《論　文》

論 14-15

境界要素法による三次元非圧縮性粘性流体および磁場の定常・非定常連成解析[†]

河　村　隆　二*

ABSTRACT The three-dimensional vorticity and stream function method (ω–Φ method) is applied to incompressible viscous fluid problems at low Reynolds numbers by boundary element method. The stream function is governed by a simple Poisson equation and the vorticity equation is transient advection diffusion equation. The time integration of the fundamental solution has been performed in advection diffusion. This ω–Φ–A method is formulated for coupled three-dimensional incompressible viscous fluid and magnetic field analysis and compared with simple steady and transient examples.

Key words: Boundary Element Method, Incompressible Viscous Fluid, Vorticity, Stream Function, Three-Dimension, Navier-Stokes Equation, ω–Φ–A Method Low Reynolds Number, Maxwell Equation, Magnet-Hydro Dynamic

1. まえがき

Navier-Stokes 方程式により支配される非圧縮性粘性流体解析は差分法，有限要素法により有効性が発揮されている．しかしながらメッシュ数が膨大なため計算時間が増大し，計算機の容量が小さい場合には難点がある．そのため境界要素法により，三次元で非線形項を右辺ソース項とする定式化がなされている[1),2)]．二次元の場合流れ関数のポアッソンの方程式と渦度輸送方程式を用いた Navier-Stokes 方程式の解法の定式化が行われ，移流項のない基本解で近似し，簡単なモデルに対する流れに適用している[3)]．一方 Skerget 等[4)]は三次元で流速と渦度により定式化を行っている．先の論文で三次元渦度および流れ関数（ω–Φ 法）による定式化を行い、戸高等が用いた例題を三次元化し，その有効性を確かめた[5)]．この方法は丁度流れ関数は三次元ポアッソンの方程式に支配され，渦度移動方程式は三次元移流拡散方程式に相当している．後者の場合三次元 Navier-Stokes 方程式と連続の式から導出され，さきの移流拡散方程式の基本解の時間積分[6)]がそのまま利用できる．さらに $\tau\to\infty$ とすることにより，定常の場合の基本解が得られる．境界条件以外は未知関数の値の変動が小さいため，本法での面積積分は 8×8 点，体積積分は 8×8×8 点のガウス積分を用いている．

磁性体内の運動物体の磁場解析については FEM, FDM により数多く試みられている．BEM の場合 Maxwell の方程式において渦電流を考慮することにより，定式化[7)~9)]が可能である．基本解の時間積分が可能[6)]となったので上述の非圧縮性粘性流体と運動物体の磁場の連成解析の定式化を行う．FEM, FDM の場合いずれも Peclet 数の大きい場合は非物理的な解が出る場合がある．BEM の場合は Peclet 数が大きくても解が安定である．先の論文で境界要素法による定式化[10)]を行った．簡単な例題 1 で簡単なアンペアの法則の比較を試み，例題 2 で比較的高いレイノルズ数の定常・非定常の流れのみの解析を行い，例題 3 では非定常で流れがない場合と流れがある場合の磁場解析を行った．本論文ではこれらの粘性流体と磁場の連成解析を取り扱う．

Three Dimensional Coupled Steady and Transient Incompressible Viscous Flow and Magnetic Field Analysis by Boundary Element Method. By *Ryuji Kawamura* (Nuclear Energy System INC.).

*原子力システム㈱大洗事務所

[†]1994年 8 月26日受付　1994年12月22日再受付

2. 定式化

三次元の非圧縮性粘性流体において流れ関数および渦度輸送方程式はそれぞれ非保存力の磁場の影響を考慮すると，次式で与えられる．

$$\nabla^2\boldsymbol{\Phi}=-\omega \qquad (1)$$

$$u=(\nabla\times\boldsymbol{\Phi}) \qquad (2)$$

$$\partial\omega/\partial t+(u\cdot\nabla)\omega-(\omega\cdot\nabla)u$$
$$=\nu\nabla^2\omega+[\nabla\times(\nabla\times B)\times B]/\rho\mu_m \qquad (3)$$

ここで，u：流体速度（u_x, u_y, u_z），演算子$\nabla=(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$である．ただし$\Phi$：流れ関数（$\Phi_x$, Φ_y, Φ_z），ω：渦度（ω_x, ω_y, ω_z），ν：動粘性係数（$=\mu/\rho$），μ：粘性係数，ρ：流体の密度である．

磁場内の運動物体の Maxwell の方程式は次式で与えられる．

$$\nabla\times E=-\frac{\partial B}{\partial t} \qquad (4)$$

$$\nabla\times H=J_0+J_e+\frac{\partial D}{\partial t} \qquad (5)$$

$$\nabla\cdot B=0 \qquad (6)$$

$$B=\mu_m H. \qquad (7)$$

変位電流を無視し，渦電流を考慮し，オームの法則からベクトルポテンシャルを用いて，

$$J_e=\sigma(E+u\times B)=\sigma\left(-\nabla\phi-\frac{\partial A}{\partial t}+u\times B\right), \qquad (8)$$

となる．ここで Gauge 条件を

$$\nabla\cdot A=0. \qquad (9)$$

とすると(5)，(8)式は

$$\nabla\times H=\sigma\left(-\frac{\partial A}{\partial t}-\nabla\phi+u\times B\right)+J_0 \qquad (10)$$

左辺にもベクトルポテンシャルを用いると，方程式(10)式は

$$\nabla\times(\nu_m\nabla\times A)$$
$$=\sigma\left(-\frac{\partial A}{\partial t}-\nabla\phi+u\times B\right)+J_0$$
$$=\sigma\left(-\frac{\partial A}{\partial t}-\nabla\phi+u\times\nabla\times A\right)$$
$$+J_0 \qquad (11)$$

となる．ここで$\nu_m=1/\mu_m$で方程式(11)は次のベクトル解析の公式を用いて書き換える．

$$u\times(\nabla\times A)=u(\nabla\cdot A)-A(\nabla\cdot u)+(A\cdot\nabla)u$$
$$-(u\cdot\nabla)A \qquad (12)$$

仮に$\nabla\cdot A=0$で$\nabla\cdot u=0$，とすると

$$u\times(\nabla\times A)=(A\cdot\nabla)u-(u\cdot\nabla)A \qquad (13)$$

及び

$$\nabla\times\nabla\times A=\nabla(\nabla\cdot A)-\nabla^2 A \qquad (14)$$

となる．

運動物体がある場合の三次元磁場の方程式は次式で与えられる．

$$\sigma\left[\frac{\partial A}{\partial t}+\nabla\phi+(u\cdot\nabla)A-(A\cdot\nabla)u\right]=\nu_m\nabla^2 A+J_0,$$
$$\text{in } \Omega \qquad (15)$$

ここでσ導電率（1/Ωm），μ_m透磁率（H/m），ν_m磁気抵抗率(m/H)($=1/\mu_m$)，運動物体速度$u=(u_x, u_y, u_z)$，H磁界の強さ（A/m），B磁束密度（Wb/m²），E電場の強さ(V/m)，Aベクトルポテンシアル（Wb/m），J_0強制電流密度（A/m²），Je渦電流密度（A/m²），φ電位(V)，tは時間である．

(3)式および(15)式で平均速度と偏差の速度の和$u=u_0+u'$に分けられ，電位を無視すると，

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+(u_0\cdot\nabla)\omega=\nu\nabla^2\omega-(u'\cdot\nabla)\omega+(\omega\cdot\nabla)u'$$
$$+\{\nabla\times(B\cdot\nabla)B(r,t)/\rho\mu_m\} \text{ in } \Omega \qquad (16)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t}+(u_0\cdot\nabla)A=\nu_m/\sigma\nabla^2 A-(u'\cdot\nabla)A+(A\cdot\nabla)u'$$
$$+J_0/\sigma. \text{ in } \Omega \qquad (17)$$

となり，(1)式はポアッソンの方程式であり，(16)および(17)式はソース項のある移流拡散方程式である．(16)および(17)式の右辺第2項，第3項はソース項として考える．速度が大きくなるとこの項の体積積分値が大きくなる．

また次式を満足している．

$$\omega=\nabla\times u \qquad (18)$$

$$\nabla\cdot\omega=0 \qquad (19)$$

であり，初期条件は

$$\omega(x,y,z,0)=\omega_0(x,y,z) \qquad (20)$$

$$A(x,y,z,0)=A_0(x,y,z). \qquad (21)$$

Dirichlet 境界条件は

$$\Phi(x_0,y_0,z_0,t)=\Phi_1 \text{ on } \Gamma_{11} \qquad (22)$$

$$\omega(x_0,y_0,z_0,t)=\omega_1 \text{ on } \Gamma_{12} \qquad (23)$$

$$A(x_1,y_1,z_1,t)=A_1, \text{ on } \Gamma_{13} \qquad (24)$$

Neumann 境界条件は

$$p_n=-\nabla\Phi\cdot n=p_0 \text{ on } \Gamma_{21} \qquad (25)$$

$$q=-\nu\nabla\omega\cdot n=q_0 \text{ on } \Gamma_{22} \qquad (26)$$

$$q_n=-K\nabla A\cdot n=q_{m0}, \text{ on } \Gamma_{23} \qquad (27)$$

ここで$K=\nu_m/\sigma$である，またΓ_{11}, Γ_{12}, Γ_{13}, Γ_{21}, Γ_{22}, Γ_{23}はそれぞれ境界である．

(1)式の基本解は

$$\Phi^*(x,y,z)=\frac{1}{4\pi r}\cdot 1 \qquad (28)$$

$$p^*(x,y,z)=\frac{(r\cdot n)}{4\pi r^3}\cdot 1 \qquad (29)$$

(16)式および(17)式の演算子は

$$\left[-\frac{\partial}{\partial t}\omega^*-(u_0\cdot\nabla)\omega^*-\nu\nabla^2\omega^*\right]$$
$$=1\cdot\delta^3(x-x')\delta(\tau-t) \qquad (30)$$

および

$$\left[-\frac{\partial}{\partial t}\Psi^*-(u_0\cdot\nabla)\Psi^*-K\nabla^2\Psi^*\right]$$
$$=1\cdot\delta^3(x-x')\delta(\tau-t) \qquad (31)$$

ここで $\mathbf{1}=(1.1.1)^t$ である．(30)式および(31)式の基本解は

$$\omega^*(r,t;r_i,\tau)$$
$$=1\cdot\exp[-(u_0\cdot r')/2\nu-u_0^2t'/4\nu-r'^2/4\nu t']$$
$$/(4\pi\nu t')^{3/2} \qquad (32)$$

および

$$\Psi^*(r,t;r_i,\tau)$$
$$=1\cdot\exp[-(u_0\cdot r')/2K-u_0^2t'/4K-r'^2/(4Kt')]$$
$$/(4\pi kt')^{3/2} \qquad (33)$$

ここで $t'=\tau-t$, $r'=r-r_i$.

（1）式，(16)式および(17)式についての境界積分方程式は各々次式となる．

$$\Theta_i\Phi(r_i)-\int_\Gamma p^*(r,r_i)\Phi(r)\,d\Gamma$$
$$=-\int_\Gamma \Phi^*(r,r_i)p(r)\,d\Gamma$$
$$+\int_\Omega \Phi^*(r,r_i)\omega(r,t)\,d\Omega \qquad (34)$$

$$\Theta_i\omega(r_i,\tau)-\int_0^\tau\int_\Gamma q^*(r,t;r_i,\tau)\omega(r,t)\,d\Gamma\,dt$$
$$=-\int_0^\tau\int_\Gamma \omega^*(r,t;r_i,\tau)q(r,t)\,d\Gamma\,dt$$
$$+\int_\Omega \omega^*(r,0;r_i,\tau)\omega_1(r)\,d\Omega$$
$$-\int_0^\tau\int_\Omega \omega^*(r,t;r_i,\tau)(u'\cdot\nabla)\omega(r,t)\,d\Omega\,dt$$
$$+\int_0^\tau\int_\Omega \omega^*(r,t;r_i,\tau)(\omega\cdot\nabla)u'(r,t)\,d\Omega\,dt$$
$$+\int_0^\tau\int_\Omega \omega^*(r,t;r_i,\tau)\{\nabla\times(B\cdot\nabla)B(r,t)/\rho\mu_m\}$$
$$\times d\Omega\,dt \qquad (35)$$

$$\Theta_iA(r_i,\tau)-\int_0^\tau\int_\Gamma \Phi^*(r,t;r_i,\tau)A(r,t)\,d\Gamma\,dt$$
$$=-\int_0^\tau\int_\Gamma \Psi^*(r,t;r_i,\tau)qn(r,t)\,d\Gamma\,dt$$
$$+\int_\Omega \Psi^*(r,0;r_i,\tau)A_0(r)\,d\Omega$$
$$-\int_0^\tau\int_\Omega \Psi^*(r,t;r_i,\tau)(u'\cdot\nabla)A(r,t)\,d\Omega\,dt$$
$$+\int_0^\tau\int_\Omega \Psi^*(r,t;r_i,\tau)(A\cdot\nabla)u'(r,t)\,d\Omega\,dt$$
$$+\int_0^\tau\int_\Omega \Psi^*(r,t;r_i,\tau)J_0(r,t)/\sigma\,d\Omega\,dt, \qquad (36)$$

ここで Θ_i は観察点 r_i で決まる定数である．

$$p^*(r,r_i)=-\nabla\Phi^*(r,r_i)\cdot n \qquad (37)$$

$$q^*(r,t;r_i,\tau)$$
$$=1^*\{-\nu\nabla\omega^*(r,t;r_i,\tau)-u_0\omega^*(r,t;r_i,\tau)\}\cdot n. \qquad (38)$$

$$\Phi_m^*(r,t;r_i,\tau)$$
$$=1\cdot\{-K\nabla\Psi^*(r,t;r_i,\tau)-u_0\Psi^*(r,t;r_i,\tau)\}$$
$$\cdot n. \qquad (39)$$

(35)式及び(36)式で小さい τ に対し ω, q, qn, A の変化は小さいとして，ω^*, q^*, Ψ^*, Φ^* の時間積分を実行する．

(34)式，(35)式及び(36)式についての境界積分方程式は各々次式となる．

$$\Theta_i\Phi(r_i)-\int_\Gamma p^*(r,r_i)\Phi(r)\,d\Gamma$$
$$=-\int_\Gamma \Phi^*(r,r_i)p(r)\,d\Gamma+\int_\Omega \Phi^*(r,r_i)\omega(r,\tau)$$
$$\times d\Omega \qquad (40)$$

および

$$\Theta_i\omega(r_i,\tau)-\int_\Gamma q\tau(r,r_i)\omega(r,\tau)\,d\Gamma$$
$$=-\int_\Gamma \omega^*\tau(r,r_i)q(r,\tau)\,d\Gamma$$
$$+\int_\Omega \omega^*(r,0;r_i,\tau)\omega_0(r)\,d\Omega$$
$$-\int_\Omega \omega^*\tau(r,r_i)(u'\cdot\nabla)\omega(r,\tau)\,d\Omega$$
$$+\int_\Omega \omega^*\tau(r,r_i)(\omega\cdot\nabla)u'(r,\tau)\,d\Omega$$
$$+\int_\Omega \omega^*\tau(r,r_i)\{\nabla\times(B\cdot\nabla)B/\rho\mu_m\}\,d\Omega$$
$$(41)$$

$$\Theta_iA(r_i,\tau)-\int_\Gamma p_m^*(r_i-r,\tau)A(r,\tau)\,d\Gamma$$
$$=-\int_\Gamma A^*(r_i-r,\tau)qn(r,\tau)\,d\Gamma$$
$$-\int_\Omega A^*\tau(r,r_i)(u'\cdot\nabla)A(r,\tau)\,d\Omega$$
$$+\int_\Omega A^*\tau(r,r_i)(A\cdot\nabla)u'(r,\tau)\,d\Omega$$
$$+\int_\Omega \Psi^*(r,0;r_i,\tau)A_0(r)\,d\Omega$$

$$+\int_{\Omega} A^*(r_i-r,\tau)J_0(r,\tau)/\sigma\, d\Omega. \qquad (42)$$

となる．(40)式(41)式及び(42)式を離散化し，連立方程式を解くことにより，(2)式より速度が求まる．次に(18)式より ω を求め，これを(41)式の新たな境界値として代入し，(41)式の結果を(2)式に代入して，(23)式より新たな境界値を求め，(42)式を解き，再び ω および $B=\nabla\times A$ より B を(41)式に代入し繰り返し計算を行う．この解法は境界条件以外は微妙に値が変動するため，面積積分は8×8点，体積積分は8×8×8点のガウス積分を用いている．

3. 例題及び結果

a) 例題1

始めにアンペアの法則の検証をおこなった($B=\mu I/2\pi r$)．1/2対称の図で中央に電流 $I=0.6\times10^5$(A)がy方向に流れており，透磁率 $\mu_m=4\pi\times10^{-7}$(H/m)とした．**図1-1**はベクトルポテンシアルAyの値であり，図1-2は磁束密度 B の値である．**表1**に解析解，BEM, FEMの結果の比較を示した．若干の値の差はBEM, FEMの場合境界を有限とし0と固定したからである．

b) 例題2

次に比較的レイノルズ数の大きい流れ問題を考える．**図2**-1のようなステップフローの形状のダクトに定常・非定常流れを考える．密度 $\rho=1\,\mathrm{kg/m^3}$，動粘性係数 $\nu=0.1\,\mathrm{m^2/sec}$ とした．図2-2は要素図である．流れは図2-1の左面から入り，右面から出る場合を考えた．境界条件は上面では Φ_y＝一定，下面では $\Phi_y=0$ とし，左右両面では $\partial\omega/\partial n=0$, $\partial\Phi/\partial n=0$ とし，前後両端は $\partial\omega/\partial n=0$ とする．図2-3は定常の場合の $\mathrm{Re}=\mathrm{UL}/\nu=10000$ の流れ関数であり，図2-4はそのときの速度ベクトルである．図2-5は非定常の場合の $t=300$ での $\mathrm{Re}=5000$ での流れ関数であり，図2-6は

表1 例題1での磁束密度アンペアの法則解析解，BEM, FEMの比較

r(m)	解析解	B E M	F E M
1.06	0.01132	0.01109	0.01275
1.76	0.00682	0.00631	0.00658
2.47	0.00486	0.00354	0.00363
3.18	0.00377	0.00136	0.00120

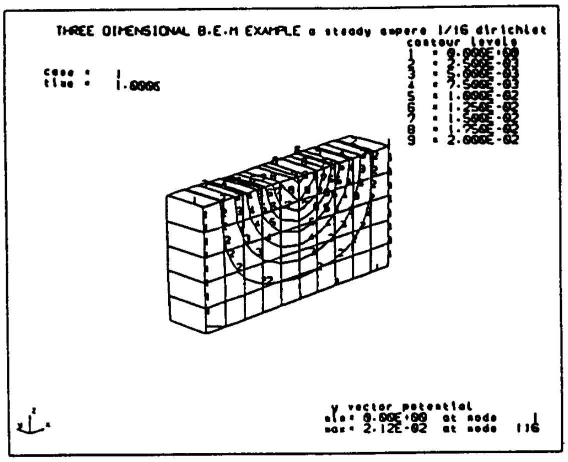

図1-1 Vector Potential Ay of Ampere's Law

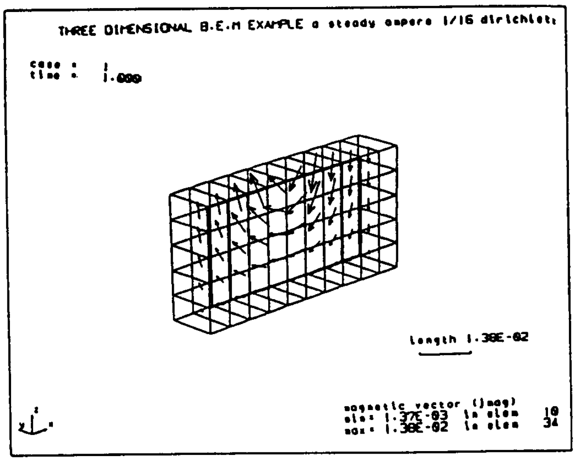

図1-2 Magnetic Density B

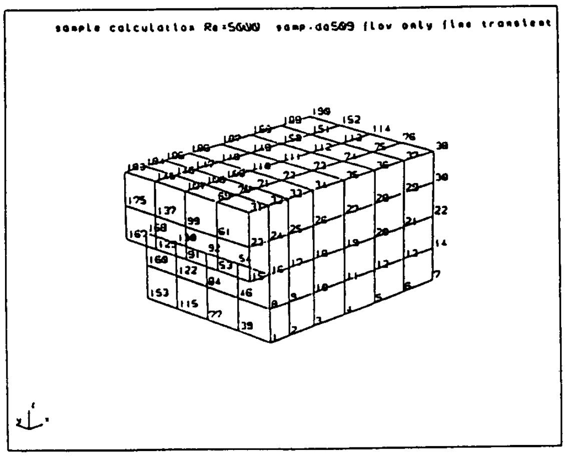

図2-1 Node Configuration

そのときの速度ベクトルである．図2-3は定常の基本解，図2-5は非定常の異なった基本解を用いており，

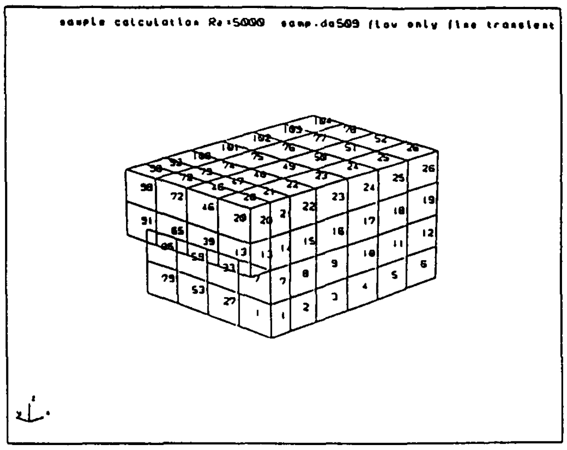

図 2−2　Element Configuration

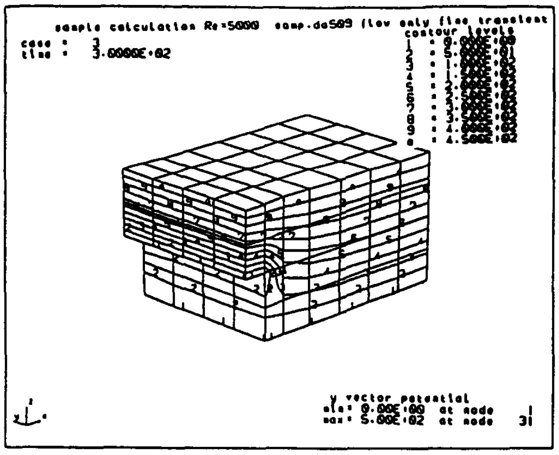

図 2−5　Stream Function Φ, at Re=5000 Transient Case

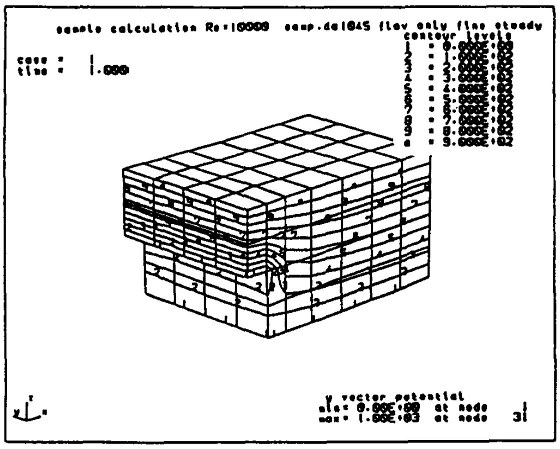

図 2−3　Stream Function Φ, at Re=10000 Steady Case

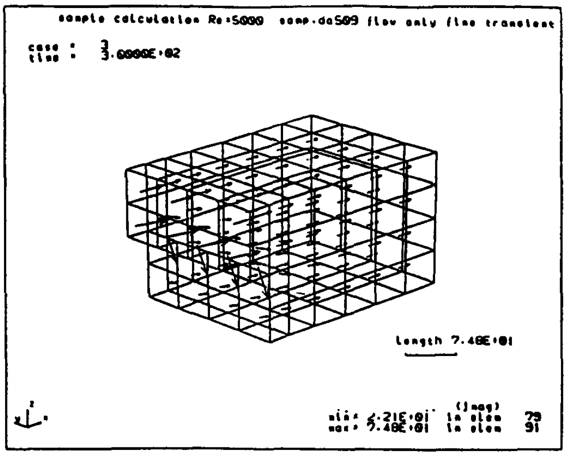

図 2−6　Flow Velocity at Re=10000 Transient Case

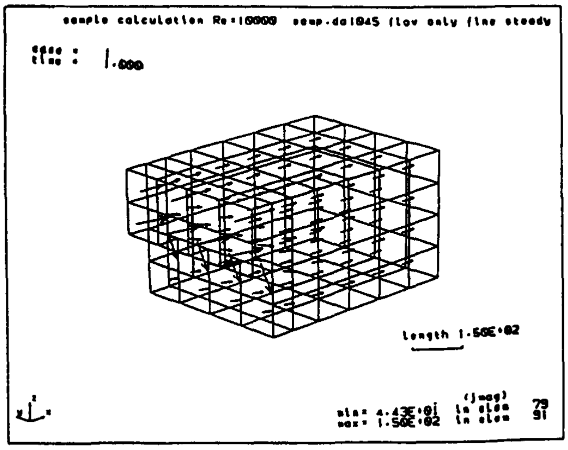

図 2−4　Flow Velocity at Re=10000 Steady Case

ほぼ同型の流れ関数となっており，時間が大きい場合解の妥当性が示される．

c)　例題 3

次に図 3−1のような例題 2 の導電性流れモデルに更に環電流を考え連成問題を取り扱う．$I=1\times10^5$(A)が流れている場合，流れがない場合と流れがある場合を比較した．図 3−1は節点図であり，図 3−2は要素図，図 3−3は流れ関数図，図 3−4は渦度，図 2−5は流れのない場合のベクトルポテンシアル Ay，図 3−6は磁束密度 B の値，図 3−7は流れのある場合のベクトルポテンシアル Ay，図 3−6は磁束密度 B の値である．時間ステップ$\Delta t=100$とし $t=500$での結果である．三次元化し，その有効性を確かめる．境界条件は上面では Φ_y=一定，下面では $\Phi_y=0$ とし，左右両面では $\partial\omega/\partial n=0$, $\partial\Phi/\partial n=0$ とし，前後両端は $\partial\omega/\partial n=0$ とする．A の境界条件はすべて反射境界する．結果は Re=10 の場合を考えた．流れのある場合，ない場合でベクト

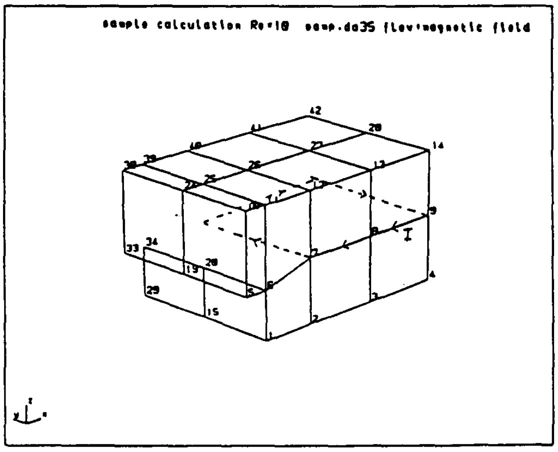

図 3−1　Node Configuration

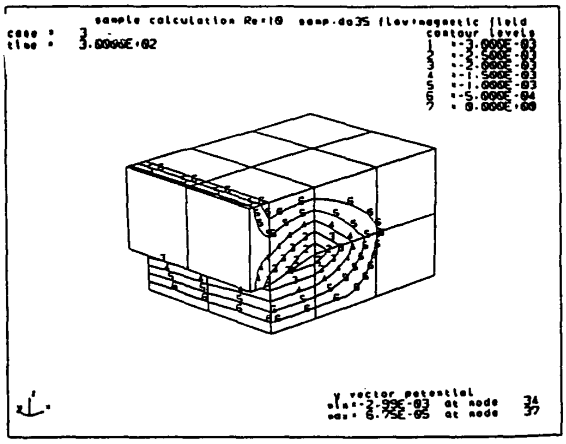

図 3−4　Vorticity Function ω_y

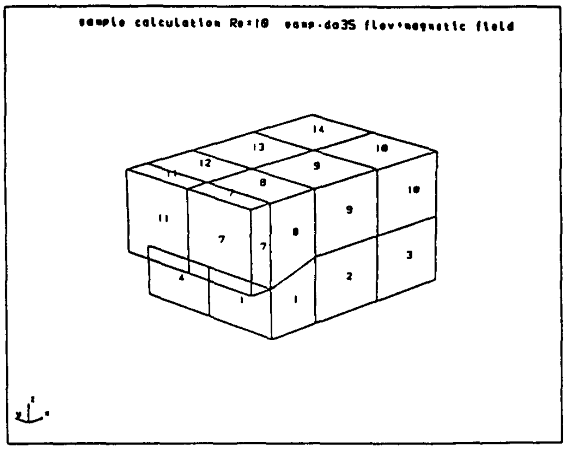

図 3−2　Element Configuration

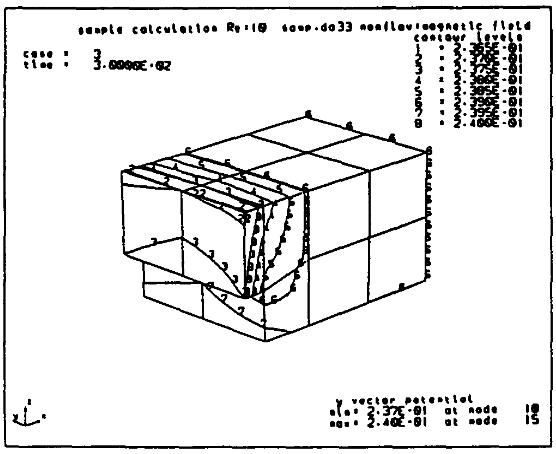

図 3−5　Vector Potential Ay without Flow

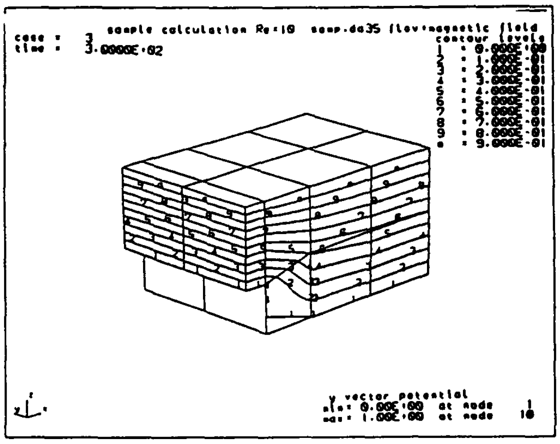

図 3−3　Stream Function Φ_y

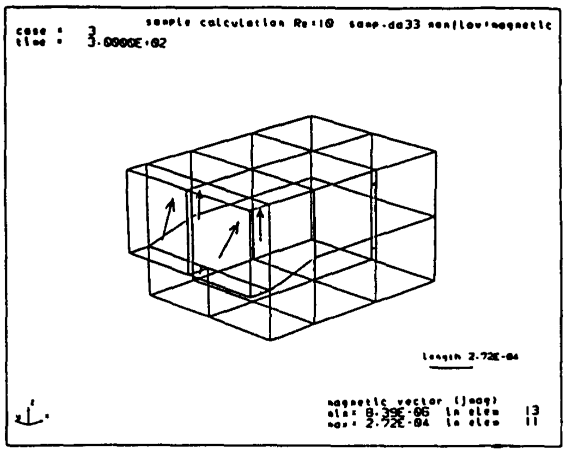

図 3−6　Magnetic Density B without Flow

ルポテンシアルの差が図(3−5),(3−6)に現れている．比較的レイノルズ数が小さいときは粗いメッシュでも解は安定であるが，結果の妥当性は実験等により検証する必要がある．

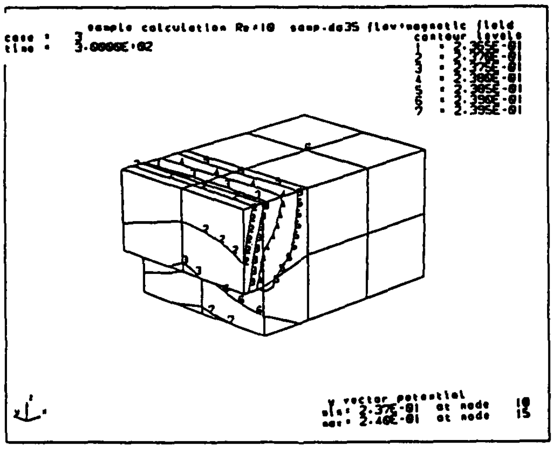

図 3-7 Vector Potential Ay with Flow

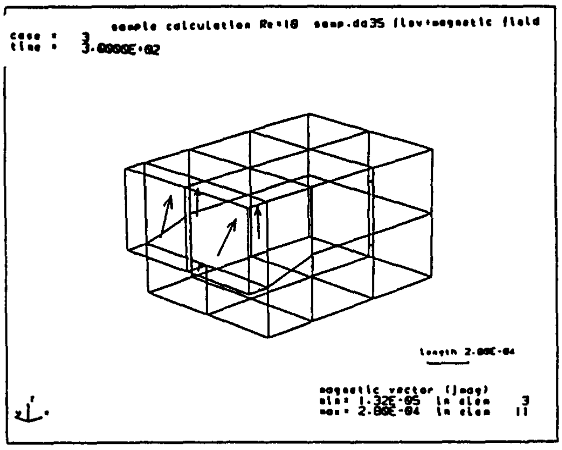

図 3-8 Magnetic Density B with Flow

4. 結　　論

境界要素法により，三次元 ω-Φ-A 法による非圧縮性粘性流体と磁場の連成解析の定式化を行った．アンペアの法則 $B=\mu I/2\pi r$ と本解析および有限要素法の結果と比較した．(表 1)遠方における値の差はアンペアの法則の場合は無限遠方で $A=0$ であるのに反し，境界要素法および有限要素法のばあい有限で境界値 $A=0$ としているからである．

先の論文では低レイノルズ数の場合のみ解析が可能であった[10]．本論文はレイノルズ数が定常の場合 Re=20000以上，非定常の場合 Re=10000以上になると境界積分方程式は不安定となる．この場合時間積分による基本解のなかに常に指数関数と補誤差関数の積の形が現れるので関数の用法を改良した．磁場の場合は渦度と同形の運動方程式であるので磁気レイノルズ数はレイノルズ数と同程度まで解析可能であろう．境界要素法で ω-Φ-A 法を取り扱う場合流れ関数，渦度，ベクトルポテンシャルの自由度がそれぞれ3こあり，境界条件の選び方が面倒である．時間ステップの選び方が多少大きくても解は安定である．

今後実験または Hartman 流の解析との比較が必要である．

参 考 文 献

1) 佐藤　尋，登坂宣好；三次元非圧縮性粘性流れ問題の境界要素解析，第 6 回境界要素法シンポジウム，境界要素法研究会，211/216，(1989)

2) K. Onishi, T. Kuroki and N. Tosaka; Further Development of BEM in Thermal Fluid Dynamics, BEM in Nonlinear Fluid Dynamics, Elsevier Applied Science, 319/343, (1990)

3) 戸高　孝，榎園正人；境界要素法による非圧縮性粘性流体の解析，第 1 回境界要素法シンポジウム，境界要素法研究会，247/252，(1984)

4) P. Skerget, A. Aljevic, G. Kuhn and C. A.. Brebbia; Natural Convection Flow Problem by BEM, Boundary Elements IX, Elsevier Applied Science, **3**, 401/417, (1988)

5) 河村隆二；境界要素法による低レイノルズ数の非圧縮性流体の解析，第10回境界要素法シンポジウム，境界要素法研究会，65/70，(1993)

6) R. Kawamura and M. Fukuma, Analysis of Three-Dimensional Transient Advection Diffusion by Boundary Element Method, Simulation Soc., **9**, 160/165, (1989)

7) M. Enokizono and T. Todaka, Analysis of Time Dependent on Three-Dimensional Flow in Althernating Magnetic Field by Boundary Element Method, Simulation Soc., **4**, 34/41, (1985)

8) S. Osada, N. Umeda and M. Enokizono, Boundary Element Analysis for Electro-magnetic Field taking account of Motion induced Voltage in Quasi-Steady State, 53/64, 11th computationa electricand Electronics Symp. (1990)

9) 河村隆二；境界要素法による三次元運動物体内磁場解析，第 8 回境界要素法シンポジウム，境界要素法研究会，103/108，(1991)

10) 河村隆二；境界要素法による低レイノルズ数の三次元非圧縮流体および磁場の連成解析の定式化，第 4 回境界要素法テクノロジーコンファランス，境界要素法研究会，103/108，(1994)

付録 1　基本解の時間積分

(35)式および(36)式での時間積分は解析的に実行できる．

$$\omega^*\tau(r, r_i)$$

$$=\int_0^\tau \omega^*(r, t; r_i, \tau)\, dt$$

$$=1\cdot\exp\left(-(u_0\cdot r')/2\nu\right)/(4\pi\nu)/2r'$$

$$\times\left[\mathrm{erfc}\left(r'/\sqrt{4\nu\tau}+u_0\sqrt{\tau/4\nu}\right)\cdot\exp\left(2r'/\cdot u_0/\sqrt{4\nu}\right)\right.$$

$$\left.+\mathrm{erfc}\left(r'/\sqrt{4\nu\tau}-u_0\sqrt{\tau/4\nu}\right)\cdot\exp\left(-2r'/\cdot u_0/\sqrt{4\nu}\right)\right] \tag{1-1}$$

$$q^*\tau(r, r_i)$$

$$=\int_0^\tau q(r, t; r_i, \tau)\, dt$$

$$
\begin{aligned}
&=1\cdot\exp\{-(u_0\cdot r')/2\nu\}/(4\pi\nu)^{3/2}[-(u_0\cdot n)\{(4\pi\nu)^{1/2}/4r'\\
&\quad\times\{\mathrm{erfc}\,(r'/\sqrt{4\nu\tau}+u_0\sqrt{\tau/4\nu})\\
&\quad\times\exp\,(2r'/\cdot)+\mathrm{erfc}\,(r'/\sqrt{4\nu\tau}-u_0\sqrt{\tau/4\nu})\\
&\quad\times\exp\,(-2r'/\cdot u_0/\sqrt{4\nu})\}\}+(r'\cdot n)\\
&\quad\times\{4\nu\exp\,(-r'^2/4\nu\tau-u_0^2\tau/4\nu)/2r'^2\\
&\quad+\sqrt{\pi\nu}/r^2((\sqrt{4\nu}/2r-u_0/\sqrt{4\nu})\\
&\quad\times(\mathrm{erfc}\,(r'/\sqrt{4\nu\tau}+u_0\sqrt{\tau/4\nu})\\
&\quad\times\exp\,(2r'/\sqrt{4\nu}\cdot u_0/\sqrt{4\nu})+(\sqrt{4\nu}/2r+u_0/\sqrt{4\nu})\\
&\quad\times(\mathrm{erfc}\,(r'/\sqrt{4\nu\tau}-u_0\sqrt{\tau/4\nu})\\
&\quad\times\exp\,(-2r'/\sqrt{4\nu}\cdot u_0/\sqrt{4\nu})\}]
\end{aligned}
\tag{1-2}
$$

$$
\begin{aligned}
&A^*(r_i-r,\tau)\\
&=\int_0^\tau \Psi^*(r,t;r_i,\tau)\,dt\\
&=1\cdot\exp\,[-(u_0\cdot r')/2K]/(4\pi K)/2r'\\
&\quad\times[\mathrm{erfc}\,(r'/\sqrt{4K\tau}+u_0\sqrt{\tau/4K})\cdot\exp\,(r'u_0/2K)\\
&\quad+\mathrm{erfc}\,(r'/\sqrt{4K\tau}-u_0\sqrt{\tau/4K})\cdot\exp\,(-r'u_0/2K)],
\end{aligned}
\tag{1-3}
$$

(42)

$$
\begin{aligned}
&p^*(r_i-r,\tau)\\
&=\int_0^\tau q^*(r,t;r_i,\tau)\,dt\\
&=1\cdot\exp\,[-(u_0\cdot r')/2K]/(4\pi K\tau)^{3/2}\\
&\quad\times[-(u\cdot n)\{(4\pi K)^{1/2}/4r'\\
&\quad\times\{\mathrm{erfc}\,(r'/\sqrt{4K\tau}+u\sqrt{\tau/4K})\\
&\quad\times\exp\,(r'u_0/2K)+\mathrm{erfc}\,(r'/\sqrt{4K\tau}+u_0\sqrt{\tau/4K})\\
&\quad\times\exp\,(-r'u_0/2K)\}+(r'\cdot n)\\
&\quad\times\{4K\exp\,[-u_0^2\tau/4K-r'^2/(4K\tau)]/2r'^2\sqrt{\tau}+\sqrt{\pi K}/r'^2\\
&\quad\times\{(\sqrt{4K}/2r'-u_0/\sqrt{4K})\cdot\mathrm{erfc}\,(r'/\sqrt{4K\tau}+u_0\sqrt{\tau/4K})\\
&\quad\times\exp\,(r'u_0/2K)+(\sqrt{4K}/2r'+u_0/\sqrt{4K}\\
&\quad\times\mathrm{erfc}\,(r'/\sqrt{4K\tau}-u_0\sqrt{\tau/4K})\cdot\exp\,(-r'u_0/2K)\}\}].
\end{aligned}
\tag{1-4}
$$

となる．

付録 2　静的な場合の基本解

静的な場合の基本解は(1-1),(1-2),(1-3),(1-4)式で $\tau\to\infty$ とすることにより静的な基本解を求める．

$$\omega^*(r-r_i,\infty)=1\cdot\exp\,[-\{(u_0\cdot r')+u_0r\}/2\nu]/(4\pi\nu r') \tag{2-1}$$

$$q^*(r-r_i,\infty)=1\cdot\exp\,[-\{(u_0\cdot r')+u_0r\}/2\nu]/(4\pi\nu)n\cdot\{-u_0/2r'+r/r^2(\nu/r'-u_0/2)\} \tag{2-2}$$

$$A^*(r-r_i,\infty)=1\cdot\exp\,[-\{(u_0\cdot r')+u_0r\}/2K]/(4\pi Kr') \tag{2-3}$$

$$p^*(r-r_i,\infty)=1\cdot\exp\,[-\{(u_0\cdot r')+u_0r\}/2K]/(4\pi K)n\cdot\{-u_0/2r'+r/r^2(K/r'-u_0/2)\} \tag{2-4}$$

(2-1),(2-2)を(41)式に(2-3),(2-4)式をそれぞれ(42)式に代入して，静的な場合の解が得られる．