《講　座》

有限要素システム〔1〕
有限要素法へのニューロ・ファジィの応用

矢川元基*・吉村　忍**

ABSTRACT The finite element method has progressed dramatically in the last few decades. Nowadays, ordinary engineers and designers need to perform finite element analyses. Requirements for the modern finite element analysis systems are (a) improvement of calculation accuracy, (b) icrease of calculation speed, (c) user-friendliness even for beginners, and (d) extensibility of functions and portability among various computer environments. To meet the above four requirements simultaneously, evolutional computer technologies such as the fuzzy theory and the neural networks seem to play key roles.

This paper reviews some of such attempts. It includes the following three systems, (1) a novel FE modeling system based on the fuzzy theory and the computational geometry and its supporting system, (2) an adaptive control technique of time increment for nonsteady and nonlinear finite element analyses based on the neural network, and (3) a novel structural design system using an automatic design window search algorithm based on the finite element method and the neural network.

1. はじめに

コンピュータの発達は著しく，約3年で速度は1桁向上し，メモリの集積度は4倍に増大すると言われている．シリコン系半導体の集積化はそろそろ限界に近づいているものの，今後も新しい半導体技術や並列処理の採用によりその進展が期待される．一方，ハードウエアに劣らず，OS(Operating System）やコンピュータ言語などのソフトウエア環境の変遷も著しい．このような状況のもとでは，最新のコンピュータを手に入れたとしても，数年すると，その時に要求されるスピードで情報処理を行えないという理由で，これらのコンピュータは役目を終えることになる．

有限要素法[1)]の分野では，いわゆる汎用プログラム(General-Purpose Computer Program）が豊富な解析機能を武器に多数のユーザーを獲得しながら，すでに十数年の長きにわたり広範に利用されている．この事実は，先に述べたようなコンピュータ環境の急激な変化を考えると，驚異的でさえある．これを可能としたのは，開発者側の必死のプログラム改良努力にあったことはもちろんであるが，基本アルゴリズムに大きな変更を要しなかったという事実である．しかし，これも並列計算機という新しい計算機アーキテクチャの登場の前に大きく揺らぎ始めている．並列コンピュータでは，複数のプロセッサが多数の作業を同時並列的に実行する．このため個々のプロセッサの能力がそれほど高くなくとも，プロセッサの台数を増やすことにより，処理の高速化を計ることができる．その半面，すべてのプロセッサを常に効率良く稼働させるためのアルゴリズム（並列アルゴリズム）の開発が必要となる[2)～4)]．しかし，逐次形処理を基本として開発されてきた従来の汎用プログラムに局所的なプログラム修正を施すだけでは，効率的な並列アルゴリズムを導入することは難しく，アルゴリズム全体の変革が求められている．

有限要素法システムに現在要求される項目をまとめると次のようになる．(a)可能な限り解析精度を向上させ（Reality），(b)その計算を可能な限り高速に実行でき（実現象よりも早く（Faster than Real Time)），(c)

Finite Element System〔1〕—Application of Neural Network and Fuzzy Theory to the Finite Element Method. By *Genki Yagawa* (Dept. of Quantum Engineering and Systems Science, Faculty of Engineering, The Univ. of Tokyo) and *Shinobu Yoshimura* (Research into Artifacts, Center for Engineering, The Univ. of Tokyo).
*東京大学工学部システム量子工学科
**東京大学人工物工学研究センター

多くの技術者が特殊な訓練や専門知識なしに利用でき(User Friendliness)，さらに(d)そのような要求を，先に述べたように激しく変化するコンピュータ環境の中で，できるだけ容易に実現する（Portability）ことである．

従来の有限要素法システムにおいては，特に(a)，(b)に係わる計算精度と計算速度の向上に重点を置いた研究がなされ，一方(c)や(d)の視点についてはアルゴリズム化しにくい部分でもあり，人手に頼ることが多く見られた．しかし，今後は，(a)～(d)の項目についてバランスのとれた発展が強く望まれている．

このような目的のために，計算力学分野への様々な人工知能（Artificial Intelligence）の適用の試みがなされている[5)~15)]．本稿では，有限要素法システムの高度化のためのキーテクノロジーとして，ニューラルネットワーク[16),17)]とファジィ理論[18),19)]に着目し，その応用について述べる．

2. 有限要素法解析の自動化（その1：プレ処理）

扱う問題の巨大化，複雑化に伴いプレ・ポスト処理の負荷が増大している．特に，要素分割作業（メッシュ・ジェネレーション）の負荷の増大は，スーパーコンピュータ利用によって解析時間の短縮化が急速に進んでいる現状では，最もクリティカルな問題となっている[20)~22)]．たとえば，スーパーコンピュータを用いた自動車の衝突解析や振動解析を例にとると，数万自由度規模の全体有限要素モデルの解析は高々1～数時間で終了するのに対してモデル作成に1～3人月という日数を要する．

このような背景から，プレ処理について，効率的でしかも自在な要素分割を可能とする自動要素分割システムを目指した研究・開発や，誤差評価理論とそれに基づく最適要素生成手法が研究されてきた．

筆者らは，ファジィ理論と計算幾何学手法を用いた自動要素分割システムを開発している[23~28)]．このシステムでは，ファジィ理論を適用することにより，ユーザーがわずかな入力データの操作を行うだけで自由曲面を含む複雑形状内の節点密度を自在に制御でき，しかも数万節点規模の大規模メッシュを高速に生成できる．

2.1 自動要素分割

2.1.1 基本原理

本手法は要素分割が本来有する「あいまいさ」をファジィ理論を用いて処理しようとするものである．その原理を説明するために，解析の熟練者が持っている分割に対するイメージについて2次元問題を例に考える．

熟練者は**図1**(a)に示すようなき裂や円孔などの形状の特徴的部分に対して，過去の豊富な解析経験や理論的知識に基づき，そこに応力が集中し易いことを熟知している．その結果として図1(b)，(c)のように局所的には最適に近い分割イメージを持っていると考えられる．したがって，個々の分割イメージを連続的につながるよう組み合わせることができれば，それが熟練者が望む初期の要素分割としては最良の要素分割となる．ところが，分割イメージを組み合せる過程において，それぞれの有効範囲の決定や滑らかな結合という作業には多分に「あいまいさ」が含まれ，非規則的でもあるため，従来の厳密な数学的原理に基づく自動要素分割法で取り扱うことが難しい．本手法ではこの「あいまいさ」に着目し，あらかじめデータベースとして用意した過去の解析経験や数学的理論から類推される局所的に最適な要素分割あるいは接点パターンをファジィ理論を用いて組み合わせる．このようにして得られた接点を連結することにより2次元では3角形要素や4角形要素，3次元では4面体要素を生成する．

2.1.2 メンバシップ関数を用いた節点パターンの組み合せ

再度**図2**(a)のようにき裂と円孔という2つの応力集中部が近接して存在する領域の要素分割問題を考える．もし，き裂と円孔が十分離れて存在すれば，熟練者は過去の経験等からそれぞれを理想的な節点配置パターンと考えるであろう．しかし，両者が近接する場合には，図2(b)のように両節点パターンが重なるため，余分な節点の除去など，節点パターンの組み合せを手順化する必要がある．

ここで，改めて節点パターンの各節点の位置の意味

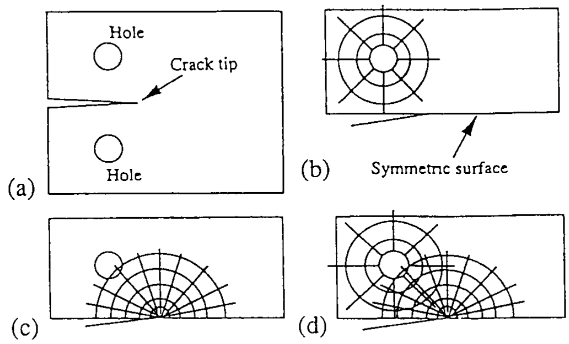


図1 熟練者の有する要素分割イメージの例

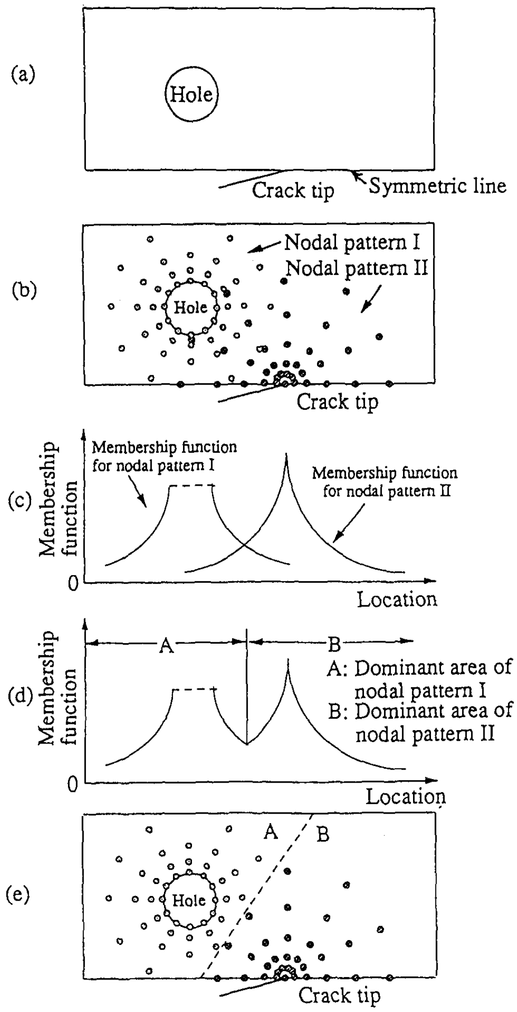


図 2　あいまい知識処理手法に基づく節点パターンの組み合わせの原理

を考えてみる．たとえばき裂用節点パターンの節点位置は「き裂先端近傍」として分類できる．しかし，このような近傍か否かという分類は本来あいまいなものである．

そこで，この「あいまい」な分類を表すために，ファジィ理論で用いられるメンバーシップ関数[18),19)]を用いると，「き裂先端近傍」や「円孔近傍」という分類は図 2(c)のように表現できる．同図ではメンバーシップ関数の値が大きいほどその点の「近傍」の度合が高いことを示している．図 2(b), (c)において，それぞれの位置でメンバーシップ関数値の高いほうの節点パターンを採用すれば，(和集合をとるファジィ推論)，図 2(d)で示すようなメンバーシップ関数の包絡線が得られると同時に，全領域を自動的に「き裂近傍」領域と「円孔近傍」領域に分離できる．さらに，一般にき裂先端や円孔の様な応力集中部に近いほど密な節点配置が要求されることを利用して，メンバーシップ関数と節点密度を関連づけると，図 2(d)はき裂先端と円孔が接近する場合の節点密度分布を表すことになる．この節点密度分布に応じた節点配置を行い要素分割すれば，図 2(e)のように節点を解析者のイメージ通りにごく自然に配置できる．

自動要素分割システム中には，き裂の円孔のような特殊形状部に対する節点パターン(特殊節点パターン)と対象形状全体を覆う格子状の節点パターン（基本節点パターン）をデータベースとして用意する．

2.1.3　処理の流れ

前節に述べた原理に基づき構築された自動要素分割システムの全体の処理の流れは次の通りである[27)]．

(a)　形状（幾何モデル）定義
(b)　幾何モデルに対する境界条件の指定
(c)　節点粗密情報の指定
(d)　節点生成
(e)　要素生成
(f)　要素のゆがみの補正
(g)　メッシュへの境界条件の付加
(h)　解析

(1)　形状（幾何モデル）定義

幾何モデルとしては，任意の汎用ソリッドモデラーを利用することができる．ここでは，有理 Bezier 曲面及び有理 Gregory パッチの自由曲面表現が可能であり，形状処理のためのライブラリー関数を豊富に有する汎用 CAD システム DESIGNBASE Ver. 3.1[29)]の幾何モデル定義機能を用いる。図 3 にエンジンのピストンヘッドの1/2モデルの定義例を示す．

(2)　ユーザーによる境界条件の指定

一般の有限要素法解析において，境界条件は解析コード特有のデータフォーマットを考慮しながら要素面や要素節点などに直接指定しなければならない．これに対して，本システムでは，生成される要素分割を意識せずに幾何モデルに直接境界条件を指定できるようにした．すなわち，まず，**図 3** に示される幾何モデルを構成する頂点，稜線，面（ないしパッチ）をマウスでクリックすることにより指定する．ここで面（ないしパッチ）は，それを構成する稜線上の 3 点をクリックすることにより指定する．次に指定された幾何モデルの構成要素に付与する境界条件の種類と数値を入力する．ここでは，スカラー，ベクトル量の指定や Direchlet 型，Neuman 型，混合型の境界条件の指定ができる．また，応力解析，熱伝導解析，流体解析，

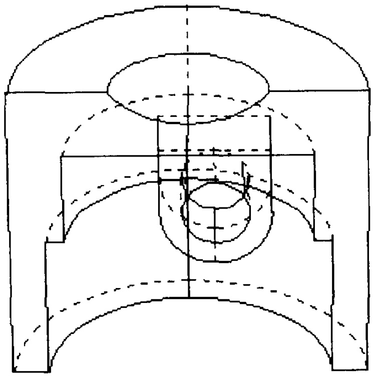


図3　CADデータの例（ピストンヘッドの1/2モデル）

電磁気解析のいずれの境界条件にも対応できる．

(3)　節点粗密情報の指定

幾何モデル内に生成する節点の粗密情報を指定する．本システムでは，2.1.2節で述べたように複数の節点密度分布関数（局所的な応力集中に対応する分布，有限領域内を一様に分割するための分布，全領域を一様に分割するための分布など）があらかじめシステム内にデータベースとして登録されている．ユーザーは問題に応じてそれらを選択し，それらの配置位置を指定する．最後に先に述べたファジィ推論により自動的に幾何モデル全域にわたる節点密度分布が計算される．

(4)　節点生成

(3)項で定義される節点密度分布を満足する節点群が計算幾何学手法の1つであるバケット（Bucket）法[26),28),30)]を用いて，総節点数に比例する速度で自動的に生成される．このプロセスでは，節点を幾何モデルの表面及び内部のみに生成させるために，DESIGNBASEの形状演算ライブラリーが利用される．

(5)　要素生成

生成された節点群を計算幾何学手法の1つであるデラウニー（Delaunay法）[26),28),31)]を用いて結ぶことにより，ゆがみの少ない4面体要素が総節点数に比例する速度で生成される．なお，凹形状の幾何モデルにおいては，形状外部にも要素が生成されるので，最後に，要素の重心をもとに内外判定を行い，外部に生成された要素を除去する[26),28)]．

(6)　要素のゆがみの補正

ラプラシアン平滑化を数回行うことにより表面近傍に生成される要素のゆがみを補正する．

(7)　メッシュへの境界条件の付加

本システムでは，要素及び節点がそれぞれ所属していた元の形状要素（頂点，稜線，面を）情報として保持するデータ構造となっている．このため，(2)項の作業でユーザーにより形状要素（頂点，稜線，面など）毎に指定された境界条件は，自動的に要素の頂点（節点），辺，面へ割り振られる．この結果，有限要素解析コードへのための入力データ（＝メッシュ＋境界条件）が生成される．

この自動要素分割システムは，原理的に任意の有限要素法解析システムに対応可能であるが，一例として，汎用解析コードMARC Ver. Kに実装された4面体2次要素に対応するデータを出力できるようにした．

2.1.4　要素分割例

図4には，図3の幾何モデルに対する要素分割例を示す．全体はほとんど一様に要素分割されているが，内壁の4つのコーナー部に細かな要素が生成されているのがわかる．これは，応力解析であれば，そこが応力集中部となることを予想して応力集中部用の局所節点密度を指定した結果である．

本システムはC言語を用いて書かれており，現在，汎用的なワークステーションの1つである．SUN Sparc Station 10（1 CPU，50 MHz）に実装されている．図4の例では，ユーザー自身のマニュアル操作に基づく幾何モデルの定義の1時間（この部分はDESIGNBASEを用いた幾何モデリング操作の習熟度に依存し，習熟度が増せば数分の1に減る），節点粗密情報及び境界条件の指定に数秒から数十秒かかり，

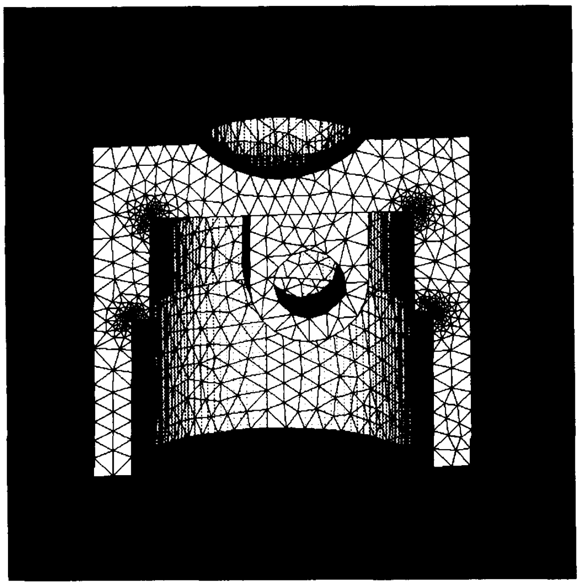


図4　図3のモデルの要素分割例（14, 250要素，27, 458節点）

その後は完全に自動的に節点生成が20分程度，要素生成が数10秒で終了する．したがって，本システムでは，ユーザーは幾何モデルの作成と境界条件の指定，節点パターンの選定に係わるだけで，あとは完全に自動的に最終的なデータまで作成できることになる．

2.2 応力集中部の判定支援システム

2.1節で述べたファジィ理論と計算幾何学手法に基づく自動要素分割手法を使いこなすことは，解析の熟練者にとっては極めて簡単なことである．しかし，初心者にとっては，依然として“解析対象の中から，応力集中の予想されそうな場所を予測する”という作業が障害となることが予想される．

応力集中箇所は，解析対象の形状によってある程度予測できるものの，実際にはそこがすべて工学的に意味のある応力集中箇所となるわけではなく，付与されている境界条件に大きく依存する．いわゆる誤差評価理論の研究や事後誤差評価に基づくアダプティブ法の研究は，そもそも“応力集中や誤差が累積しやすい箇所の推測は不可能である”という前提のもとに研究が進められているきらいがある．しかし，現実には，解析に熟練した人であれば，変形挙動あるいは力の流れを定性的に推論することによって応力集中部や応力勾配が大きくなる場所をある程度正確に予測できる．そこで，先に述べた自動要素分割手法の補助システムとして解析事例データベースを用いて解析の初心者の応力集中部判定能力の向上を図る手法を開発中である[32]．

2.2.1 基本的な考え方

著者らは以前，応力集中部の判定作業を支援する目的でIF·THENルールに基づくエキスパートシステムの構築を試みた．しかし，その検討の結果，この種の知識は比較的浅くかつあいまいであることから，ルールベース型のエキスパートシステムには適さないことが判明した[33]．また形状認識のための一手法として研究が進められているCBR (Coded Boundary Representation)[34]では，領域そのものに関する情報が欠落するために，連続体領域中に発生する応力集中部の判定に利用することは難しい．また，解析対象を等間隔の格子に分割し，格子点同志の衝突プロセスを記号化し，定性的に解を求める試みなどもなされている[35]が，有限要素法の要素分割作業のプレ処理としては負荷が大きすぎる．

そこで，ここでは，応力集中部や応力勾配が高くなる領域を含むいくつかの典型的な解析事例を次の2つの形式でデータベースとして蓄積することを考える．

(a) 詳細な解析結果（応力集中箇所や力の流れが定量的にわかるように相当応力分布や主応力分布を表示したもの）

(b) その解析において，なぜ応力集中が生じるのかについての定性的な説明

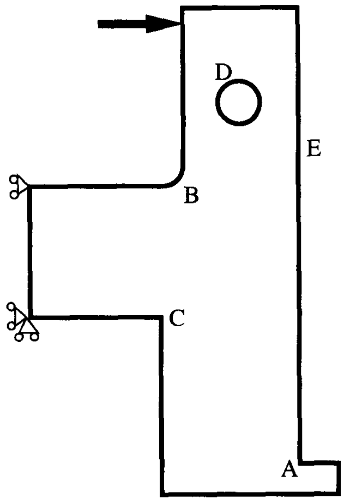


図5 複数の応力集中部を有する解析対象の例

解析の初心者は，実際の有限要素法解析に携わる前に，本補助システムを利用することにより，応力集中などが生じる代表的な解析事例に触れることができ，同時に応力集中部判定のための定性的な推論技術を学習できる．これは一種の解析経験の蓄積プロセスの高速化と言い換えることもできる．

2.2.2 処理の流れ

本システムの処理の流れは次に示す通りである．

(a) ユーザーが画面上に表示される複数の解析形状からひとつを選ぶと，次にその解析形状に対してシステムに登録されている様々な境界条件が提示されるので，その中から適当なものをひとつ選ぶ．

(b) 解析対象（形状＋境界条件）が選択されると，その詳細モデルを表示し，それに対する詳細解析結果（相当応力分布や主応力分布）が提示される．

(c) 詳細解析結果は，特定された問題に対しては正確な情報を示すものの，そのままでは応力集中部判定能力の育成には役立たない．そこで，なぜ応力集中部などがそこに存在するのかに関する定性的な説明を提示する．

その基本的な考え方は次の通りである．

(c-1) 解析対象について，細かな形状を省略し抽象化して，材料力学の基礎知識に基づき推論される主変形モードを推論理由とともに提示する．

(c–2) 次に，特徴形状を有する部分領域を取り出し，その変形モード（副変形モード）を同時に提示する．

(c–3) 以上の主変形モード，副変形モードをもとに応力集中箇所や応力勾配が大きくなる場所を説明する．なお，定量的な応力集中度についても，形状や力学条件との関連において可能な限り説明する．

2.2.3 データ事例

基本的な応力集中部は，均質材料においては円孔，ノッチ，フィレットの3種類であり，非均質材料では，さらに異材界面の自由境界端面や溶接部などが加わる．また過大な曲げ変形を受ける梁のように形状的には滑らかであっても，局所的に応力勾配が大きくなる場合もある．これらが単体で存在する問題では，そこに応力集中が生じるかどうかについて判断を誤ることはほとんどないが，それらが組み合わされると，次第に困難となる．たとえば，**図5**の場合，点Aはコーナー部であり形状的には応力集中可能箇所ではあるが，この境界条件では有意な応力集中は生じない．これは，**図6**のようにビームで近似して，主変形モードを推定することにより定性的に説明できる．また，E点付近は滑らかであるが，**図7**のように部分領域の変形モードを推定すると，圧縮応力勾配がやや高くなることが予想される．

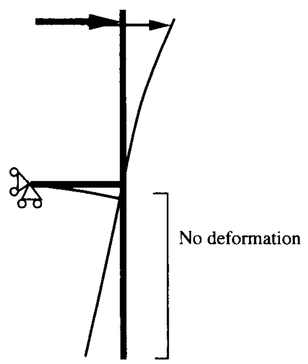


図6 解析対象の主変形モード

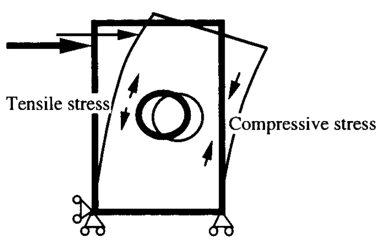


図7 解析対象の一部の変形モード

本システムでは，応力集中部が単独に存在するものから混在するものまで10～20種類の形状データを用意し，それぞれについて，引張荷重，曲げ荷重，せん断荷重，強制変位などを組み合わせた5～10種類程度の境界条件を用意し，合計50～200程度の解析データが蓄積される．

3. 有限要素法解析の自動化（その2：時間増分幅の適応制御）

3.1 背景

前節では，人手の介在する機会の多いプレ処理の自動化法について述べた．しかし，解析自体にも，解析の精度と安定性に関連して自動化を進める上で克服すべき課題がある．最も複雑かつ困難な問題として，3次元動的非線形問題を取り上げてみよう．一般には，このような問題を解析可能なプログラムが与えられたとしても，信頼できる解を得ることは難しい．この困難さは解析者の熟練度によって異なることはよく知られるところであり，次のような要因が考えられる．

(a) 用いる要素分割が解析精度と解析時間に大きく影響する．

(b) 時間刻み幅や荷重増分幅などの増分パラメータが解析精度，安定性，解析時間に大きく影響する．

(c) 反復解法を用いている場合には，そのアルゴリズム中に含まれるパラメータが，解析精度，安定性，解析時間に影響する．

つまり，非線形，非定常あるいは複雑3次元形状の問題を解くためのFEMの基本アルゴリズムが与えられたとしても，そこには必ずいくつかの制御パラメータ（要素サイズ，時間増分幅，定数パラメータなど）が含まれており，その設定に関して多少の自由度が存在する．これらのパラメータ設定に対して解析精度や解析時間が鈍感であれば問題はないが，現実には大きな影響を及ぼすことが多く，必ずしも理論的に定量化できるとは限らない．この結果，非線形や非定常の問題の解析は，解析の初心者にとって大きな困難を伴う．したがって，このような制御パラメータの自動選定や自動制御が解析の自動化を進める上で重要な課題となる．なお，要素サイズの選定（つまり要所分割そのもの）については，事後誤差評価と要素再分割を組み合せたアダプティブ法が研究されている．また，先に述べた通り，ファジィ理論に基づき熟練者の知識を利用して先験的に要素分割する手法も提案され，大き

な効果を発揮している．そこで，ここでは，時間増分幅Δtを例として，その選定に係わる問題を具体的に考えることにする．

一般に，Δtは小さいほうが数値的に安定となるが，ある時間間隔の計算に必要となる時間ステップ数が増大し，計算時間の増大を招く．一方，Δtを大きくすると計算時間は短縮されるものの，精度が低下したり，計算が不安定となり解を求めることすらできなくなる．要素分割や解の分布が一様であるような理想的な条件（このような条件は一般の有限要素法の適用対象にはほとんど存在しない）では解の安定性に関してΔtと要素寸法，波の伝播や流れの速度との間に理論的な制約条件（Courant条件）が存在するため，これに基づいて適切なΔtの目安が決められる．しかし，現実の問題では，このようにして決められたΔtと「精度的に許容可能なΔtのうち最大となる」ような最適なΔtの間にはしばしば大きな乖離が生じる．すなわち，現実に最適なΔtは，形状や材料物性値，要素分割，境界条件などの解析条件によって値が異なるばかりでなく，同一問題の解析であっても，計算過程で時々刻々と変化する．このために，非定常・非線形解析では，熟練者であっても有意な結果を得るまでにΔtの選定に関してかなりの試行錯誤を必要とする．このような状況は定常非線形問題の荷重増分幅の決定においても同様である．このことが非定常非線形解析法を解析の初心者に教育する際や解析の完全自動化を実施する上での1つ大きな阻害要因となっている．

この問題点を解決する手段として，非定常非線形解析の系を一種の非線形応答システムと考え，解の収束・発散の様子をモニタリングしながら，Δtを「数値的に安定と思われるならば，Δtを大きくし」，「数値的にかなり不安定と思われるなら，Δtをかなり小さくする」のようにファジィ的に制御することで収束性を改善しようという試みが行われ，それなりの成功を収めた[34),36)]．また，Δtを2倍づつ，あるいは1/2倍づつ変更するというような「硬いアダプティブ制御法」が多くの汎用解析コードに実装されている[37)]．しかしながら，従来の制御法やファジィ制御では，制御則やメンバーシップ関数に関して学習機能をほとんど期待できないため，広い範囲の問題へ適用しようとするとメンバーシップ関数の再チューニング作業が必要となるなど拡張性に難がある．そこで，より柔軟な制御を行うためには，例えばニューラルネットワークの学習機能の利用が期待される．ここでは，ある非定常非線形有限要素法解析を例としてΔt選定への階層型ニューラルネットワークの適用法について述べる[38)]．なお，ここで示す考え方は，構造，流体，熱を問わず，広く非定常問題へ適用可能なものである．

3.2 Δt制御の一般的な考え方

一般に，Δt制御は次の2つの過程に分けて考えるとよい．

(a) Δtの初期値の選定：Δt以外のすべての解析条件が与えられたときにΔtの初期値を選定する過程．

(b) Δtのオンライン制御：解析の途中でΔtを増減させる過程．

もしΔtのオンライン制御の機能が十分高ければ，どのようなΔtを初期値として選んでもよさそうに思える．しかし，現実にはΔtの選択の幅はかなり広い場合があり，もし初期値が実際の最適値よりも何桁もかけ離れていると，オンライン制御に失敗することも予想される．そこで，第一段階として，ここではΔtの初期値の選定過程に階層型ニューラルネットワークを適用した．

3.3 非圧縮性非線形構造解析と擬似非定常アルゴリズム

一例として，著者らが現在開発中の擬似非定常アルゴリズムに基づく非圧縮性非線形構造解析コードを対象とする．

非線形非圧縮性の有限要素法解析アルゴリズムとしてこれまでに様々なアルゴリズムが開発されてきた．たとえば，通常の混合法は非圧縮性を考慮することにより未知変数が増加し，計算規模がかなり大きくなる[39)]．また，しばしば用いられる選択低減積分/ペナルティ法（SRI/PF法）では，未知変数の増大を防げる半面，剛性マトリクスに大きなペナルティ数を導入するため，マトリクスの条件数が増大しやすく，特に3次元き裂問題では解が不安定になり易い[40)]．このため，大規模複雑形状に適用可能なアルゴリズムの開発が望まれている．

著者らは，混合法で定式化された定常問題に擬似粘性項を導入し，非定常問題に置き換えた後に，非圧縮性粘性流体解析で実績のあるFractional Step法[41)]を用いて解く手法を提案した[42)]．この解法では，比較的単調に定常解に収束するものの，最適なΔtを理論的に予測する手法がなく，これまでの数値実験から最適なΔtが材料の加工硬化指数，負荷応力，最大要素と最小要素寸法比，境界条件，き裂の有無などに大きく依存し，6桁程度の範囲から選択する必要があることが分かっている．そこで，このΔtの初期値の選択に階

層型ニューラルネットワークを適用する．

3.4 立方体の一様引張問題

手法の基本的な検討のための非線形非圧縮性の立方体を底面固定，上面一様応力σの条件で単純引張りする問題を考えた．一般に加工硬化指数n，負荷応力σ，最大の要素比，要素数などがΔtの選択に大きな影響を及ぼすことがこれまでの経験からわかっている．そこで，加工硬化指数n=1～10，負荷応力σ=0.5～1.5，最大要素比1～200，要素数6～600の範囲で解析条件を変更し，さらにΔtを10^{-3}～10の範囲で変更しながらFEM解析を行った．各解析ケースについて平均ひずみ及び相当応力，引張り部分の変位誤差の初期の数十から数百ステップの履歴を観察し，最適なΔtのオーダーを評価した．ここで用いた“最適Δt”の判定条件は，過去の解析経験より決定したが，これが絶対的なものではなく，種々のバリエーションが存在しうる．

その結果を**図8**にまとめて示す．この問題では“最適なΔt”が最大要素比や要素数に依存しなかったため，図8に示すように“最適Δt”がnとσの比較的単純な非線形関数となってしまったが，一般にき裂を有する問題では，より多数の要因に依存する極めて非線形性の強い関数となることが予想される．

3.5 学習方式及び学習結果

図8の例では，“最適なΔt”が加工硬化指数と負荷応力に依存している．そこで，この情報を階層型ニューラルネットワークに学習させることを考える．

単純には，**図9**(a)に示されるようにn及びσを入力層に，“最適なΔt”を出力層に与え，ネットワークを教育する方式が考えられる．しかし，現実には，“最適なΔt”というのは多少の幅を有するため，求められた“最適なΔt”が発散を引き起こす限界のΔtと比較してどの程度の裕度を持つのかについても求まる

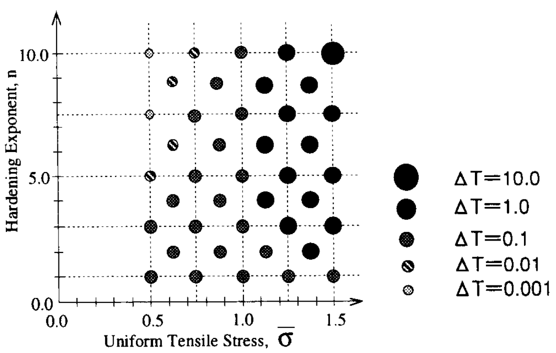


図8 最適Δtの分布

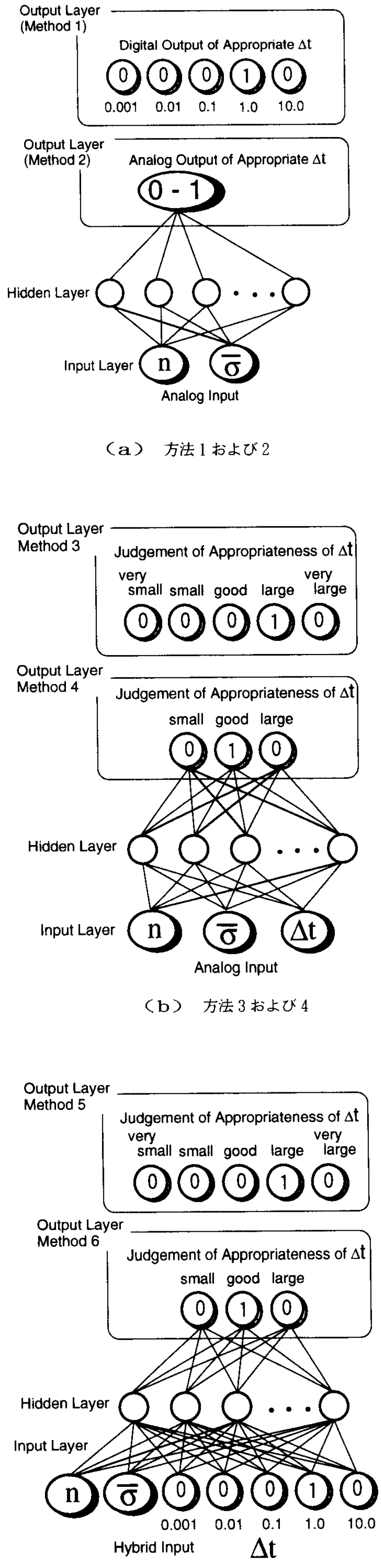


図9 最適Δt制御のためのニューラルネットワーク

ことが望ましい．そこで，“最適なΔt”を得るまでの試行錯誤事例（たとえば，あるΔtではかなり小さかったなど）を活かせる図9(b), (c)に示すような教育方式についても検討した，すなわち，図9(b), (c)の方式では，n及びσに加えて，適当なΔtを入力すると,それの適切さの度合いを多段階表示する.いずれの例も三層の階層型ネットワークを使用し，学習アルゴリズムは誤差逆伝播法(Error Back Propagation)[16),17)]を用いた．各種の方法についていろいろと検討した結果，方式3が，最も小さな学習誤差を与えることがわかった．ただし，図9に示した方式は，それぞれに特徴を有しており，どの方式も利用可能である．

3.6 Δt 制御の一般化に向けて

はじめに述べたように，Δt制御の完全自動化を図るためには，初期値の自動選択とそのオンライン制御を実現する必要がある．その実現に向けて，今後検討すべき課題は次のとおりである．

まず，そもそも最適Δtを判定するクライテリオンについて検討することが必要である．一般には，ある注目物理量の前回と今回の比や差をモニタリングし，それがある限界値を超えるかどうかをもとに判定が行われるが,

(a) 物理量の選定（種類，場所）
(b) 比をとるか差をとるかなどのデータ変換法
(c) 限界値の選定

などに任意性が存在するため，それらについて十分検討を行う必要がある．

次に，オンライン制御においては，解析の途中で大きな変化が生じることがあり，それまで用いてきたΔtの制御則が実情に合わなくなることも考えられる．その際には，その時点で試行錯誤を繰り返しながら，学習データを蓄積し，それを再度学習を行い新たな制御則を確立する必要がある．これらの点については，階層型ニューラルネットワークの追記学習法の検討も含め，継続して研究する必要がある．

4. 設計問題（デザインウインドウの自動探索）

これまでは，有限要素法解析の自動化という観点に着目してきたが，ここではその適用分野を考えてみよう．有限要素法の適用分野は，自然現象の解明など極めて広範であるが，一般に有限要素法自身は順解析のツールに過ぎない．そこで，これを逆問題や設計問題へ適用する際には，逆問題解析アルゴリズムや最適化アルゴリズムとの融合が必要となる．従来型の逆解析アルゴリズムや最適化アルゴリズムの欠点は，逆解析や設計解析時にCPU負荷の高い数値解析や最適化計算を常に多数回行う必要があることと，少し問題が複雑になると局所的な最小値にはまりこみ，真の解（大局的な最小解）を得にくくなることである．

2, 3章に述べたような有限要素解析の自動化の試みによって，繰り返し計算の労力を大幅に減少させることができるものの，いずれにしても，局所最小解へのはまり込みの問題や最終解以外の解析結果がほとんど捨てられてしまうという問題が残る．そこで，ここでは，有限要素法システムと階層型ニューラルネットワークを融合した．新しい順/逆解析手法について述べ[43)~45)]，その設計問題への適用事例[43),46)]を述べる．

4.1 順/逆解析の基本原理

ニューラルネットワークには，大きく分けて階層型ネットワークと相互結合型ネットワークがある．階層型ネットワークは教師付き学習が可能であるため，その適用範囲は相互結合型ネットワークよりもかなり広い．このネットワークが幅広く利用されている理由としては，(a)入出力関係を学習させるだけで非線形性の強い写像関係を容易に模擬できる，(b)学習データを内挿することにより未学習の入力データに対しても妥当な値を出力できる（汎化能力と呼ばれる），(c)一度学習が終了すれば簡単な積和演算を行うだけで高速に出力が得られる．(d)三層以上のネットワークを用いれば，任意の連続写像を任意の精度で近似できる，という優れた特徴が挙げられる．

さて，ここで，階層型ニューラルネットワーク適用の基本的な考え方について考えてみよう．

多次元空間xから別の多次元空間yへの写像は一般に

$$y=f(x) \tag{1}$$

と書ける．これを順問題とすると，この逆問題は，

$$x=f^{-1}(y) \tag{2}$$

と表せる．もしfが明示的に表されていれば，この順問題解析は容易である．しかし，明示的には表せないか，また表せたとしてもその評価に多大な労力を要する場合には，階層型ニューラルネットワーク手法の適用が有効となる．一方，逆問題では，fが明示的に表されたとしてもf^{-1}が明示的に表されず，また必ずしも解の一意性も保証されない．

以上のような悪構造（ill-posed）問題において，階層型ニューラルネットワークでは次の手順により問題を解くことになる．

フェーズ1（学習データ作成過程）

x 空間と y 空間の関係を記述するための n 個の離散的なデータ対 (x_i, y_i); i=1～n を求める．このデータ対を学習用データと呼ぶ．f が明示的に表される場合には，式(1)を n 回評価することにより学習用データを求めることができる．たとえば，有限要素法解析コードを利用できる問題がこれにあたる．また，材料試験のように f が明示的に与えられない場合にも実験的にデータを蓄積することができる．

フェーズ 2（ネットワークの学習過程）

図 9 で既に示したような階層型ネットワークに学習用データ対を与えて教育することにより，(1)式ないし(2)式について n 個のデータ対が存在する部分空間を近似的に実現することができる．

たとえば，x_i を入力層のユニットへ入力信号として与え，y_i を出力ユニットに教師信号として与えることにより，順問題として式(1)を実現することができる．また，逆向きにデータを与えれば，逆問題を表す式(2)を実現できる．

フェーズ 3（学習済みネットワークを用いた解析過程）

式(1)ないし，式(2)の近似度を向上させるためには，(a)データ対の選択法（数及び場所），(b)ニューラルネットワークの学習アルゴリズム，(c)式(1)ないし式(2)を直接学習させるのではなく，何らかの前処理を施し，f ないし f^{-1} の数学構造をニューラルネットワークに学習しやすいように変換することも必要である．

次節以降には，有限要素法によって得られた順解析結果を階層型ニューラルネットワークに学習させ，学習終了後のネットワークを，順解析ツールすなわち有限要素法アナライザーとして，構造設計に適用した例について述べる．具体的には，ニューロアナライザーは満足設計解の存在領域として定義されるデザインウインドウを高速に探索するために利用される．

4.2 デザインウインドウ探索法

デザインウインドウ（Design Window）は，設計変数のつくる多次元設計許容空間の中で，すべて設計条件を満足する満足設計解の存在領域として定義される．デザインウインドウは工学的に極めて重要であるものの，その導出法については有効な方法がなかった．そこで，著者らはこれまで，全領域検索法・境界膨張法・境界追跡法などのデザインウインドウ探索法を提案した．このうち，ここでは最も汎用性の高い全領域探索法について述べる．

この探索法は，設計エンジニアが経験的に設定した設計変数の許容空間に格子を発生させ，そのすべての格子点について設計条件を満足しているかどうかをしらみつぶしに調べる手法である．本手法の長所としては，設計変数の数が 3 以上の場合でも検索できるほか，デザインウインドウがドーナッツ状であったり，設計許容範囲に複数のデザインウインドウが存在する場合でも探索できる点が挙げられる．加えて，デザインウインドウ内のすべての探索点での目的関数の値も得られるため，最適値を含めた目的関数の分布も把握できる．一方，短所としては，探索点が膨大となるため探索効率が低いことが挙げられる．

4.3 デザインウインドウ探索の原理

デザインウインドウの探索において，各探索点の設計成立状況は，実際に有限要素法解析を行って判定することになる．しかしながら，このような解析に基づく探索法では，解析対象が複雑になるほど 1 回当たりの解析時間が長くなるために，探索時間が膨大になる．このため，1 次元探索の境界追跡法（ただし 2 設計変数問題にのみ適用可）以外は，探索時間の点で実用的ではない．そこで，著者らは，離散的なサンプル解析結果を学習させるだけで，未学習の探索点についても妥当な物理量を高速に推定できる階層型ニューロのデザインウインドウ探索への適用を考えた．

ニューロに基づく探索は，図10に示すように，3 つのフェーズから構成される．すなわち，第 1 フェーズにおいて，ニューロに学習させるサンプルデータを作成する．そこでは，設計変数の許容空間に格子状に発生させた離散的な設計変数の組に対して，実際に有限要素法解析を行い，最大相当応力や最高温度などの物

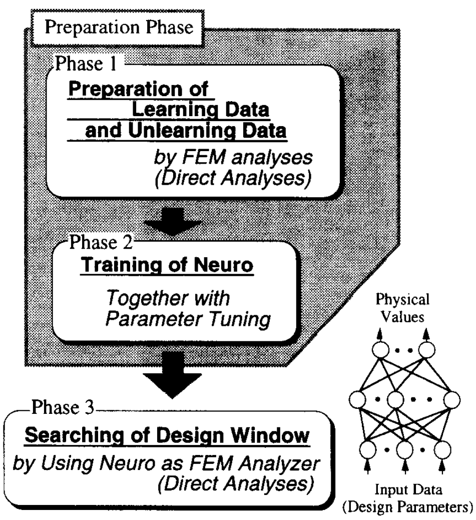


図10 ニューロに基づくデザインウインドウ探索の手順

理量を求める．第2フェーズでは，作成した学習データをニューロに学習させる．ここでは，設計変数をニューロの入力信号とし，物理量を教師信号として学習させる．第3フェーズでは，学習済みのニューロを有限要素法アナライザーとして利用し，先に述べた探索法によってデザインウインドウを求める．

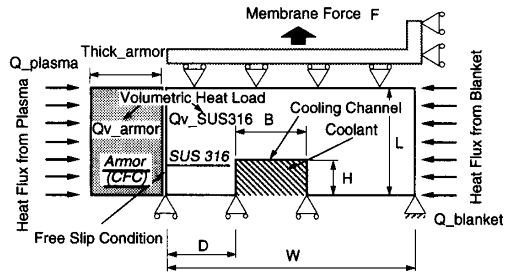
このニューロに基づく探索法においても，学習データを作成する過程において，実際にある程度の回数有限要素法解析を行う必要があるが，サンプル解析なので，解析数ははるか少なくて済む．さらに，ニューロに基づく探索は，学習に時間がかかるものの，一度学習が終了すれば，積和演算だけで物理量を推定できる．そのため，各探索点の設計成立状況を効率的に判定できる．また，FEM に基づく探索では膨大な時間を要する全領域探索でさえ，実用的な時間で行うことが可能となる．

4.4 デザインウインドウの探索例

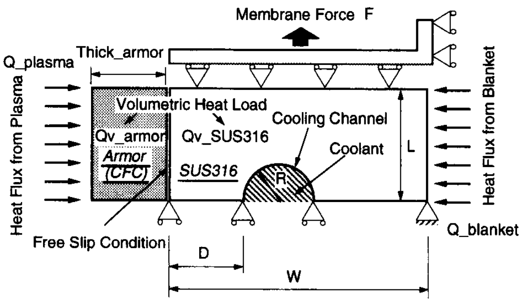
高温構造機器である核融合炉第一壁の設計モデルとして，**図11**に示すような矩形冷却チャネルモデルを採用した場合と円形冷却チャネルモデルを採用した場合を考える[46]．**図12**にニューロに基づく全領域探索法によって得られた結果を示す．

これらのデザインウインドウを，ニューロを用いずに全領域探索法によって求めるとすると，矩形チャネルモデルの場合が10651回，円形チャネルモデルの場合が6233の有限要素法解析をそれぞれ行わなければならない．しかしながら，ニューロに基づく探索では，矩形チャネルモデルの場合が580回，円形チャネルモデルの場合が224回のサンプル FEM 解析のみを行えばよい．ニューロに基づく探索では，学習に多少の時間がかかるものの，そのことを考慮しても，総解析数が少なくて済む．ニューロに基づく探索法は，効率面で非常に優れているといえる．

ニューロに基づく探索によって，効率的に多設計変数のデザインウインドウが求められるようになると，

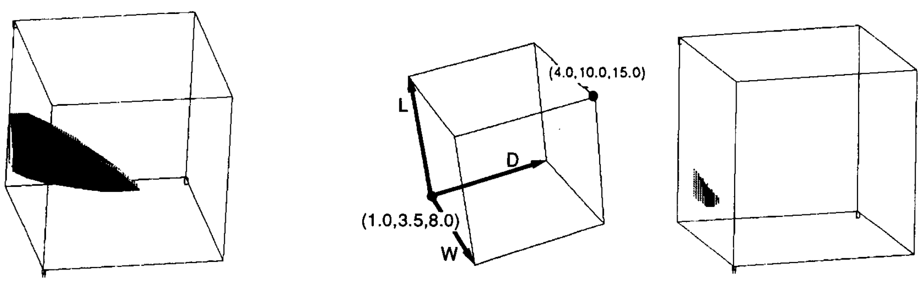


（a） 矩形



（b） 円形

図11 冷却チャネルモデル



(Bracketed coordinate denotes (D,L,W), the unit is [mm])

The number of searched points in Design Window = 356
The minimum value of σ_{max} takes the minimum value of 174.05[MPa] at D=1.45[mm], L=4.55[mm] and W=8.5[mm]

The number of searched points in Design Window = 44
The minimum value of σ_{max} takes the minimum value of 166.35[MPa] at D=1.0[mm], L=4.85[mm] and W=10.0[mm]

（a） 矩形　　（b） 円形

図12 冷却チャネルモデルのデザインウインドウ

満足解や最適解といった1つの設計解のみで行っていた従来の構造設計から，より質の高い検討が可能となるデザインウインドウに基づく構造設計に構造設計自体を高められる．たとえば，図12において，双方のデザインウインドウ及び最大相当応力の最小値を比較することによって，製作精度，健全性などを考慮した形状トポロジの検討を行える．なお，全領域探索法を用いると，デザインウインドウの探索過程で，探索点の物理量がすべてわかるため，デザインウインドウ内の目的関数の分布を含めたおおよその最適値も同時に明らかとなる．

5. おわりに

現代の有限要素法解析システムに要求される要件として，(a)解析精度の向上，(b)高速化，(c)使いやすさ，(d)移植性の4つを挙げ，特にニューラルネットワークやファジィ理論を用いた有限要素法解析システムの高度化の試みとして，解析の自動化と設計への適用という観点から概観した．ここには紙面の都合上触れられなかったが，最近では，この他に遺伝的アルゴリズムやオブジェクト指向などいろいろな計算機科学の成果を適用する試みがスタートしている．特にオブジェクト指向は，巨大ソフトウエアの移植性や保守性を高める上でも大きな期待が寄せられている[47),48)]．本稿が，読者諸兄の今後の研究・開発活動の一助になれば幸いである．

参考文献

1) 矢川元基，吉村忍：有限要素法，培風館 (1991)
2) 矢川元基，曽根田直樹：パラレルコンピューティング，培風館 (1992)
3) G. Yagawa, A. Yoshioka, S. Yoshimura and N. Soneda: A Parallel Finite Element Method with A Supercomputer Network, COMPUTERS & STRUCTURES, 47, 407/418 (1993)
4) G. Yagawa and R. Shioya: Parallel Finite Elements on a Massively Parallel Computer with Domain Decomposition, COMPUTING SYSTEMS IN ENGINEERING. 印刷中
5) J. S. Bennet and R. S. Englemore: SACON: A Knowledge-Based Consultant for Structural Analysis, Proc. 6th Int. Conf. Artificial Intelligence, 47/49 (1979)
6) I. C. Taig: Experts Aids to Finite Element System Applications, Proc. 1st. Int. Conf. Applications of Artificial Intelligence in Engineering Problems, II-2, 795/770 (1986)
7) J. Cagen and V. Genburg: PLASHTRAN: An Expert Consultant on Two-Dimensional Finite Element Modeling Techniques, ENGINEERING WITH COMPUTERS, 199/208 (1987)
8) 矢川，吉村：人工知能と計算力学，機械の研究，39, 1175/1180 & 1307/1311 (1987)
9) J. L. Vhen and P. Hajele: FEMOD: A Consultive Experts System for Finite Element Modeling, COMPUTERS & STRUCTURES, 29, 99/109 (1988)
10) 四方：構造解析汎用パッケージのコンサルテーションシステムの開発，情報処理学会第36回全国大会論文集，1509/1510 (1988)
11) 矢川，吉村：計算力学への知識工学利用，日本機械学会誌，92, 503/508 (1989)
12) 田中，好川，河内，田辺，原：構造解析プログラム利用支援エキスパートシステム-CATE,，三菱重工技報，27, 1/6 (1990)
13) 結城，上田，曹：BEM解析支援エキスパートシステムの開発（第1報，オブジェクト指向知識表現を用いたBEMモデリング)，日本機械学会論文集，57A, 195/201 (1991)
14) 矢川，吉村：計算力学のためのエキスパートシステム，応用数理，2, 30/55 (1992)
15) 矢川，吉村，富田，望月：ハイパーメディアを用いた汎用FEMコード支援システムの開発，シミュレーション，印刷中
16) 例えば 中野馨（編）：ニューロコンピュータの基礎，コロナ社 (1990)
17) 矢川元基（編）；ニューラルネットワーク（計算力学・応用力学への応用)，培風館 (1991)
18) 例えば 菅野道夫：ファジィ制御，日刊工業新聞社 (1988)
19) 矢川元基（編）：ファジィ推論（計算力学・応用力学への応用)，培風館 (1991)
20) 矢川：破壊力学におけるFEM解析の現状（三次元問題を中心に)，日本機械学会誌，88, 569/595 (1985)
21) 矢川：コンピュータによる数値シミュレーション（現状と将来)，原子力工業，33, 11/15 (1987)
22) 中村，大宮司：スーパーコンピュータと数値流体力学，日本機械学会誌，94, 40/45 (1991)
23) 矢川，吉村，中尾，曽根田：あいまい知識処理手法による自動要素分割システムの開発，日本機械学会論文集，56A, 2593/2600 (1990)
24) 矢川，吉村：有限要素法のための自動要素分割，ファジィ推論（矢川編)，培風館，241/274 (1991)
25) G. Yagawa, S. Yoshimura, K. Nakao and N. Soneda: Automatic Two-and Three Dimensional Mesh Generation Based on Fuzzy Knowledge Processing, COMPUTATIONAL MECHANICS, 9, 333/346 (1992)
26) 矢川，吉村，中尾，鶴：あいまい知識処理手法と計算幾何学に基づく大規模自動要素分割法：二次元平面，三次元ソリッドよび三次元シェルへの応用)，日本機械学会論文集，58A, 1245/1253 (1992)
27) 吉村，李，矢川，河合：自由曲面を有する三次元ソリッド用FEMモデラー（要素分割への境界条件導入の自動化)，日本機械学会講演論文，930-71, 505/506 (1993)
28) G. Yagawa, S. Yoshimura and K. Nakao: Automatic Mesh Generation of Complex Geometries Based on Fuzzy Knowledge Processing and Computational Geometry, INTEGRATED COMPUTER-AIDED ENGINEERING, 印刷中
29) DESIGNBASE User's Manual, Ver. 3, Ricoh, (1990)
30) 浅野，計算幾何学，浅倉書店，1990
31) D. F. Watson: Computing the n-Dimensional Delaunay

Tessellation with Application to Voronoi Polytopes, COMPUTER JOURNAL, 24, 167/172 (1981)

32) 吉村，矢川，河合：応力集中部判定プロセスのCAI（自動要素分割支援への適用），日本機械学会講演論文集，**930**–71, 140/141 (1993)

33) 吉村，矢川，中尾：FEMモデリングへのAI利用，日本機械学会講演論文集，No.900–14A, 472/474 (1990)

34) 村松，熱流動解析コードの運用効率化，ファジィ推論（矢川（編）），培風館，53/104 (1991)

35) 福田収一：信頼性設計エキスパートシステム（形態の処理とその応用），丸善 (1991)

36) 高橋，ファジィ推論による熱と流れ計算，ファジィ推論（矢川（編）），培風館，9/52 (1991)

37) S. H. Lee and S. S. Hsieh: Expedient Implicit Integration with Adaptive Time Stepping Algorithm for Nonlinear Transient Analysis, COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING, 81, 151/172 (1990)

38) 吉村，矢川，斎藤，松田：非定常非線形有限要素法解析の時間ステップのニューラルネット制御，日本鋼構造協会，構造工学における数値解析法シンポジウム論文集，17, 513/518 (1993)

39) J. H. Argyris, P. C. Dunne, T. Angelopoulos, and B. Bichat: Large Natural Strains and Some Special Difficulties due to Nonlinearity and Incompressible in Finite Elements, COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING, 4, 219/278 (1974)

40) G. Yagawa, Y. Kitajima and H. Ueda: Three-Dimensional Fully Plastic Solutions for Semi-Elliptical Surface Craks, International Journal of Pressure Vessels and Piping, 53, 457/510 (1993)

41) J. Donea, S. Giuliani, H. Laval and L. Quartapelle: Finite Element Solution of the Unsteady Navier-Stokes Equations by a Fractional Step Method, COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING, 30, 53/73 (1982)

42) S. Yoshimura, C.-R. Pyo, G. Yagawa and H. Kawai: Finite Element Analyses of Three Dimensional Fully Plastic Solutions Using Quasi-Nonsteady Algorithm and Tetrahedral Elements, COMPUTATIONAL MECHANICS, 印刷中

43) 矢川，望月：ニューラルネットワークと計算力学（計算力学に基づく逆解析への階層型ニューラルネットワークの適用），第5回電磁力関連のダイナミックスシンポジウム講演論文集，97/102(1993)

44) 吉村，菱田，矢川：ニューラルネットワークによる非弾性方程式のパラメータ決定法，日本機械学会論文集，59A, 518/525 (1993)

45) 矢川，吉村，大石：階層型ニューラルネットワークと計算力学による三次元き裂の形状同定，日本機械学会論文集，59A, 526/534 (1993)

46) Y. Mochizuki, S. Yoshimura and G. Yagawa: Neural Network for Automated Structural Design: Its Application to ITER First Wall Design, Transactions of 12th Int. Conf. Structural Mechanics in Reactor Technology, SD, 183/188 (1993)

47) 矢川，河合，吉村：オブジェクト指向型有限要素法解析コードの開発（スーパーコンピュータへの適用），日本機械学会講演論文集，**930**–27. 322/327 (1993)

48) 河合，矢川，吉村：超高速計算機のためのオブジェクト指向型有限要素法解析，日本機械学会講演論文集，**930**–322/327 (1993)