《論　文》

論 12-13

有限要素における電磁力計算の外挿法による精度向上†

村山健一*・加川幸雄**

ABSTRACT　This paper discusses the extrapolation approach to the electromagnetic flux and force calculation by the finite element method. We confine ourselves to 2-dimensional magnetic field analysis, for which the vector potential is chosen as an unknown variable. The magnetic force cannot be obtained directly from the potential but from the magnetic flux or the derivative of the vector potential. Examination is made for the validity of the use of the extrapolation which improves the accuracy of the electoromagnetic force evaluation. The capability and the limitation of the approach are discussed for the use of the first order triangular elements.

1. まえがき

今日，電磁アクチュエータなど電磁力を利用する電子機器の開発にあたっては，設計段階からあらかじめその電磁力を正確に予想できることが望まれる．これらは，従来から磁気回路等による近似計算で対応されてきたが，有限要素法に代表される数値解析技術が積極的に取り入れられるようになった．しかし，現場では磁束密度や電磁力の算定がパソコン並みの計算機で効率よく行える解析法が求められている．近年は領域の境界だけを扱うことのできる境界要素法がパソコン向きといわれている．たしかに記憶領域は節約できるが，離散化されたマトリックスが帯状にならないため，次数が小さくても有限要素法よりも計算時間が長くかかることが多い．さらに何よりも非線形向きではない．そのため，非線形磁界計算では有限要素法が好まれる．

有限要素法による磁界解析では，通常ベクトルポテンシャルを未知変数として解くため，電磁力計算に必要な磁束密度はその微分値となることから，1次要素を用いた場合は，要素内で一定値となり計算精度が低下する．計算精度を上げるためには2次以上の高次要素を用いるのが効果的であろうが，磁性材の磁気特性が非線形であるため，取扱の容易さから一般には1次要素が広く用いられている．そのため，計算精度を向上させるためには何らかの工夫が必要となる．一般に静磁界解析においては，(i)要素の細分割による方法，(ii)2次以上の高次要素を用いる方法，(iii)磁束密度を未知変数とする方法[1]，(iv)双対相補法による方法[2),3]，(v)外挿法による方法[4]，などの手法が考えられている．(i)は最も一般的な手法で，全体を単純に細分割する方法などのほか，局所的な再分割や計算結果を用いて最適自動分割を行う方法などが多く使われている[5),6]．(ii)は線形問題では最適自動分割に積極的に利用されつつあるが，磁界解析のような非線形問題には適さない[7]．(iii)は直接磁束密度を未知変数として解く方法であるが，(ii)と同様，非線形問題では取扱いが複雑である．(iv)は変分原理の定式化における上限，下限の平均による方法であるが，同一境界条件の与えかたなどの点で取扱いに難点がある[8]．(v)は *Richardson* の外挿法とも呼ばれている方法で，数値積分，数値微分および微分方程式の数値解法において，計算回数を少なくして，かつ，計算精度を向上させる方法として広く用いられている．この方法は，従来から有限要素法にも利用されており，電気電子分野では心電図逆問題[9]や導波路の固有値問題[10]への適用も試みられている．

本論文では，この外挿法を2次元静磁界問題に適用し[11]，ベクトルポテンシャル，磁束密度および電磁力の分割と精度の関係について数値実験により考察したものである．

2. 有限要素磁界解析の誤差

有限要素法における誤差の原因は，(i)離散化誤差，

Accuracy Improvement of Electromagnetic Force Calculation by Extrapolation Approach in Finite Element Analysis. By *Ken-ichi Murayama* (Nagaoka Technical Highscool) and *Yukio Kagawa* (Faculty of Engineering, University of Okayama).
*長岡工業高校
**岡山大学工学部
†1993年2月5日受付　1993年3月12日再受付

(ii)数値演算誤差，(iii)境界条件による誤差，などが考えられる．そのほか，磁界問題のような非線形問題では，非線形特性の近似によるものや，電磁力のように微係数の算出に際して生ずる誤差も考えられる．しかし，有限要素解析においては(i)の離散化誤差が最も大きな問題であろう．

以下，ベクトルポテンシャルを未知変数とする2次元静磁界解析における誤差を考察の対象とする．

2次元場の三角形要素の i 点のポテンシャルを u_i とし，i 点を原点に定めると，任意の点のポテンシャル u は，原点のまわりの Taylor 級数で表せる[4]．すなわち，

$$u=u_i+\frac{1}{1!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)u+\frac{1}{2!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u+\frac{1}{3!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 u+\cdots \quad (1)$$

で与えられる．要素内挿関数を1次に選んだ場合，(1)式の右辺第3項以降は無視されるので，誤差は主として右辺第3項となるため，誤差の大きさは $O(h^2)$ となる．ここで h は三角形要素の代表的要素寸法で，本論文では最長辺としている．また，要素内磁束密度は u の微分値 v となるため，誤差のオーダーは1次低下する．一般に，内挿関数を p 次とすると，ポテンシャルの誤差は $O(h^{p+1})$，エネルギーの誤差は $O(h^{2p})$ となることが知られている．

ところで，磁束密度は，1次三角形要素では要素内一定値として得られるが，節点での値は必ずしも明確ではない．したがって，要素辺上を積分路とする Maxwell の応力法による電磁力の計算には都合が悪い．多くは節点を含む要素の磁束密度を平均して求めている．これは応力問題で，ひずみの高精度化手法として知られている節点平均法[12]と同様と考えられる．以下，節点平均法を磁束密度計算に適用してみる．

図1において，原点 i に対して点対称な2つの1次三角形要素 p, q を考える．要素 p における磁束密度 B_{xp}, B_{yp} は，節点ポテンシャル u_i, u_j, u_k を用いて

$$B_{xp}=\frac{1}{2\Delta_p}(C_1u_i+C_2u_j+C_3u_k) \quad (2)$$

$$B_{yp}=-\frac{1}{2\Delta_p}(b_1u_i+b_2u_j+b_3u_k) \quad (3)$$

ここで，Δ_p は要素の面積，

$b_1=y_j-y_k,\ b_2=y_k-y_i,\ b_3=y_i-y_j$

$c_1=x_k-x_j,\ c_2=x_i-x_k,\ c_3=x_j-x_i$

であるから，(2)，(3)式は

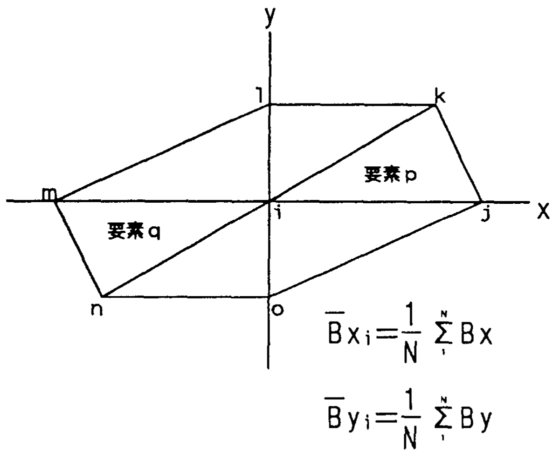


図1 節点平均

$$B_{xp}=\frac{1}{x_jy_k}\{(u_k-u_i)x_j-(u_j-u_i)x_k\} \quad (4)$$

$$B_{yp}=-\frac{1}{x_jy_k}(u_j-u_i)y_k \quad (5)$$

原点 i の回りに Taylor 展開し，$O(h^2)$ の誤差を許すと，(4)，(5)式は，それぞれ

$$B_{xp}=\frac{x_k}{y_k}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{x_k}{2},\frac{y_k}{2}\right)-\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{x_j}{2},0\right)\right\}+\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{x_k}{2},\frac{y_k}{2}\right)+O(h^2) \quad (6)$$

$$B_{yp}=-\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{x_j}{2},0\right)+O(h^2) \quad (7)$$

原点 i に点対称な要素 q に対して，同様に磁束密度 B_{xq}, B_{yq} を求めると，結局，平均値 B_x, B_y は原点における値として次のようになる．

$$B_x=\frac{B_{xp}+B_{xq}}{2}=\frac{\partial u}{\partial y}(0,0)+O(h^2) \quad (8)$$

$$B_y=\frac{B_{yp}+B_{yq}}{2}=-\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)+O(h^2) \quad (9)$$

このように，1節点を共有する要素が，その節点に関して点対称であるとき，磁束密度の平均値における誤差は $O(h^2)$ となる．

電磁力の計算方法には，エネルギー変位法や Maxwell の応力法などが用いられる．1次三角形要素を用いる場合，エネルギー変位法では磁気エネルギーの誤差が $O(h^2)$ であるから，その微分値で与えられる電磁力の誤差は $O(h)$ となる．これに対し，Maxwell の応力法は，上記の考察により，積分路の節点での誤差が $O(h^2)$ となるため，エネルギー変位法に比べて計算精度の向上が期待できる．

3. 外挿法の適用

外挿法は三角形1次要素の場合，ポテンシャル誤差が $O(h^2)$ であることから，要素寸法を1/2にすると誤差が約1/4になるという関係を用いて真値を推定するものである．(1)式より，要素寸法 h のときの解（ポテンシャル）を $u^{(1)}$, $h/2$ のときの解を $u^{(2)}$ とすると，真の解 u は

$$u \approx u^{(1)} + ah^2 \approx u^{(2)} + a\left(\frac{h}{2}\right)^2 \tag{10}$$

ここで，a は比例定数である．これを消去すると

$$u \approx \frac{1}{3}\left(4u^{(2)} - u^{(1)}\right) \tag{11}$$

要素内磁束密度 v については，誤差のオーダーが1次低下し

$$v \approx v^{(1)} + bh \approx v^{(2)} + b\frac{h}{2} \tag{12}$$

したがって，比例定数 b を消去すると

$$v \approx 2v^{(2)} - v^{(1)} \tag{13}$$

節点磁束密度は**2.** の考察より誤差のオーダーは低下せず(11)式が適用できる．

外挿法は，要素寸法 h と $h/2$ の要素分割で得られた結果に適用するわけであるが，なんらかの工夫をしなければ，要素寸法を $h/2$ にした再分割で生じる新たな節点の計算精度を向上することはできない．ここでは，外挿法によって得られた節点値から，再分割によって新たに生じた節点に線形補間式を適用してその値を修正する．すなわち，**図2**に示すように，要素寸法 $h/2$ の節点ポテンシャルを u_i, u_j, 外挿法によって得られた値を u_i', u_j' とすると，中間節点ポテンシャルの修正値 Δu_{ij} は

$$\Delta u_{ij} = \frac{u_{ij} - u_j}{u_i - u_j}\Delta u_i + \frac{u_{ij} - u_i}{u_j - u_i}\Delta u_j \tag{14}$$

ここで，$\Delta u_i = u_i' - u_i$, $\Delta u_j = u_j' - u_j$ とする．Maxwell の応力法では，磁束密度にこれを適用した結果から電磁力を求めることができる．

4. 計算例と外挿法の適用

4.1 解析解との比較（平行導線対）

ベクトルポテンシャルのみならず磁束密度，電磁力の解析解が得られる2次元線形モデルとして，**図3**に示す平行導線対について検討する．ここでは互いの導線に反発力が働くように電流を流すものとする．したがって，y 軸上（中心軸）でベクトルポテンシャルがゼロとなる．解析領域は対称性から領域の1/4だけとし，原点から x, y 方向に d（線間距離）に境界を設けた．

まず，最初に仮想境界 Γ を解析解で得られるベクトルポテンシャルを固定境界として有限要素法を適用して，ベクトルポテンシャルと磁束密度（大きさ）および磁気エネルギーの誤差を調べた．要素分割数 N は x, y 方向にそれぞれ $N=6$, 12, 24, 48の等分割とした．誤差を調べた点は，導線真上 y 方向と導線周囲で，その結果が**図4**に示されている．図4(a)は導線真上方向 $y=d/2$ の1点の誤差を分割を変えて調べたものである．これよりベクトルポテンシャル，節点磁束密度および磁気エネルギーの誤差は $O(h^2)$，また，要素中心の磁束密度の誤差は $O(h)$ であることがわかる．図4(b)はそれぞれの要素分割ごとに導線真上方向の距離とベクトルポテンシャル，磁束密度の誤差を調べたものである．図4(c)は導対周辺にとられた電磁力計算路の平均誤差をそれぞれの要素分割ごとに調べたものである．これより導線近傍を除き，ベクトルポテンシャルと磁束密度の誤差がほぼ $O(h^2)$ となるが，導体近傍では誤差が大きくなることがわかる．したがって，外挿法の適用による効果が期待できる範囲がわかる．

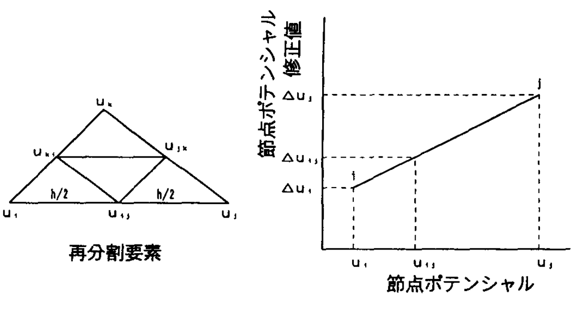


図2 中間節点のポテンシャル

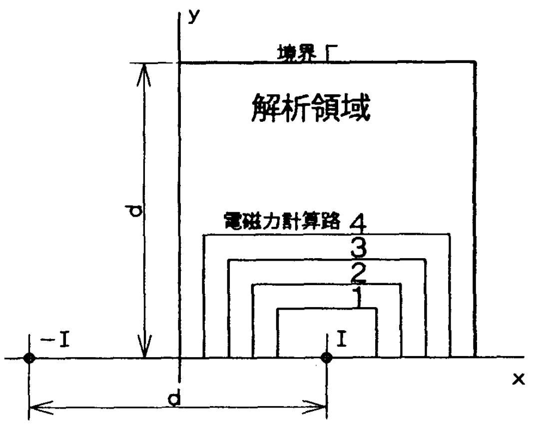
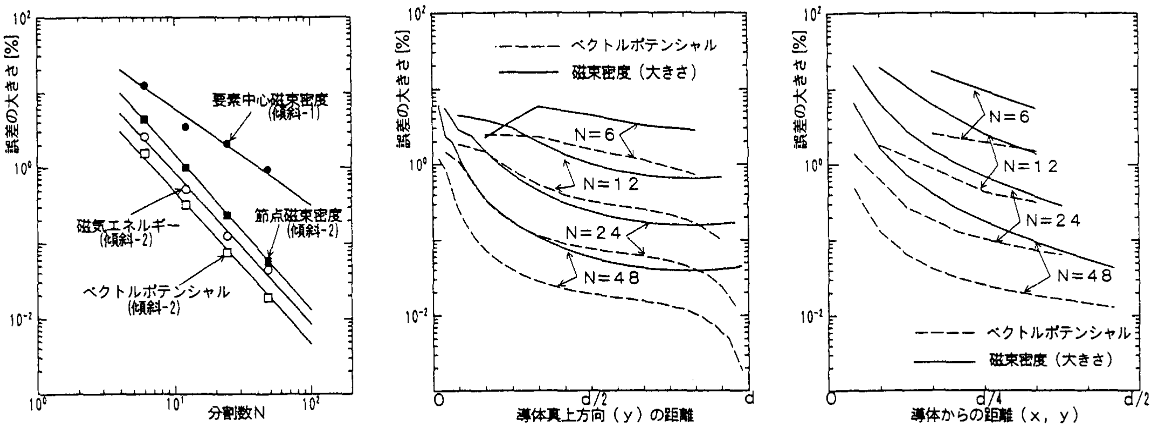
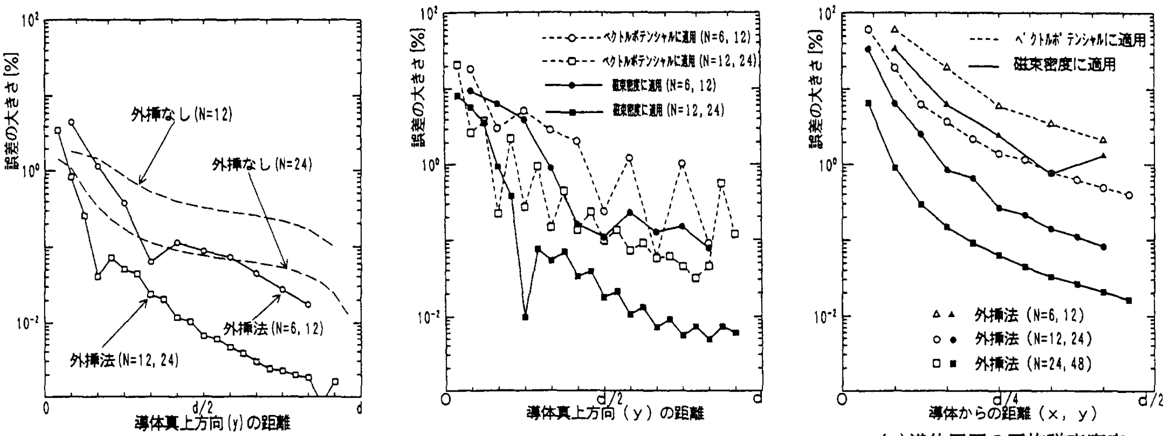


図3 平行導線対の解析領域



(a)分割数と誤差(x,y=d/2)　(b)導体真上方向の誤差　(c)導体周囲の平均誤差

図 4　平行導線対のベクトルポテンシャルと磁束密度（大きさ）の誤差



(a)導体真上方向のベクトルポテンシャル　(b)導体真上方向の磁束密度　(c)導体周囲の平均磁束密度

図 5　外挿法による誤差

図 5 (a)は導線真上方向のベクトルポテンシャルと磁束密度に外挿法を適用した結果である．ベクトルポテンシャルは導体近傍を除き計算精度は大きく改善され，要素分割数$N=6$と$N=12$への外挿法適用で$N=24$に相当する結果が得られている．磁束密度では，外挿法を直接磁束密度のx, y成分に適用する方法，ベクトルポテンシャルに外挿法を適用し，それから磁束密度を求める方法の2つが考えられる．図5(b)にはこれらの適用結果が示されており，直接磁束密度に適用したほうが良い結果となっている．図5(c)は導体周囲のベクトルポテンシャルと磁束密度に適用した結果である．この場合も(b)図と同様な結果となった．

このようにして，有限要素計算により，ベクトルポテンシャル，磁束密度が求められ，さらに磁束密度からMaxwellの応力法により電磁力が得られる．電磁力の計算精度を上げるために外挿法を適用する方法として，(i)ベクトルポテンシャルに適用する，(ii)磁束密度のx, y成分に適用する，(iii)電磁力にそのまま適用する，の3つが考えられる．**表 1** は図3の計算路で求められた電磁力の誤差である．この結果より，ベクトルポテンシャルへの外挿法の適用は，磁束密度のみならず電磁力の計算精度改善効果も小さいことが示された．これに対して磁束密度に外挿法を適用すると，ほぼ要素寸法が1/2の細分割に相当する結果が得られている．また，電磁力に適用すると，磁束密度へ適用したものに比べ効果がさらに大きくなっている．

ここで取り扱っている計算モデルは，開領域問題であるため，実際は無限領域の付加[15]を行うなどの適当な終端処理をすることが望ましい．**表 2** は自然境界および無限要素を付加した場合の誤差である．自然境界では分割を細かくしても85％前後の誤差になるが，無

表 1　平行導線対間の電磁力計算誤差

誤差の大きさ [%]

外挿法		外挿なし				ベクトルポテンシャルに適用		磁束密度に適用		電磁力に適用	
要素分割数		N=6	N=12	N=24	N=48	N=6, 12	N=12, 24	N=6, 12	N=12, 24	N=6, 12	N=12, 24
計算路	1	17.1	7.50	1.65	0.383	3.11	0.832	0.649	0.547	4.30	0.294
	2	——	2.71	0.623	0.155	——	0.164	——	0.0483	——	0.0720
	3	5.66	1.42	0.348	0.0875	0.136	0.0168	0.0641	0.0897	0.00126	0.00755
	4	——	0.912	0.232	0.0583	——	0.142	——	0.105	——	0.00528

表 2　境界条件が異なることによる電磁力計算誤差

誤差の大きさ [%]

外挿法		外挿なし						磁束密度に適用		電磁力に適用	
境界条件		自然境界			無限要素終端			無限要素終端		無限要素終端	
要素分割数		N=6	N=12	N=24	N=6	N=12	N=24	N=6, 12	N=12, 24	N=6, 12	N=12, 24
計算路	1	61.1	76.8	83.3	17.6	8.49	2.76	0.544	0.590	5.44	0.845
	2	——	81.9	84.6	——	3.68	1.72	——	1.18	——	1.07
	3	78.3	83.6	85.0	6.12	2.37	1.44	1.18	1.22	1.12	1.13
	4	——	84.2	85.1	——	1.85	1.32	——	1.23	——	1.14

表 3　局所再分割，局所解析による電磁力計算誤差

誤差の大きさ [%]

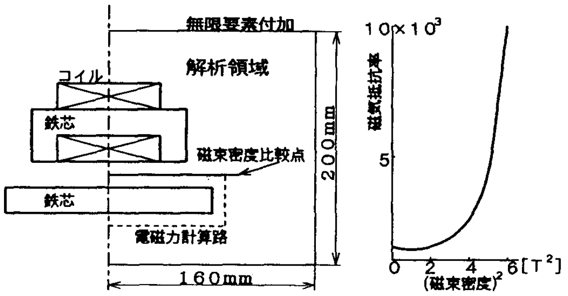
要素分割法		局所再分割			局所解析 (電流源を含む)			局所解析 (電流源なし)		
外挿法		外挿なし	磁束密度に適用	電磁力に適用	外挿なし	磁束密度に適用	電磁力に適用	外挿なし	磁束密度に適用	電磁力に適用
計算路	1	19.7	19.0	23.7	1.72	0.455	0.202	1.80	1.56	4.90
	2	0.713	0.0109	0.0484	0.692	0.141	0.0210	3.67	3.58	3.90
	3	0.346	0.0872	0.00925	0.422	0.187	0.0919	1.26	1.20	1.20

限要素の場合は1%前後の誤差になっている．この場合も外挿法の効果は大きく，粗い2つの分割で細分割に相当する結果が得られている．なお，これらの誤差は周囲境界を広くすればさらに小さくなって行く．

表 3 は部分的な再分割（本論文では局所再分割と呼ぶ）と局所解析[16]について誤差を調べたものである．有限要素解析は分割数 $N=12$ の電磁力計算路内部の局所再分割，および，局所解析（電流源を含まない場合，電流源を含む場合）について行った．その結果，電流源を含まない局所解析は，外挿法を適用しない場合でも，導線近傍を除き誤差の改善が見られず，したがって外挿法を適用しても計算精度は向上しないばかりか，かえって低下している．電流源を含むように取れば，局所再分割，局所解析のどちらでも，境界近傍を除き，全領域一様細分割とほぼ同様に計算精度の改善が見られ，したがって，外挿法による効果も大きい．なお，局所再分割の計算路1の大きな誤差は，要素分割の不均一によるものと考えられる．

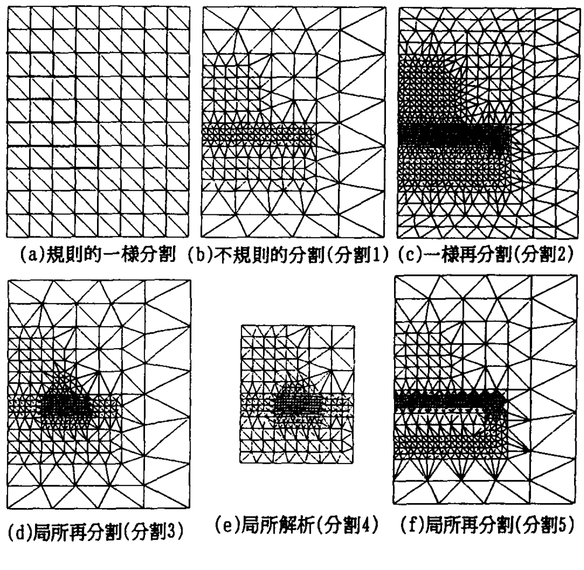
4.2　非線形問題（電磁石）

ここでは **4.1** の計算結果をふまえて，非線形媒質を含む2次元静磁界問題に外挿法を適用する．解析モデルは**図 6** (a)に示す電磁石で，解析領域は対称性を利用して1/2だけとし，周囲に無限要素を付加する．電磁石に用いる磁性材は図6(b)図に示す非線形特性を持っている．要素分割を**図 7** (a)のように要素寸法が



(a)解析領域　(b)鉄芯磁気特性

図 6　電磁石



(a)規則的一様分割　(b)不規則的分割(分割1)　(c)一様再分割(分割2)

(d)局所再分割(分割3)　(e)局所解析(分割4)　(f)局所再分割(分割5)

図 7　電磁石の要素分割

均一な規則的等分割（x 方向の分割数 $M=8$）と，図7(b)のように磁路とエアギャップ部を細かくした不規則的分割（分割1）について，順次要素寸法を1/2に再分割し，コイル電流を変えて磁束密度および電磁力の比較検討を行った．

表4は，それぞれについて外挿法を適用しない場合と，外挿法を適用した場合の y 方向の電磁力誤差を，規則的分割数 $M=64$に対する誤差として調べた結果である．これより，外挿法を適用しない場合の誤差はほぼ $O(h^2)$なっているが，規則的一様分割の場合，電磁力に適用した場合には改善効果は大きく，磁束密度に適用した場合には小さい．一方，不規則的分割では全領域の要素寸法を1/2にした再分割（分割2），図7(d)に示す磁束密度の高いエアギャップとその近くの鉄芯を再分割した局所再分割（分割3），および，図7(e)に示される局所解析（分割4）では，いずれも外挿法の効果が大きい．表4(a)，(b)の磁束密度への適用による改善効果の差は，**図8**に示すようにエアギャップの磁束密度の計算精度が異なるためである．Maxwellの応力法では磁束密度の2乗から電磁力を求めるため，磁束密度の最も大きい $x=50$ mm 付近の誤差が，図8(b)で示される規則的分割では，外挿法の適用でかえって大きくなり，電磁力の計算精度を低くしている．これに対して，図8(c)の不規則的分割では，外挿法の適用で磁束密度の誤差は小さくなっているので電磁力の誤差は小さい．

図7(f)に示す電磁力計算路近傍だけの局所再分割（分割5）では，再分割による改善効果が小さく，外挿法を適用しても効果がない．

これらのことから，非線形電磁力計算では磁束密度の高いエアギャップだけでなく，その付近の鉄芯も再分割しなければならない．したがって，外挿法を適用するための再分割では，全領域を一様に再分割する必要はなく，計算効率を上げるための局所再分割や局所解析を用いることができる．**表5**は所要メモリと計算時間を調べたもので，最も効率の良い分割4（局所解析）では，規則的分割 $M=64$に対し，メモリ容量で約1/30，計算時間では約1/90となっている．

表4　電磁石の電磁力計算誤差

(a)　規則的等分割

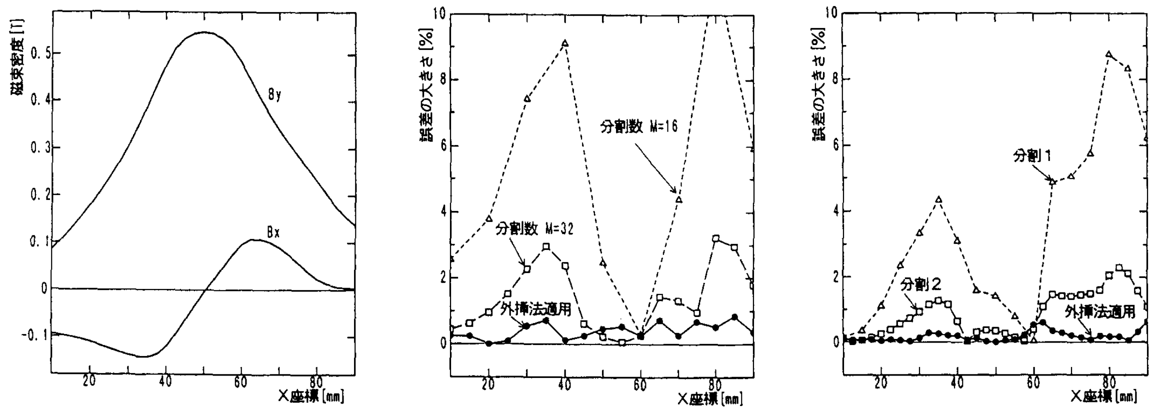
分割M=64に対する誤差の大きさ [%]

外挿法		外挿なし		磁束密度に適用		電磁力に適用	磁束密度の最大値
要素分割数		M=16	M=32	M=8, 16	M=16, 32	M=16, 32	
電流	2.5kAT	10.5	3.07	2.25	1.41	0.603	0.666 [T]
	5.0kAT	10.3	3.03	2.59	1.40	0.591	1.324 [T]
	10 kAT	6.40	1.76	5.60	1.08	0.211	2.308 [T]

(b)　不規則分割

規則的等分割M=64に対する誤差の大きさ [%]

外挿法		外挿なし					磁束密度に適用				電磁力に適用			
要素分割（図7）		分割1	分割2	分割3	分割4	分割5	分割1,2	分割1,3	分割1,4	分割1,5	分割1,2	分割1,3	分割1,4	分割1,5
電流値	2.5kAT	8.31	2.42	2.41	2.38	7.27	0.546	0.533	0.490	6.60	0.456	0.450	0.405	6.31
	5.0kAT	8.18	2.37	2.34	2.30	6.85	0.530	0.490	0.432	6.27	0.438	0.400	0.342	6.15
	10 kAT	3.91	1.10	0.963	1.24	3.73	0.287	0.218	0.134	3.38	0.163	0.415	0.572	3.27



(a)磁束密度分布　(b)規則的等分割の誤差　(c)不規則的分割の誤差

図8　エアーギャップの磁束密度と誤差

表5　所要メモリと計算時間

コイル電流＝10kAT

	要素分割	節点数	要素数	メモリ容量	計算時間＊
規則的	M=16	357	640	30kbyte	33 sec
	M=32	1357	2560	200kbyte	468 sec
	M=64	5265	10240	1500kbyte	7920 sec
不規則的	分割1	203	373	25kbyte	24 sec
	分割2	778	778	170kbyte	290 sec
	分割3	334	635	58kbyte	114 sec
	分割4	294	557	46kbyte	65 sec

＊：使用計算機はEWS (68020+68881, 16MHz)

4.3　節点力計算（平行導体板）

等価的な節点力による電磁力計算[17]の例として，解析解の得られる平行導体板の電磁力計算に外挿法を適用する．この方法ではMaxwellの応力テンソルを用いるが，電磁力を求めるための積分路を決めなくてよい．解析領域は図9に示すように対称性から1/4だけとし，周囲に無限要素を付加する．導体に流れる電流I_1, I_2は大きさと方向を等しくし，導体板の幅aは間隔dの2倍にとってある．要素分割は4.1の平行導線対と同じくx, y方向にそれぞれN＝6, 12, 24, 48とした．

節点電磁力は，有限要素法で得られた磁束密度から求められるが，分割により異なる値となるため，その計算に外挿法は適用できない．しかし，導体全体に作用する力は節点電磁力の総和であるから，それには適用できる．表6は，(11)式を用いて導体部に作用する電磁力の誤差を調べたものである．電磁力の計算誤差はほぼ$O(h^2)$となっている．

5.　む す び

1次三角要素を用いた有限要素法磁界解析において，磁束密度および電磁力の計算精度を向上するために2つの要素分割密度の異なる計算結果に外挿法を適用した結果，次の点が明らかとなった．

(1)　ベクトルポテンシャルそれ自体は外挿法による精度改善の効果は大きいが，これらの値から磁束密度を求めても，磁束密度の誤差の改善効果は小さい．また，磁束密度に基づく電磁力の計算精度向上は，磁束密度や電磁力に適用した場合に比べて小さい．

(2)　1次要素を採用した場合，要素内磁束密度の誤差は$O(h)$であるが，節点平均により$O(h^2)$になることが確認された．したがって，外挿法を適用する補正式はベクトルポテンシャルに適用する式と同一となる．

(3)　再分割によって新たに生じた中間節点に外挿法は適用できないが，両端に適用した結果から線形補間式により補正値を求めることができるので，Maxwellの応力法での計算精度向上に役立つ．

(4)　節点平均による磁束密度の誤差が$O(h^2)$になることから，電磁力の計算はエネルギー変位法によるものよりMaxwellの応力法による方法がすぐれており，その誤差も$O(h^2)$となるので，電磁力計算に直接外挿法を適用することができる．これは，磁束密度に適用してから電磁力を求めるのに比べて改善効果が大きい．

(5)　磁性材を含む非線形問題にも適用できることが数値実験で確かめられた．したがって，大幅な計算時間とメモリの節約が可能である．

(6)　開領域問題で無限要素終端を採用した場合でも，これに外挿法を適用でき，計算精度向上が計られる．

(7)　規則的分割のみならず，初期分割から疎密の異なる実際的な要素分割にも適用できることが確かめられた．また，部分的な再分割や局所解析にも適用可能である．ただし，(4)による電磁力計算積分路近傍の要素の大きさは均一であることが望ましく，また，解析領域内に電流源を含むことも必要である．

(8)　Maxwellの応力テンソルから得られるそれぞれの節点電磁力に外挿法は適用できないが，節点力の総和として得られる電磁力には適用できる．

外挿法は比較的簡単なアルゴリズムであるから，とくにパソコンを利用する場合，小規模の計算で精度の

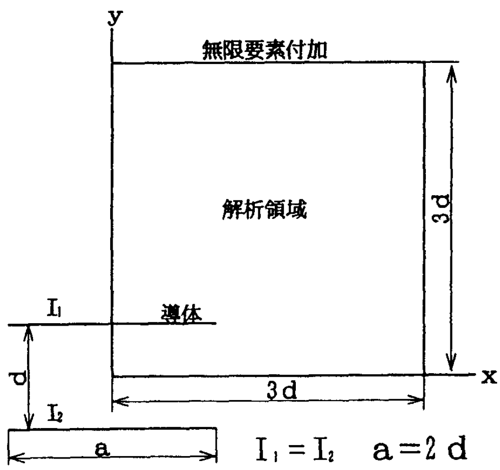


図9　平行導体板の解析領域

表6　平行導体板電磁力計算誤差

誤差の大きさ [%]

要素分割数	N=6	N=12	N=24	N=48
外挿なし	4.48	0.773	0.353	0.123
外挿法（電磁力に適用）	(N=6, 12) 0.585		(N=12, 24) 0.128	——

向上が計られることは，計算効率の点からも有効である．

本論文では，1次三角形要素を用いた2次元静磁界解析問題に対して外挿法の適用を試み，数値実験を通してその有効性を検討した．2次要素などの高次要素では要素内誤差分布が異なるので，1次要素の結論をそのまま適用できない．3次元問題に対しても1次要素を採用する場合に本結論をそのまま適用でき，さらに大幅な計算量の減少が可能となろう．

最後に，本研究を進めるにあたって有益な助言をいただいた富山大学工学部村井忠邦教授に謝意を表わす．

参考文献

1) Z. H. Shaikh, H. Yamashita and E. Nakamae: "A Novel Finite Element Method of Computing Directly Magnetic Flux and its Error Evaluation", Trans. IEE of Japan,106, 314, 42/49 (1986)
2) J. Penman and J. R. Fraser: "Complementary and Dual Energy Finite Element Principles in Magnetostatices", IEEE Trans. MAG-18, 2, 319/324 (1982)
3) J. Penman and M. D. Grieve: "Efficient Calculation of Force in Electromagnetic Devices", IEE Proceeding, 133 (B), 4, 212/216 (1986)
4) R. T. Fenner（加川幸雄訳）：有限要素法の実際，サイエンス社 (1980)
5) 菊池，鳥垣，石井：有限要素法をダイナミックに変えるアダプティブ法とOPTIMESH, NIKKEI MECHANICAL, 72/85 (1986. 4. 21)
6) O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu: "A Simple Error Esitimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis", Int. J. Numer. Methods eng., 24, 337/357 (1987)
7) O. C. Zienkiewicz, J. Z. Zhu and N. G. Gong: "Practical h-p-version Adaptive Analysis Procedures for Finite Element Method", Int. J. Numer. Methods eng., 28, 879/891 (1989)
8) 村山，村井，加川：有限要素法による電磁力の計算精度向上のための二，三の考察，日本シミュレーション学会第9回計算電気・電子工学シンポジウム，95/100 (1988)
9) 村井，加川：h^2-外挿法による心電図逆問題の解像度改善，シミュレーション学会第3回シミュレーションテクノロジーコンファレンス217/220 (1983)
10) 早田，小柴，鈴木：補外法による有限要素解の精密化について，信学論，J68-A, 2, 115/121 (1985)
11) 村山，加川：外挿法による電磁力計算精度の向上，電気学会静止器回転機研究会資料SA-90-42，RM-90-54, 1/8 (1990)
12) 山本，山田：マトリックス構造解析の誤差論，培風館 (1972)
13) 竹山説三：電磁気学現象理論，丸善 (1949)
14) 加川，村山：電気・電子有限要素法，科学技術出版社 (1986)
15) 村山，加川，村井：開領域を含む電界・磁界有限要素法へのパソコンによる対応，シミュレーション，4, 3, 42/48 (1985)
16) E. Nakamae, et al,: "Precise minicomputer finite element analysis of local magnetic fields by iteratively dividing region", J. Appl. Phys., 53, 11, 8369/8371 (1982)
17) S. Hemmi: "Nodal Forces Due to the Maxwell's Stress Tensors in the FEM Analysis", Electromagnetic Forces and Applications, Elsevier Science Publishers B. V. (1992)