q$

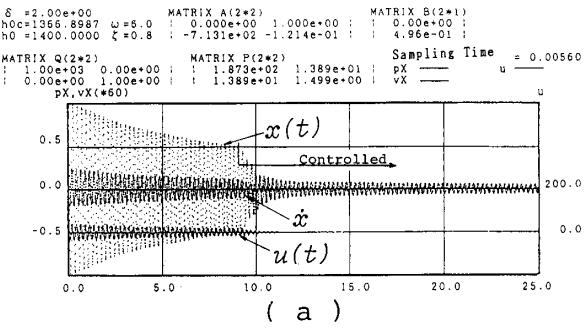
No.	$\delta$	$Q = \text{diag}[q_1, q_2]$		$\delta_i$
		$q_1$	$q_2$	
A	2	1000	1	0.2452
B	2	100	1	0.1386
C	2	10	1	0.1155
D	2	1	1	0.1155

数行列  $Q = \text{diag}[q_1, q_2]$  を変化させた場合の条件と対応する  $\delta_i$  の実測値を示す。同表の条件 A, D について実機制御実験した結果を Fig. 10, Fig. 11 に示す。各図における (a) は CRT 画面の、(b) はレコーダ (紙送り 10 mm/sec) での記録を示す。(a), (b) 図とも  $x(t)$  が梁の振動応答を示し、controlled の記号以後が閉ループ系、すなわち制御応答を示す。なお  $\dot{x}$  は振動の速度を、 $u(t)$  は制御入力をそれぞれ示す。制振性能を示す対数減衰率  $\delta_i$  は、レコーダーの記録波形から以下の式に従って求めた<sup>1)</sup>。

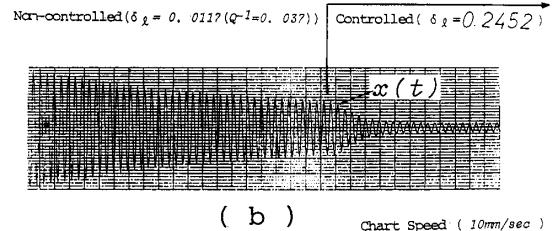
$$\delta_i = (1/n) \ln (a_1/a_{n+1}) \quad (38)$$

ここに、 $a_1$  は減衰振動中の第 1 振幅を、 $a_{n+1}$  は第  $n+1$  番目の振幅をそれぞれ示す。

制御性能の比較基準用として、開ループ系 (制御のない自由減衰状態) での減衰効果を測定した結果、 $\delta_i$

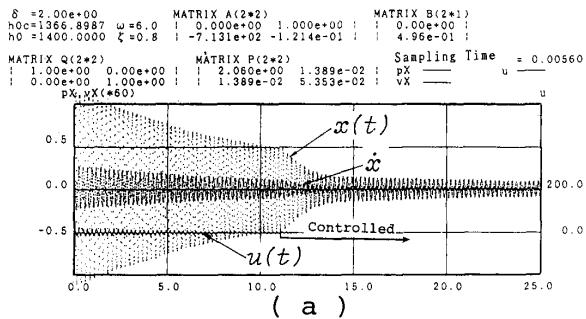


(a) Waveforms displayed on a CRT

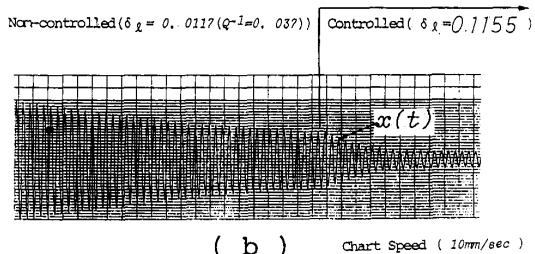


(b) Waveform using a recorder

Fig. 10 Real-time controlled responses corresponding to Table 3-A



(a) Waveforms displayed on a CRT



(b) Waveform using a recorder

Fig 11 Real-time controll responses correspond to Table 3-D

$=\delta_l=0.0117$  である。

Fig. 10 は  $Q=\text{diag}[10^3, 1]$  の場合 (同表条件 A) であり,  $\delta_l=0.2452$  である。また Fig. 11 は  $Q=\text{diag}[1, 1]$  の場合 (同表条件 D) であり, 制御性能の目安としての  $\delta_l$  は低下している。

以上の結果より,  $q_1 \gg q_2$  であるほど, 制振性能が向上することがわかる。この結果は4.1.1項の考察と一致する。

#### 4.2.2 実機制御での連続化入力要素 $\delta$ の制御性能への影響

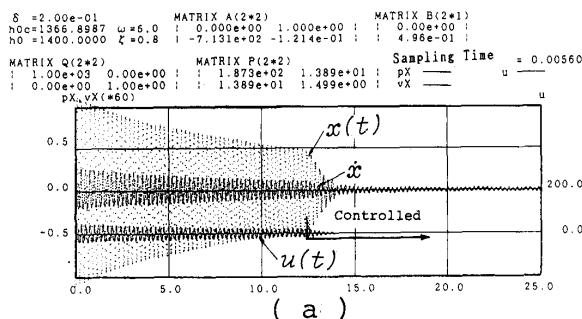
4.1.2項で述べた  $\delta$  の制御性への影響を実機制御により検討してみる。Table 4 は, 規範モデルパラメータを  $\omega_n=6.0[\text{rad/s}]$ ,  $\zeta=0.8$ , LYAPUNOV 方程式の係数行列を  $Q=\text{diag}[10^3, 1]$  にそれぞれ設定し, 制御入力の連続化要素  $\delta$  を変化させた場合の条件と対応する  $\delta_l$  の実測値を示す。同表の条件 A は  $\delta=0$  の場合, つまり本来の制御系設計条件で与えられる非連続入力関数  $\text{sgn}(v)$  の場合の制御応答である。以下, 各図のレコーダー記録より  $\delta_l$  を算定すると, 条件 C のときに最も制振効果 ( $\delta_l=0.3248$ ) は大きくなっている。一方  $\delta > \delta_{\text{opt}}$  では, より非連続的な入力状態となってチャタリングが漸増し, 一方  $\delta < \delta_{\text{opt}}$  ではより

Table 4 Parameters of  $\delta$ 

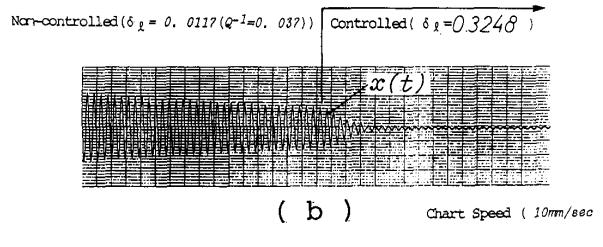
No	$\delta$	$Q = \text{diag}[q_1, q_2]$		$\delta_l$
		$q_1$	$q_2$	
		1000	1	
A	0			0.2452
B	0.1			0.2506
C	0.2			0.3248
D	0.5			0.2496
E	1.0			0.2291
F	1.5			0.2118
G	10			0.1733
H	100			0.0770
I	1000			0.0193

Fig. 12 は条件 C の実機制御結果であり, 同図(a)は CRT の, 同図(b)はレコーダー (紙送り 10 mm/sec) の記録状態をそれぞれ示す。

以上のことから,  $\text{sgn}(v)$  を含む制御系を cont ( $v$ ) のディジタル系で実装した場合, 最適な  $\delta$  (本例では, Table 4 より,  $\delta_{\text{opt}}=0.2$ ) が存在する事がわかる。このことは,  $\delta < \delta_{\text{opt}}$  では, より非連続的な入力状態となってチャタリングが漸増し, 一方  $\delta > \delta_{\text{opt}}$  ではより



(a) Waveforms displayed on a CRT



(b) Waveform using a recorder

Fig 12 Real-time controll responses correspond to Table 4-C

連続的入力になるが逆に不安定領域の漸増する状態となるため制御効果が再度低下することで説明される\*.

#### 4.2.3 ロバスト性

実機制御実験において、制御対象にパラメータ変動が発生した場合の制御強さ、すなわちロバスト性について検討してみる。

**Table 5** は、規範モデルパラメータを、 $\omega_n=6.0$  [rad/s],  $\zeta=0.8$ , 係数行列を  $Q=\text{diag}[10^3, 1]$ , 入力関数の線形化要素を  $\delta=0$  (すなわち  $\text{sgn}(v)$ ) として **Fig. 13** に示すように梁に取り付けた分銅を変化させた場合の条件と対応する  $\delta_i$  の実測値を示す。

条件 (R-1) は制御対象にパラメータ変動がない場合で、 $\delta_i=0.2554$  の制振効果がみられる。条件 (R-2) は梁に 200 g の分銅を取り付けた場合で、 $\delta_i=0.2118$  と僅かながら制振効果の低下がみられる。

同様に、条件 (R-3) は梁に 500 g の分銅を取り付けた場合であり、また条件 (R-4) は 700 g の分銅を取り付けた場合で、システムパラメータの増加と共に、 $\delta_i=0.2088 \rightarrow 0.1695$  へと徐々に低下してはいる。しかし(図説は略したが)厳密モデリングを前提とする LQ 制御系の場合<sup>4)</sup>と比べて、依然として強力な制振効果が得られている。

以上の結果より、可変ゲイン型モデル追従制御則は実験に用いた振動系に対し、幅広いロバスト性を有すると言える。

## 5. まとめ

POPOV の超安定化理論に基づいた可変ゲイン型モ

Table 5 Parameters of  $\delta$

$\omega=6.0(\text{rad/sec})$ , $\zeta=0.8$ : $\delta=0.0$				
No	W(g)	$Q=\text{diag}[q_1, q_2]$		$\delta_i$
		$q_1$	$q_2$	
R-1	0			0.2554
R-2	200	1000	1	0.2118
R-3	500			0.2088
R-4	700			0.1695

\*<sup>1)</sup> 非連続入力  $\text{sgn}(v)$  を連続化入力関数  $\text{cont}(v)=v/(|v|+\delta)$  に置き換えた場合、制御性が向上し、 $\delta$  の最適値が存在する問題は、非線形制御入力のディジタル化(すなわちサンプリング時間)に伴う演算誤差と密接な関係があり<sup>10)</sup>、特に線形化関数  $\text{sat}(v)$  の場合に関しては最適化勾配( $\phi_{\text{opt}}$ )が存在するという川辺らの説明<sup>11)</sup>に対応するものと考えられる。

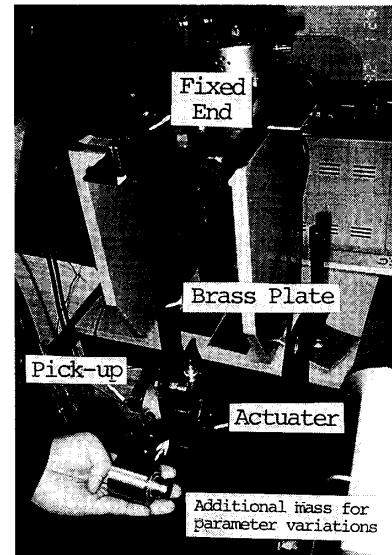


Fig. 13 Additional mass for checking the robustness

モデル追従制御則を片持ち梁振動系に適用して、振動の能動的制御系を構築し、シミュレーションおよび実機実験の両面より制振効果を検討した。

(1) 超安定制御系設計における LYAPUNOV 方程式 ( $A_m^T P + P A_m = -Q$ ,  $Q=\text{diag}[q_i]_{i=1, 2}$ ) における  $q_i$  依存性を、シミュレーション面より検討した結果、 $q_1 > q_2$  になるに従って制御性が改善される。これは理論的にも説明される。

(2) 制御系設計条件的に与えられる非連続制御入力関数  $\text{sgn}(v)$  をチャタリング除去のための連続化関数  $\text{cont}(v)=v/(|v|+\delta)$  に換えるとき、ディジタル化演算に関連して最大制振効果を得るための最適な  $\delta$  が存在する。

(3) ((2)に関して) 実機実験で得られる最大制振能は、 $Q=\text{diag}[10^3, 1]$  の系で、 $\delta=\delta_{\text{opt}}=0.2$  のとき、最大対数減衰率  $\delta_{\text{le max}}=0.3248$  (うち自由減衰での寄与分は  $\delta_f=0.0117$  であるので、 $\delta_{\text{le max}}/\delta_f=27.8$ ) である。

(5) 3種類の分銅(200 g, 500 g, 700 g)を梁に取り付けてロバスト性を検討した結果、重い分銅になるに従い制振効果は徐々に低下したが、かなりの制振効果が保持された。これより、可変ゲイン型モデル追従制御則は制振面でもかなりのロバスト性を有すると言える。

## 参考文献

- 1) 日高照晃, 石田 武, 小田 哲, 川辺尚志, 吉田 彰, 芝村敏夫: 機械力学(一振動工学の基礎一) 56/77, (1987)
- 2) 田中信雄, 宮下政和, 富成 譲: サーボダンバ系の出

- カフィードバック制御, 日本機械学会論文集, 42-355, 755/764, (1976)
- 3) たとえば, 背戸一登, 鈴木浩平: 振動の能動的制御と動特性同定, 日本機械学会誌, 89-811, 635/642, (1986)
  - 4) たとえば, 川辺尚志, 吉田和信: 機械振動の能動的制御に関する実験的考察, シミュレーション, 8-4, 42/48, (1989)
  - 5) たとえば, 太田祐文: ボボフの超安定論によるモデル規範形適応制御系の解析, 計測自動制御学会論文集, 10-3, 370/377, (1979)
  - 6) 美多 勉, 大須賀公一: ロボット制御工学入門, コロナ社, 201/208, (1989)
  - 7) 岩田義明: スライディングモード制御による振動制御系設計法, 体験・振動制御—先端理論による振動制御系設計法と実験・実習一, 日本機械学会, 910-42, 33/43, (1991)
  - 8) J. J. E Slotine: The Robust Control of Robot Manipulators, Int J. Robotics Research, 4-2, 49/64, (1985)
  - 9) G. Ambrosino, G. Celentano and F. Garofalo: Robust Model Tracking Control for a Class of Nonlinear Plants, IEEE, Trans. Automatic Control, AC-30-3, 275/280, (1985)
  - 10) 吉川恒夫, 杉江俊治, 井村順一: 非線形メカニカルシステムのディジタルロバスト制御, システム制御情報学会論文集, 3-9, 298/309, (1990)
  - 11) 川辺尚志, 藤本克彦, 吉田和信: 適応型モデル追従制御 (AMFC) 誤差特性—特に Balest rino の AMFC 機構について一, シミュレーション, 11-4, 269/278, (1992)