

《講座》

システム同定—入門から最近の話題まで—〔4〕

足立 修一*・佐野 昭**

ABSTRACT The final lecture presents two topics in the recent system identification theory, i. e. the closed-loop system identification and the non-linear system identification. The latter includes the non-linear system identification based on the NARMAX model and the neural network.

5. システム同定におけるトピックス

本章では、閉ループシステムの同定と非線形システムの同定について述べる。

5.1 閉ループシステムの同定

フィードバックの存在する状況下、すなわち閉ループで同定実験を行わなくてはならない場合がある³⁾。同定対象が不安定システムである場合や、操業中の産業プラントを同定するとき、経済性あるいは安全性の理由から閉ループ同定実験が行えない場合などがこの状況に相当する。本節では、例題を通して閉ループシステムの同定問題を考え、閉ループシステムの可同定性に関する定理を与える。また、既約分解表現に基づく閉ループシステムの同定法についても述べる。

5.1.1 閉ループシステムの可同定性

【例題 5.1】 離散時間システム

$$y(k) + ay(k-1) = b_1u(k-1) + b_2u(k-2) + w(k) \quad (5.1)$$

がPI制御であるフィードバック制御則

$$u(k) = g\{r(k) - y(k)\} - fu(k-1) \quad (5.2)$$

によって制御されている場合を考える⁴⁾。ただし、 $r(k)$ は参照入力である。

まず、レギュレータ問題（すなわち、 $r(k) \equiv 0$ ）を考える。(5.2)式を(5.1)式に代入すると、

$$\begin{aligned} & \{1 + (a+f+gb_1)q^{-1} + (af+gb_2)q^{-2}\}y(k) \\ & = (1+fq^{-1})w(k) \end{aligned} \quad (5.3)$$

が得られ、これは外乱 w から出力 y までの閉ループシステムを記述している。いま、スカラー α を導入す

System Identification—From fundamentals to recent topics—〔4〕.
By Shuichi Adachi (Dept. of Electrical and Electronic Engineering, Utsunomiya Univ.) and Akira Sano (Dept. of Electrical Engineering, Keio Univ.)

*宇都宮大学工学部

**慶應義塾大学理工学部

ると、

$$\hat{a} = a - \alpha g, \quad \hat{b}_1 = b_1 + \alpha, \quad \hat{b}_2 = b_2 + \alpha f \quad (5.4)$$

という条件を満たすパラメータ ($\hat{a}, \hat{b}_1, \hat{b}_2$) より構成されるすべてのモデルは、フィードバック制御則 (5.2) のもとで、モデル (a, b_1, b_2) と同一の入出力関係を与える。したがって、これらのモデルを区別することはできず、この条件下での閉ループシステムは可同定ではない。この場合、入力 $u(k)$ はフィルタリングされた白色雑音 $w(k)$ より構成されているので、3.3.1項で述べたPE性の条件を満たしていることに注意する。このように閉ループ同定の場合、PE性はもはや入力に関する十分条件ではなくなる。

以上ではレギュレータ問題を考えたが、入力 $u(k)$ と独立な参照入力 $r(k)$ を導入し、その値が時間的に変化すると仮定すると（すなわち、サーボ問題と考えると）、閉ループシステムは可同定になることが知られている。参照入力以外にも、コントローラの次数、出力端に加わる雑音なども閉ループシステムの可同定性に影響する。

さて、図5.1に示す閉ループシステムにおいて、プラントの係数パラメータを推定する問題を考える。ここで、プラントは、

$$A(q)y(k) = q^{-d}B(q)u(k) + C(q)w(k) \quad (5.5)$$

で記述でき、フィードバック制御則は、

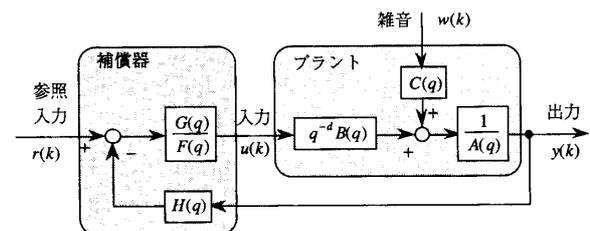


図5.1 閉ループシステムの同定

$$u(k) = \frac{G(q)}{F(q)} \{r(k) - H(q)y(k)\} \quad (5.6)$$

とする。(5.5), (5.6)式から $u(k)$ を消去すると,

$$\begin{aligned} & \{A(q)F(q) + q^{-d}B(q)G(q)H(q)\}y(k) \\ & = q^{-d}B(q)G(q)r(k) + C(q)F(q)w(k) \end{aligned} \quad (5.7)$$

が得られる。この閉ループシステム同定する2つの方法を以下で与えよう。

【同定法1: レギュレータ問題】 $r(k) \equiv 0$ とすると, (5.7)式は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \{A(q)F(q) + q^{-d}B(q)G(q)H(q)\}y(k) \\ & = C(q)F(q)w(k) \end{aligned} \quad (5.8)$$

このとき, $w(k)$ は観測できない確率変数列であるで, (5.8)式は ARMA モデルとなり, 時系列 $\{y(k)\}$ を ARMA モデリングすることにより係数パラメータを推定することができる。本講座では ARMA モデリングについて述べなかったが, これは未知パラメータに関して非線形となるため, 解析的に解くことはできず, Gauss-Newton 法のような非線形計画法を用いて iterative に解くことになる。またこの場合, プラントを同定するためには, 2つ以上のコントローラを切り替える動作が必要となる。

【同定法2: サーボ問題】 この場合, 参照入力 $r(k)$ が利用できるので, $r(k)$ に摂動を加える同定法を与える。

[Step 1] (5.7)式を入力が $r(k)$, 出力が $y(k)$ でむだ時間を有する ARMAX モデルとみなし, 開ループ同定の場合と同様の手法を用いて, $y(k), r(k), w(k)$ に対する多項式の係数パラメータを推定する。このとき, (5.7)式が可同定となるように, 摂動された PE 性条件を満たす信号 $r(k)$ を用いる。

[Step 2] コントローラの多項式 $F(q), G(q), H(q)$ とむだ時間 d が既知であるという条件のもとで, プラントを記述する $A(q), B(q), C(q)$ を解く。□

つぎに, 閉ループシステムの可同定性に関する一般的な定理を与える。

【定理 5.1】 真のシステムは(2.1a)式で与えられるとする。すなわち,

$$y(k) = G(q)u(k) + v(k) \quad (5.9)$$

このとき, 入力 $u(k)$ は出力フィードバックと外部入力 $x(k)$ (たとえば, 参照入力, 測定可能な外乱) により構成されたとする。すなわち,

$$u(k) = L_i(q)y(k) + K_i(q)x(k), \quad i=1, 2, \dots, p \quad (5.10)$$

ただし, $L_i(q)$ と $K_i(q)$ はそれぞれ p 個の異なる線形フィルタで, 閉ループ同定実験の間, 切り替わるもの

とする。また, 信号 $\eta(k) := [v(k) \ x(k)]^T$ のスペクトルは, すべての周波数 ω に対して正定値であるとする。さらに, 異なる p 個のレギュレータによって得られる閉ループシステムは, すべて安定であると仮定する。すると, すべての ω に対して,

$$\begin{aligned} T(\omega) := & p \sum_{i=1}^p \{|K_i(e^{j\omega})|^2 + |L_i(e^{j\omega})|^2\} \\ & - \left| \sum_{i=1}^p L_i(e^{j\omega}) \right|^2 > 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

が成立するとき限り, この閉ループシステムは可同定になる。なお, 紙面の制約上, 証明は文献12)を参考にさせていただきたい。□

5.1.2 既約分解に基づく閉ループシステムの同定

最近, 既約分解表現に基づく閉ループシステムの同定法⁵⁰⁾も提案されており, この方法を以下に示す。

ここでは, 図5.2に示した一般的な閉ループシステムの同定問題を考える。図において, P は同定対象であるプラント, F は補償器, u は入力, y は出力, r_1, r_2 は外部入力, そして w は雑音を表わす。構造とパラメータが既知である補償器 F が与えられたとき, F により安定化される任意の公称プラント P_0 を選定することを考える。いま, 補償器と公称プラントをそれぞれ

$$F = \frac{X}{Y}, \quad P_0 = \frac{N_0}{D_0} \quad (X, Y, N_0, D_0 \in RH_\infty) \quad (5.12)$$

のように既約, 安定因子の比の形で表現する。すると, X, Y が与えられたとき,

$$D_0 Y + X N_0 = 1 \quad (5.13)$$

を満足する D_0, N_0 を求める問題に帰着でき, これらは(5.13)式より計算可能である。

ここでは簡単のために, X, Y, N_0, D_0 はシフトオペレータ q の多項式であると仮定する。すると, プラントのモデルは次式のように表現できる。

$$\begin{aligned} y(k) = & \frac{N_0(q) + R(q)Y(q)}{D_0(q) - R(q)X(q)} u(k) \\ & + \frac{S(q)}{D_0(q) - R(q)X(q)} w(k) \end{aligned} \quad (5.14)$$

ただし, $R(q)$ は任意のプロパーな伝達関数で, $S(q)$ は任意の安定, 可逆伝達関数である。(5.14)式に基づくプラント表現のブロック線図を図5.3に与えた。このモデル表現の利点を以下に列挙する。

- (1) 対 $(R(q), S(q))$ は完全にプラントを規定する。
- (2) たとえば, 第2章で述べた ARMAX モデル

$$A(q)y(k) = B(q)u(k) + C(q)w(k) \quad (5.15)$$

を考える。ここで, $A(q)$ と $B(q)$ は不安定零点を共有しないと仮定する。すると, (5.14), (5.15)式より,

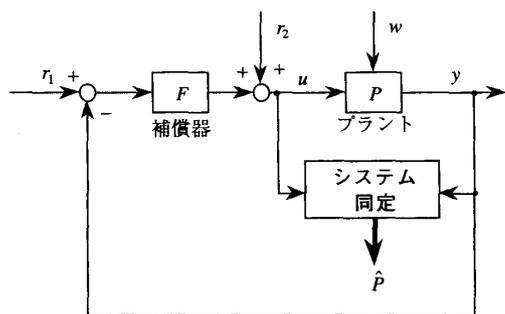


図5.2 一般的な閉ループシステム同定

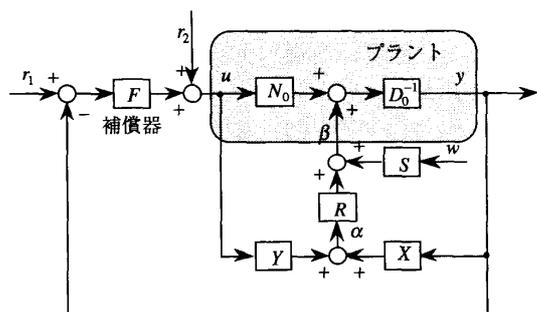


図5.3 既約分解表現に基づく閉ループシステムの表現

$R(q)$ と $S(q)$ はそれぞれつぎのように表わされる.

$$R(q) = \frac{D_0(q)B(q) - N_0(q)A(q)}{X(q)B(q) + Y(q)A(q)} \quad (5.16)$$

$$S(q) = \frac{X(q)N_0(q) - Y(q)D_0(q)}{X(q)B(q) + Y(q)A(q)} M(q) \quad (5.17)$$

(5.16), (5.17)式より, 明らかに

$$X(q)B(q) + Y(q)A(q) \Big|_{q=\infty} \neq 0$$

のときに限り, $R(q)$ は定義される. また, $S(q)$ は $M(q)$ が最小位相のときに限り, 最小位相となる.

(3) $R(q)$ の入力を $\alpha(k)$ とおくと, これは r_1, r_2, F のみに依存する. なぜならば, 図5.3より

$$\alpha(k) = Y(q)u(k) + X(q)y(k) = X(q)r_1 + Y(q)r_2 \quad (5.18)$$

が成り立ち, これは雑音 $w(k)$ と無相関になるからである. ここで, $F(q) = X(q)/Y(q)$ を利用した.

つぎに, (5.18)式より $\alpha(k)$ は $\beta(k)$ と $w(k)$ の双方と独立なので, サブシステム

$$\beta(k) = R(q)\alpha(k) + S(q)w(k) \quad (5.19)$$

はあたかも開ループで動作しているとみなすことができる. ここで,

$$\beta(k) = D_0(q)y(k) - N_0(q)u(k)$$

は測定可能であるので, (5.19)式において $\alpha(k)$ が入力, $\beta(k)$ が出力, $w(k)$ が雑音である ARMAX モデ

ルの開ループ同定問題に帰着され, 一般化最小2乗法などを適用することにより, 対 $(R(q), S(q))$ を同定することができる.

ひとたび, 推定値 $\hat{R}(q), \hat{S}(q)$ が求められれば, プラントの伝達関数 $G(q)$ と雑音モデル $H(q)$ はそれぞれ次式より計算できる.

$$G(q) = \frac{N_0(q) + \hat{R}(q)Y(q)}{D_0(q) - \hat{R}(q)X(q)} \quad (5.20)$$

$$H(q) = \frac{\hat{S}(q)}{D_0(q) - \hat{R}(q)X(q)} \quad (5.21)$$

以上でまとめたように, 既約分解表現に基づく閉ループシステムの同定法では, プラントの入出力データ $\{u(k), y(k)\}$ から $G(q)$ と $H(q)$ を直接推定する代わりに, $\{\alpha(k), \beta(k)\}$ から $R(q)$ と $S(q)$ を推定することにより, 閉ループ同定問題を開ループ同定問題に変換していることに注意する.

5.2 非線形システム同定

これまで本講座では, 同定対象は線形であると仮定して議論を進めてきた. しかしながら, 実際に同定対象とするシステムは, 程度の差こそあれ, 一般に非線形システムである. ところが, 線形システム同定に関する研究は, 非常に盛んに行われているが, 同定対象が非線形の場合には, 決定的な方法は提案されておらず, いまだに研究途上にある^{51)~54)}. そこで, 本節では, これまでに提案された代表的な非線形モデルを紹介し, その中で制御系設計のためのモデルとして有望な NARMAX (非線形 ARMAX) モデルを用いた非線形システム同定について詳しく述べる.

5.2.1 代表的な非線形モデル

非線形システムの同定問題に対して, これまでに提案されたさまざまなモデルを年代別に大まかに分類すると, つぎのようになる⁵²⁾.

1960年代: ボルテラ級数, ブロック指向モデル.

1970年代: カスケードモデル, GMDH (Group Method of Data Handling).

1980年代: NARMAX モデルに代表されるパラメータに関して線形な非線形動的モデル.

以下では, これらのモデルのいくつかについて簡単に紹介する.

(a) ボルテラ級数モデル

次式で与えられるボルテラ級数モデルは, 非線形システムの表現として, 最もよく知られているものの1つであろう⁵⁵⁾.

$$y(t) = \int_0^T h_1(\tau_1)u(t-\tau_1) d\tau_1$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^T \int_0^T h_2(\tau_1, \tau_2) u(t-\tau_1) u(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\
 & + \dots \quad (5.22)
 \end{aligned}$$

ここで、 $u(t)$ は入力、 $y(t)$ は出力、そして $h_i(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i)$ は i 次ボルテラ核と呼ばれる。結局ボルテラ級数モデルを用いた非線形システムの同定とは、ボルテラ核の推定を意味する。ここで、(5.22) 式のボルテラ級数モデルは、インパルス応答 $h(\tau)$ のたたみこみ積分による線形システムの表現

$$y(t) = \int_0^T h(\tau) u(t-\tau) d\tau \quad (5.23)$$

を特殊例として含むことは明らかである。

(5.22) 式のボルテラ級数モデルを離散化したものは、コルモゴロフ・ガボア多項式モデルと呼ばれ、

$$\begin{aligned}
 y(k) = & \sum_{m_1=0}^{k-1} h_1(m_1) u(k-m_1) \\
 & + \sum_{m_1=0}^{k-1} \sum_{m_2=0}^{m_1} h_2(m_1, m_2) u(k-m_1) u(k-m_2) + \dots \quad (5.24)
 \end{aligned}$$

で与えられる。(5.24) 式右辺第 1 項までを用いたものが、2.2.2 項で示した FIR モデルである。

線形システムを FIR モデルを用いて同定する場合、パラメータ数はできるだけ多い方が望ましく、普通数十個にとられることが多い。それに対応して、(5.24) 式の離散化されたボルテラ級数モデルでは $h_1(m_1)$ は数十個、 $h_2(m_1, m_2)$ は数百個、 $h_3(m_1, m_2, m_3)$ は数千個のパラメータが必要であるとされている。このように、ボルテラ級数モデルの場合、簡単な非線形性を記述するだけでも、大量のパラメータが必要になるため、実際に適用された事例は余り報告されていない。

さまざまなボルテラ核の推定法が提案されているが、最もわかりやすい方法は白色性入力を対象に印加し、高次相関関数により推定する方法であろう⁵⁶⁾。

(b) パラメータに関して線形なモデル

このモデルは、パラメータに関して線形な差分方程式によって非線形システムを記述するものであり、モデルの要素は入力、出力そして残差の(線形あるいは非線形)多項式関数によって構成される⁵⁷⁾。パラメータに関して線形なモデルの代表例が NARMAX モデルである⁵⁸⁾。

さて、線形離散時間システムの場合、インパルス応答列より構成されるハンケル行列が有限次元であれば、線形差分方程式

$$\begin{aligned}
 y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) \\
 = b_1 u(k-1) + \dots + b_n u(k-n) \quad (5.25)
 \end{aligned}$$

で記述でき、これはシステムの実現問題として知られている。(5.25) 式は、第 2 章で述べたように

$$A(q)y(k) = B(q)u(k) \quad (5.26)$$

と書き直すことができる。たとえば、(5.26) 式に雑音 $w(k)$ を加えると、

$$A(q)y(k) = B(q)u(k) + w(k) \quad (5.27)$$

となり、これは(2.11)式で与えた線形システム同定のモデルとしてしばしば利用される ARX モデルである。また、雑音項を MA 過程 $C(q)w(k)$ としたものが、(2.15) 式で与えた ARMAX モデル

$$A(q)y(k) = B(q)u(k) + C(q)w(k) \quad (5.28)$$

である。

システムが線形、有限次元実現可能であれば、ARX, ARMAX モデルのような線形差分方程式モデルで記述できるという前提に基づいて、第 2 章で述べた線形システムのパラメトリック同定アルゴリズムのほとんどが提案されてきた。FIR モデルを用いて線形システム同定を行うと、パラメータ数が増大するという問題点が、ARX, ARMAX モデルを用いると改善でき、しかも制御系設計のためには少ないパラメータでモデルを記述できる方がよいという要請を満たしていたからである。

これと同様な考えを非線形システムに拡張したものが、NARMAX モデルに代表されるパラメータに関して線形な非線形動的モデルである。線形システムのインパルス応答は、非線形システムではボルテラ級数に対応するので、線形システムの場合と同様にボルテラ級数モデルを用いると、前述したように簡単な非線形性を記述するだけでも大量のパラメータが必要になる。それに対して、NARMAX モデルを用いると、モデルを記述するパラメータの個数を大幅に低減化できる。したがって、線形システムにおける FIR モデルと ARMAX モデルの関係が、非線形システムではボルテラ級数モデルと NARMAX モデルの関係に対応づけられる。このように、NARMAX モデルを用いて非線形システム同定を行うと、線形システム同定の自然な拡張として非線形システム同定問題を定式化できるため、本講座でこれまで述べてきた線形システム同定の研究成果を継承することが可能になる。

(c) ブロック指向モデル

ブロック指向モデル (block-oriented model) は、静的非線形項と動的線形項より構成され、実際非線形システムはこのように表現されるものが多い。代表的な例として一般化 Hammerstein モデルを図 5.4 に示した。このモデルは次式のように記述される。

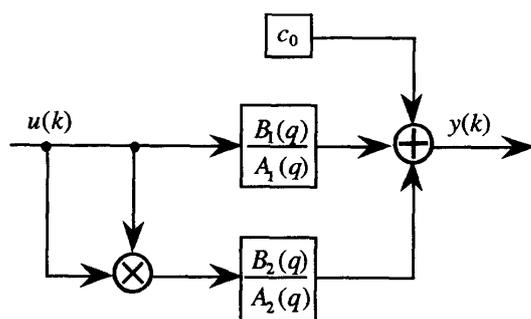


図5.4 一般化 Hammerstein モデル

$$y(k) = c_0 + \frac{B_1(q)}{A_1(q)} u(k) + \frac{B_2(q)}{A_2(q)} u^2(k) \quad (5.26)$$

ただし、 $A_1(q)$ 、 $B_1(q)$ 、 $A_2(q)$ 、 $B_2(q)$ はシフトオペレータの多項式である。

さて、 $A_1(q) = A_2(q) = \dots = A_n(q) = A(q)$ として雑音項を加えると、 n 次線形性を有する一般化 Hammerstein モデルは、次式で与えられる。

$$A(q)y(k) = B_1(q)u(k) + B_2(q)u^2(k) + \dots + B_n(q)u^n(k) + C(q)e(k) \quad (5.30)$$

ここで、 $\{e(\cdot)\}$ は正規性白色雑音であり、簡単のため(5.29)式の c_0 は 0 とおいた。(5.30)式において入力の高次非線形項を無視すると、(5.28)式で与えた ARMAX モデルに一致することに注意しよう。このように、(5.30)式で記述される一般化 Hammerstein モデルは、NARMAX モデルの特殊な場合とみなせる。

(d) 制御系のための非線形モデル

これまで非線形モデルのいくつかを紹介したが、制御系設計を目的とした立場から、非線形モデルに望まれる性質を列挙してみよう。

- できるだけパラメータの少ないモデルがよい。
- パラメータ推定の簡単なモデルがよい。
- 構造同定が簡単なモデルが有利。
- 静的非線形性または線形動的モデルとの関係を示すモデルの方が望ましい。

以上に示した観点から、Haber らは非線形モデルのランク付けを行った⁵²⁾。その結果を表5.1に示す。No. 1にランク付けされた NARMAX モデルについて解説することが、本項の目的である。

さて、非線形システムの挙動を正確にモデリングすることが目的であれば、ボルネラ級数モデルや GMDH のように多くのパラメータをもつモデルを利用すべきである。すなわち、対象の複雑さに応じてモデルを複雑にしていけば、パラメータ設定の自由度が増すので、モデルの精度は向上する⁵⁹⁾。モデルを構築

表5.1 制御のための非線形モデルのランク

ランク	モデル
1	パラメータに関して線形なモデル(NARMAX)
2	信号依存パラメータを有する準線形モデル
3	カスケードモデル
4	階層モデル(GMDH)
5	ブロック指向モデル
6	ボルネラ、ウィナー級数モデル

する目的が、対象を解析するだけならこのような方法を用いればよいが、制御系設計を目的として非線形システム同定を行う場合には、いたずらにパラメータ数を増やすことは得策ではない。このような観点から、NARMAX モデルは制御系設計に適したモデルであるといえる。

5.2.2 NARMAX モデルを用いた非線形システムの記述

1 入力 1 出力離散時間不変システム

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(k), u(k)), & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y(k) = h(\mathbf{x}(k), u(k)) \end{cases} \quad (5.31)$$

を考える。ただし、 $u(k)$ は入力、 $y(k)$ は出力、 $\mathbf{x}(k)$ は状態ベクトル、 $\mathbf{g}(\cdot)$ は 1 段先状態遷移関数、そして $h(\cdot)$ は出力関数である。

(5.31)式の状態方程式で記述されたシステムの内部記述を、入出力関係という外部記述に変換したものが NARMAX モデルであり、雑音を考慮しない場合、

$$y(k) = F_*^l[y(k-1), \dots, y(k-n_y), u(k-1), \dots, u(k-n_u)] \quad (5.32)$$

で与えられる⁵⁸⁾。ここで、 $F_*^l[\cdot]$ はある非線形関数であり、 l は非線形性の次数を表す。このとき、詳細は省略するが、2つの十分条件

- システムの応答関数 f は有限実現である。
- システムが選ばれた平衡点近傍で動作しているならば、線形化モデルが存在する。

が満たされると、非線形離散時間不変システムは、平衡点近傍においてつねに (5.32)式の NARMAX モデルで記述できる。ここで、条件(a)は、分布定数系を除外することを意味し、条件(b)はシステムが平衡点近傍の線形領域において、小振幅が摂動されているならば、システムの線形化モデルが存在することを意味している。理解を深めるために、NARMAX モデルの例を以下に示そう。

【例題 5.2】 状態方程式

$$\begin{cases} x(k+1) = x(k) + u(k), & x(0) = x_0 \\ y(k) = x(k) + x^2(k) \end{cases} \quad (5.33)$$

で記述されるシステムを考える。このシステムの平衡点は原点であり、次式が得られる。

$$y(k) = x_0 + \sum_{i=1}^{k-1} u(i) + \left(x_0 + \sum_{i=1}^{k-1} u(i) \right)^2 \quad (5.34)$$

このシステムを記述できる NARMAX モデルは、

$$(i) \quad x(k) = x_0 + \sum_{i=1}^{k-1} u(i) > -0.5 \text{ のとき,}$$

$$y(k+1) = y(k) + u(k) \sqrt{1 + 4y(k) + u^2(k)} \quad (5.35a)$$

$$(ii) \quad x(k) = x_0 + \sum_{i=1}^{k-1} u(i) \leq -0.5 \text{ のとき,}$$

$$y(k+1) = y(k) - u(k) \sqrt{1 + 4y(k) + u^2(k)} \quad (5.35b)$$

となり、初期値依存の NARMAX モデルが得られる。

【例題 5.3】 状態方程式

$$\begin{cases} x(k+1) = x(k) + u(k), & x(0) = x_0 \\ y(k) = \exp(-x(k)) \end{cases} \quad (5.36)$$

で記述される非線形システムを考える。簡単な計算により、このシステムの入出力モデルは、

$$y(k+1) = y(k) \exp(-u(k)) \quad (5.37)$$

となり、初期値に関わらず大局的に成り立つ。□

これらの例題のほかにも、いくつかの有名な非線形入出力モデルは、NARMAX モデルの特殊例とみなすことができる。たとえば、離散時間双線形モデル

$$\begin{aligned} y(k) = & a_0 + \sum_{i=1}^{n_y} a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^{n_u} b_i u(k-i) \\ & + \sum_{i=1}^{n_y} \sum_{j=1}^{n_u} c_{ij} y(k-i) u(k-j) \end{aligned} \quad (5.38)$$

も NARMAX モデルに含まれる。

さて、(5.32)式で与えたシステムの出力 $y(k)$ に平均値 0 の雑音 $w(k)$ が加わると仮定する。すなわち、

$$z(k) = y(k) + w(k) \quad (5.39)$$

とすると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} z(k) = & \sum_{i=1}^{n_y} \theta_i \{z(k-i) - w(k-i)\} + \sum_{i=1}^{n_u} \theta_{n_y+i} u(k-i) \\ & + \sum_{i=1}^{n_y} \sum_{j=1}^{n_u} \theta_{ij} \{z(k-i) - w(k-i)\} \cdot \\ & \cdot \{z(k-j) - w(k-j)\} \\ & + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_u} \theta_{i(n_y+j)} \{z(k-i) - w(k-i)\} u(k-j) \\ & + \sum_{i=1}^{n_y} \sum_{j=1}^{n_u} \theta_{(n_y+i)(n_u+j)} u(k-i) u(k-j) + \dots \\ & + w(k) \end{aligned} \quad (5.40)$$

(5.40)式より、たとえ雑音 $\{w(k)\}$ が出力信号に加

法的に混入したとしても、モデル内には乗算の形で現れることに注意する。また、雑音はシステムに含まれる内部変数を汚すかもしれないが、非線形システムなので重ねあわせの理を適用することはできない。したがって、通常、線形システム同定理論で仮定されていた、内部雑音を出力における加法的な雑音に変換することはできないので、(5.40)式をより一般的な形式に書き直す。

$$\begin{aligned} z(k) = & F^T [z(k-1), \dots, z(k-n_y), u(k-1), \dots, \\ & u(k-n_u), w(k), w(k-1), \dots, w(k-n_y)] \end{aligned} \quad (5.41)$$

(5.41)式が NARMAX モデルの一般形である。

5.2.3 非線形システムの離散化

非線形システム理論は、連続時間システムに対して広く研究されているが、システム同定を行うためには一般にシステムを離散化する必要がある。そこでここでは、例題を通して、NARMAX モデルは非線形連続時間システムの自然な離散時間表現であることを示す。

【例題 5.4】 双線形システム理論は、連続時間システムで研究されており、双線形状態空間モデル

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} u(t) + u(t) \mathbf{F} \mathbf{x}(t) \\ y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (5.42)$$

は重要な役割を演じる。なぜならば、双線形システムの集合は、連続時間システムの空間で稠密であり、連続因果的汎関数は、有界な時間区間内の双線形システムによって、任意によく近似可能であるからである。また、実際の連続時間システムの多くは本質的に双線形形式をとる。

ここでは、(5.42)式で与えた連続時間双線形システムをサンプリングすると、NARMAX モデルが得られることを示そう。零次ホルダを用いてサンプリング周期 T で(5.42)式を離散化すると、次式が得られる。

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \exp[\{\mathbf{A} + u(k) \mathbf{F}\} T] \mathbf{x}(k) \\ \quad + \left\{ \int_0^T \exp[\{\mathbf{A} + u(k) \mathbf{F}\} (T-\tau)] \mathbf{b} d\tau \right\} u(k) \\ y(k+1) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(k+1). \end{cases} \quad (5.43)$$

(5.43)式で記述される離散時間状態空間システムを、入出力差分方程式表現に変換すると、

$$\begin{aligned} y(k+1) = & \mathbf{c}^T \cdot \exp[\{\mathbf{A} + u(k) \mathbf{F}\} T] (\mathbf{c} \mathbf{c}^T)^{-1} \mathbf{c} y(k) \\ & + \mathbf{c}^T \left\{ \int_0^T \exp[\{\mathbf{A} + u(k) \mathbf{F}\} \cdot \right. \end{aligned}$$

$$\cdot (T-\tau)]bd\tau \} u(k) \quad (5.44)$$

が得られ、これは NARMAX モデルの形式とする。ここで、(5.44)式は(5.37)式で与えた離散時間双線形モデルより複雑な形式をしていることに注意する。

5.2.4 NARMAX モデルのパラメータ推定

NARMAX モデルのパラメータ推定を行う前に、同定モデルの構造を決定する、いわゆる構造同定を行う必要がある。もっとも単純な構造同定法は、考えられるすべての構造に対してパラメータ推定を行い、そしてある評価規範の値を計算して、それらを比較する方法がある。モデルの構造決定のための評価規範としては、Mallow の C_p 統計量、AIC (赤池情報量規範)、BIC (Bayesian 情報量規範) などが有名であるが、詳細は文献52)を参考にしていきたい。

さて、システムが非線形の場合には、一般に(5.41)式を $w(k)$ について解くことができないので、雑音 $w(k)$ と予測誤差 $\varepsilon(k)$ は等しくならない。(5.41)式を予測誤差モデルの形式に書き直すと、

$$z(k) = F^T[z(k-1), \dots, z(k-n_y), u(k-1), \dots, u(k-n_u), \varepsilon(k-1), \dots, \varepsilon(k-n_y)] + \varepsilon(k) \quad (5.45)$$

が得られる。ただし、

$$\begin{aligned} \varepsilon(k) &= z(k) - \hat{z}(k) \\ E[\varepsilon(k) | z(k-1), z(k-2), \dots, u(k-1), \\ &u(k-2), \dots] = 0 \end{aligned}$$

(5.45)式を展開して整理すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} z(k) &= G^{zu}[z(k-1), \dots, z(k-n_y), u(k-1), \dots, \\ &u(k-n_u)] + G^{ze}[z(k-1), \dots, \\ &z(k-n_y), u(k-1), \dots, u(k-n_u), \\ &\varepsilon(k-1), \dots, \varepsilon(k-n_y)] \\ &+ G^e[\varepsilon(k-1), \dots, \varepsilon(k-n_y)] \varepsilon(k) \quad (5.46) \end{aligned}$$

未知パラメータを分離すると、

$$\begin{aligned} z(k) &= [\Psi_{zu}^T(k) \Psi_{ze}^T(k) \Psi_e^T(k)] \begin{bmatrix} \theta_{zu} \\ \theta_{ze} \\ \theta_e \end{bmatrix} + \varepsilon(k) \\ &= \Psi^T(k) \theta + \varepsilon(k) \quad (5.47) \end{aligned}$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} G^{zu}[\cdot] &= \Psi_{zu}^T(k) \theta_{zu}, \quad G^{ze}[\cdot] = \Psi_{ze}^T(k) \theta_{ze}, \\ G^e[\cdot] &= \Psi_e^T(k) \theta_e \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} \Psi(k) &= [\Psi_{zu}^T(k), \Psi_{ze}^T(k), \Psi_e^T(k)]^T, \\ \theta &= [\theta_{zu}^T, \theta_{ze}^T, \theta_e^T] \end{aligned}$$

とおいた。(5.47)式は第2章で述べたように最小2乗法の基本式であるので、未知パラメータ θ を推定する

ことは可能になる。しかし、前述したように予測誤差は一般に白色性にはならないので、最小2乗法を直接適用すると、推定値にバイアスが生じてしまう。たとえば、この問題点を緩和するためには、2.3.2項でアルゴリズムを与えた ELS 法を利用すればよい。

5.2.5 同定入力を選定

線形システム同定の場合と同様に、非線形システム同定においても、入力信号の選定は同定結果に大きく影響する。線形システム同定の場合には、対象システムのすべてのモードを励起する入力信号を利用しなくてはならないという、いわゆる PE 性の条件を満たす入力を利用することが必要であった。したがって、線形システム同定においては、白色性信号は望ましい信号であることが知られている²⁷⁾。しかし、実際には人為的にランダム信号を生成する場合が多く、その中でも二値信号系列である M 系列信号が、利用されることが多い。

非線形システム同定においても、入力信号はシステムのすべてのモードを励起することが必要であるが、さらに、着目する振幅のすべても励起するように選ばれなくてはならない。この点が、線形システム同定とは異なる点である。すなわち、M 系列信号では、正と負の二値しかとらないため、その二点の振幅レベルのみでしか、対象の非線形特性を同定することができない。

また、線形システム同定の場合、正規性入力信号が利用されることが多かったが、以上のような観点から非線形システム同定の場合には、正規性入力は必ずしも適切な入力ではない。平均値近傍の特性が最も重ね付けられて同定されるからである。したがって、非線形システム同定の場合、理想的な入力は着目する振幅の範囲全体にわたって平坦な確率密度関数をもつ一様分布信号であるという報告もある⁶⁰⁾。

5.2.6 ニューラルネットワークを用いた非線形システムの同定

理論的には未解決な部分は多いが、ニューラルネットワーク (以下 NN と略記) を用いた非線形システムの同定⁶¹⁾は、いろいろな分野で非常に期待されている。この方法は、フォワードモデリングと逆モデリングとに分けられるが、ここでは前者について簡単に紹介しよう。

システムの前向きダイナミクスを記述する NN を構成する手順をフォワードモデリングといい、(図5.5に示した)、これはわれわれがこれまでに考察してきた通常のシステム同定のことである。図に示したよう

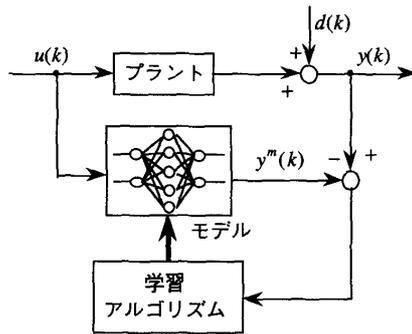


図5.5 ニューラルネットワークを用いたシステム同定

に、NN モデルはプラントと並列に配置されており、プラントとNNとの差、すなわち、予測誤差はNNのトレーニング信号として用いられる。したがって、これは教師付き学習であり、たとえば多層パーセプトロンネットワークの場合、予測誤差をバックプロパゲーションアルゴリズムによって行うことができる。

制御の立場では、システムの動特性が必要になる。そのためには、NN自体にダイナミクスを導入する必要があり、これはリカレントネットワークを用いること、あるいはニューロンに動的な挙動を導入することにより達成できる。

ここでは、プラントは(5.32)式の NARMAX モデル

$$y(k) = F[y(k-1), \dots, y(k-n), u(k-1), \dots, u(k-n)] \quad (5.48)$$

によって記述できると仮定する。ここでは簡単のため、雑音は考慮しない。また、NNの構造は、プラントと同一と仮定する。すなわち、NNモデルの出力を $y_m(k)$ とすると、次式が得られる。

$$y_m(k) = \hat{F}[y(k-1), \dots, y(k-n), u(k-1), \dots, u(k-n)] \quad (5.49)$$

ただし、 \hat{F} は F の近似であり、NNによる非線形入力出力写像を表わす。この期間はトレーニング期間と呼ばれ、(5.49)式よりNNの入力としてプラントの過去の出力を含んでいるので、NNはフィードバック機構を有していないことに注意する。

適当なトレーニング期間の後、NNはプラントの良い近似を与える、すなわち、 $y_m(k) \approx y(k)$ と仮定すると、ネットワーク出力をフィードバックすることができ、それをネットワーク入力として利用できる。このように、ネットワークをプラントと独立に利用でき、このときのネットワークモデルは、次式で記述できる。

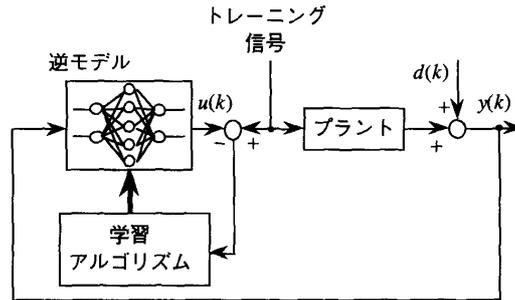


図5.6 ニューラルネットワークを用いた逆システムの同定

$$y_m(k) = \hat{F}[y_m(k-1), \dots, y_m(k-n), u(k-1), \dots, u(k-n)] \quad (5.50)$$

説明は省略するが、図5.6に逆システムの同定を示した。ロボットなどはNNによる逆システムの同定結果を利用して、制御系設計を行う方法が提案されている。しかしながら、一般にNNによる同定結果は非常にパラメータ数が多いモデルとなるため、同定結果の制御系設計への利用法に関する検討は、今後の課題であろう。

6. むすび

本講座では、4回に渡ってシステム同定の基礎から最近の話題までについて解説した。

ロボаст制御系設計の発展に伴い、今まで以上に高い水準のシステム同定技術が要求され、しかもシステム同定の重要性が改めて認識されてきている。システム同定を利用あるいは研究する技術者、研究者たちにとって少しでも本講座が助けになればと思う。

参考文献

- 49) J. P. Norton: An Introduction to Identification, Academic Press (1986)
- 50) F. Hansen and G. Franklin, "On a fractional representation approach to closed-loop experiment design," Proc. of ACC, 1319/1320, Atlanta (1988)
- 51) 足立, 石島, "使える (!?) 非線形制御の理論-IV - 非線形システムのモデリングと同定", システム/制御/情報, 37-8, 497/504 (1993)
- 52) R. Haber and H. Unbehauen, "Structure identification of nonlinear dynamic system-A survey on input output approaches," Automatica, 26-4, 651/677 (1990)
- 53) 相良, 沖田, "非線形システムの同定と推定, 計測と制御", 26-9, 793/800 (1987)
- 54) S. A. Billings, "Identification of non-linear systems-A survey", IEE Proc., 127, Pt. D, 6, 272/285 (1980)
- 55) 横山, 渡辺, "ボルテラ級数と実現問題", 計測と制御, 31-8, 865-871 (1992)

- 56) 足立, “非線形システムのモデリングと同定”, 計測自動制御学会基礎講習会-非線形制御の可能性と魅力-資料, 91/106 (1993)
- 57) I. J. Leontaritis and S. A. Billings, “Input-output parametric models for non-linear systems, Part I, Part II”, Int. J. Control, 41-2, 303/328, 329/344 (1985)
- 58) S. Chen and S. A. Billings, “Representation of non-linear systems: The NARMAX model”, Int. J. Control, 49-3, 1013/1032 (1989)
- 59) 木村, “不確かさ工学の提案”, 日本フuzzy学会誌, 4-4, 656/663 (1992)
- 60) S. A. Billings and W. S. F. Voon, “Least squares estimation algorithms for non-linear systems”, Int. J. System Sci., 15-6, 601/615 (1984)
- 61) K. J. Hunt, et al., “Neural networks for control systems-A survey”, Automatica, 28-6, 1083/1112 (1992)
-