

《講 座》

ウェーブレット 第2回

連続ウェーブレットの応用と

ウェーブレットの離散化

山 田 道 夫*

ABSTRACT This is the second part of an introductory survey on wavelet analysis. Two kinds of applications of continuous wavelet are discussed; one for time-frequency analysis and the other for detection of singularity strength of time series. Wavelet is different from other tools for time-frequency analysis in that the time-resolution in wavelet analysis depends on frequency while it does not other methods. The singularity detection by wavelets is often used to get detailed information of fractals or multifractals. By discretization of the parameters, wavelets may form frames or tight frames. The simplest example of orthonormal wavelets may be Haar wavelet.

1. はじめに

前回は連続ウェーブレット変換の定義とその意味を中心に述べた。要点の第一は、連続ウェーブレットは、与えられたデータを周波数成分に分解するだけでなく、位置（時刻）に関しても同時に分解する「局所フーリエ解析」の道具であること、であった。このような需要は多くさまざまな利用が試みられている。今回はまずこのような利用法の一端に触れる事にしたい。前回の要点の第二は、連続ウェーブレット変換は、数学的には正規直交系による分解ではなく過剰完全系による分解であることである。過剰完全系による分解は変換関数に強い制約を課するため、連続ウェーブレット変換に現れる特徴の中にはもとのデータの性質には基つかないものもあって、結果の解釈には慎重が必要である。このような面倒さを根本的に解消するためには、ウェーブレットそのものを完全直交系になるように作るのが一番である。今回の後半はこのような方向をめざしたウェーブレットの離散化について述べることにする。

2. 連続ウェーブレットの応用(1)…局所フーリエ解析

ウェーブレットの応用は、「局所フーリエ解析」の

Wavelets. By Michio Yamada (Graduate School of Mathematical Sciences, Univ. of Tokyo)

*東京大学大学院数理科学研究科

道具として用いるものから、数学的構造を直接的に利用するものまで多岐にわたっており、すべてを論じることは筆者の能力を越える。そのためここで述べることは、筆者の興味と趣味によって偏ったものになっていることをあらかじめお詫びしておきたい。

前回述べたように、データ（時系列） $f(x)$ の連続ウェーブレット変換

$$T(a, b) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi^{(a,b)}(x)} f(x) dx$$

は位置（時刻） b における周波数 $1/a$ の成分を表している、と考えることができる。もちろん前回も触れたように、不確定性関係があるため、この解釈をあまりまともに受け取ってはいけませんが、多くの場合、実用的にはこの解釈で十分である。そこで、この $T(a, b)$ を a - b 面に描けば、 $f(x)$ の周波数構造の変化を時間的に追ってゆくことが可能になると考えられる。実際には $T(a, b)$ よりも $|T(a, b)|$ の大きさをカラーで描かれることが多い。またマザーウェーブレットが複素数である場合には $T(a, b)$ の位相を a - b 面に描くことも多く、このようにして見た目にもきれいで印象的なさまざまな図が得られている。このような図の作成は、連続ウェーブレット変換の代表的な応用例である。

このような図は、もとの時系列データを、時間と周波数の2次元面に展開して見せているわけである。データをこのように表現する方法は実用面からは大変需要が多く、そのためウェーブレット以前からも多くの

方法が知られていた。それらのうち、一番単純な方法は、注目したい時間付近のデータのみを残してあとはゼロとおいてしまい、それをフーリエ解析するやり方である。即ち、「窓関数」とよばれる関数の一つを選びこれを $g(x)$ とする。これは $x=0$ 付近ではほぼ一定値 1 をとるが、 x が原点から遠ざかるにつれて減少し、ある程度離れると完全にあるいはほとんどゼロとなってしまうような関数である。時刻 $x=b$ 付近の周波数構造をみたいときには、この窓関数を b だけ平行移動したものを元の時系列データにかけ $(g(x-b)f(x))$ 、これをフーリエ解析するわけである。現在、多くの用途においてこの方法は十分役に立つ手法となっており、しばしば窓付きフーリエ変換 (Windowed Fourier Transform) と呼ばれている。

さて、ウェーブレット解析はこのような方法とどこが違うのだろうか？ 大きな違いはその時間分解能にある。窓付きフーリエ変換の時間的な分解能はもちろん「窓」の幅によって決定される。すなわち窓の幅 (分解能) は、 $g(x)$ によって決まっていて、どのような周波数成分を考えるとときでも一定である。これは、低い周波数の正弦波は窓の中に 1 周期分すら入りきらないが、高い周波数では非常に多くの周期が窓の中にあることを意味している。つまり窓付きフーリエ変換は周波数の異なる波を平等には扱っておらず、そのため周波数とは独立の時間スケール (一定の窓幅) を導入していることになっている。これに対してウェーブレット変換では、全てのウェーブレットはマザーウェーブレットの相似変換を用いて作られているため、「窓」の幅は周波数に応じて変化し、「自動的に」、低い周波数では大きな窓が、高い周波数では小さな窓が選ばれることになる。言い替えれば、低い周波数における時間分解能は低く、高い周波数における時間分解能は高い。「高い時間分解能が欲しければ高い周波数を見ればよい」というわけである。連続ウェーブレット変換 $T(a, b)$ のカラー表示などにおいて、 a の減少とともに狭まっていく扇形がしばしば見られるが、このような形も、この時間分解能と周波数の関係に起因している。

従来、時間一周波数解析の道具として提案されてきた手法は概ね、「窓」の選び方において、窓つきフーリエ変換のように周波数とは独立の時間スケールを導入していた。ウェーブレット解析は、このような外部から導入される人為的時間スケールを拒否した点において画期的な手法である。つまり、ウェーブレットの最大の特徴は、単に時間一周波数解析の道具であるこ

とではなく、基底系が相似な関数からなっているために全体としては特別な時間スケールを含んでいないことである、といえるだろう。

なお、実際のデータに連続ウェーブレットを適用し、時間一周波数パターンを調べようとするときには、いくつか典型的なデータで実験してから用いた方が安全であろう。例えば正弦波を連続ウェーブレット変換するとどのようなパターンが得られるだろうか？ フーリエ解析からの類推をすると、単純な正弦波形に対応するウェーブレット変換 $T(a, b)$ は時間 b については一定であるように思われるが、実はそうはならない。マザーウェーブレット $\phi(x)$ が実関数のときは、時系列 $f(x) = \cos \omega x$ に対して、

$$T(a, b) = A \cos(\omega b + \phi) \quad (A, \phi \text{ は定数})$$

となることが示される (一色, 1992)。これは時間 b と共に振動しており、従って時間一周波数面のパターンにもこの振動が現れる。もともと $T(a, b)$ が b については一定ではないか、と考えたのは、データの周波数構造だけを考慮したためである。しかし正弦波の位相は、当然ながら、時間的に変化している。 $T(a, b)$ に見られる時間振動は、ウェーブレット変換 (の絶対値) が、データ波形の周波数構造だけでなく位相構造も反映することを示しているわけである。

3. 連続ウェーブレットの応用(2)・・・関数の特異性の検出

前回触れたように、連続ウェーブレット変換はデータ $f(x)$ の特異性 (不連続性) を忠実に反映する。例えば $f(x)$ そのものが $x=b$ において不連続であるときは a が小さくなるとき $T(a, b) = O(a^{1/2})$ となる。あるいは $f(x)$ の導関数が不連続ならば $T(a, b) = O(a^{3/2})$ となる。このような関係はつぎのように一般化可能である。いま $f(x)$ が $x=b$ のまわりで

$$|f(x) - f(b)| \sim (x-b)^\lambda$$

のように振る舞うとする。このような λ は特異性強度、あるいはヘルダー (Hoelder) 指数などと呼ばれる。このとき $f(x)$ の連続ウェーブレット変換 $T(a, b)$ は a が小さくなるとき

$$T(a, b) \sim O(a^{\lambda+1/2})$$

のように振る舞う。従って $f(x)$ の特異性は $T(a, b)$ の a -依存性を調べることで検出可能である (なおここでマザーウェーブレットは十分なめらかと仮定している)。

従来のデータ解析ではこのような特異性強度 λ を必要とする場面はそれほど多くなかったと思われる。

しかし近年、自分自身が特定のスケールを持たない非線形現象の中に、フラクタルとよばれる自己相似性を持つものが存在することが注目されるようになった。そのような目でみるとフラクタルは、これまでともすれば捨てられがちだったデータの中に遍在していることが明らかになり、多くの例が見いだされるに至った。現在、フラクタル解析と従来の解析との間には依然として重大な隙間が存在しており、フラクタル解析を従来のアプローチの中に有機的に埋め込むことは未解決の問題である。しかしフラクタルであることを積極的に用いて解析を進めることも試みられており、例えば、流体乱流などの分野では乱流の基本特性を記述するものとしてのフラクタルが論じられ、速度場の特異性強度が重要な研究対象となっている。

連続ウェーブレットはこのような特異性強度を検出する道具としてしばしば用いられる。フラクタル生成の典型的操作は、ある図形を一定比で縮小しもとの図形につけ加える、という手続きから成っている。このような手続きはフラクタルを特徴づける測度や関数に特異性をもたらし、その特異性強度を求めることはフラクタル研究の上で重要な課題である。連続ウェーブレットが優れているのは、このような特異性強度を x の各点毎に求めることができる点である。従って、ウェーブレットを用いて数多くの点において特異性強度を求めることによって、特異性強度の分布を求めることが可能となる。各点毎に特異性強度が異なるようなフラクタルを一般にマルチフラクタルとよぶが、これを記述するものとして、特異性強度の分布を特徴づける $f(\alpha)$ スペクトルと呼ばれる量が知られている。連続ウェーブレットはこのような量を直接に実験的に求めることを可能にし、先ほど例に挙げた流体乱流の速度変動データなどについて実際に適用されている。

特異性強度を求める際に注意すべきなのは、一般にはマザーウェーブレットを調整する必要がある、という点である。上に繰り返し述べたように、 $f(x)$ の特異性は $T(a, b)$ の a の変化に対するべき的な振舞いを調べることで検出するのだが、このような振舞いは通常、漸近的にしか成立しない。特異性強度を実際に求めるときには、 $T(a, b)$ の $\log\text{-}\log$ プロット（あるいはその等価物）を調べることになるが、ほとんどの場合、グラフは山や谷を伴って直線とはならないため、べき指数を見いだすのは簡単ではない。そこでマザーウェーブレットをある範囲の一次結合の形に仮定し、べき則が明確になるように（すなわちグラフの直線性が最良となるように）形を調整するというこ

行われている。

なお、応用においては数値計算の手間も無視できない要素なので一言注意しておきたい。連続ウェーブレット変換の計算は a の値を固定して考えれば畳み込み演算（convolution）である。従ってこの部分の計算はフーリエ変換してしまえばただのかけ算になる。すなわちマザーウェーブレットとデータ関数をそれぞれフーリエ変換し、それらをかけ合わせ、その結果をフーリエ逆変換すれば、（ a の一つの値について）一連の b の値に対する $T(a, b)$ の値がセットで求められることになる。多くの a の値に対して $T(a, b)$ の値がほしい時は、同じことをそれぞれの a の値に対して行えばよい。FFT を用いれば、この計算はそれほど時間を要しない。これとは別に、データのオンライン処理をしたい場合には French hat などサポートが有限範囲におさまるものを用いれば便利である。さらにウェーブレット独特のアルゴリズムを用いて計算する手法や特別のマザーウェーブレットに対する計算手法などが提案されている。

4. 多次元の連続ウェーブレット

これまで述べてきたものはすべて1次元の連続ウェーブレット変換である。しかし1次元の時間一周波数解析に相当するものを多次元で行うことの需要は少なくない。例えば2次元画像データの局所フーリエ解析である位置一波数解析を必要とする分野は、画像データが日常化されつつある現在ますます広がりつつある。連続ウェーブレット変換の多次元化は、1次元の連続ウェーブレットが定式化されるのとはほぼ同時に行われ、数学的には高度に抽象化された形で解決されている。ここではそのような抽象化のアイデアに微かに触れた後、 n 次元での定式化を述べることにする。

1次元のウェーブレットの作り方を振り返ってみよう。

$$\psi^{(a,b)}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

この操作を、 a と b が関数 $f(x)$ に「作用」して新しい関数

$$\frac{1}{\sqrt{|a|}} f\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

を生成する操作である、と解釈することができる。ここに作られた新しい関数をいま

$$(a, b)f(x)$$

と表すことにする。このように (a, b) を定義すると、

$$(a', b')(a, b)f(x) = (a'a, a'b + b')f(x)$$

となることは簡単に分かる. この関係は (a, b) という数の対の集合 (これを G とする. なお $a \neq 0$ である) に「積」の演算

$$(a', b')(a, b) = (a'a, a'b + b')$$

を定義している, と考えることもできる. 実は, 集合 G にはこの演算によって群となり, ウェーブレットを作る操作はこの群を関数の集合 (H とする) の上にうまく「表現」する一つの方法となっている. 一般化された定理によると, このような関係にある G と H においては, H に属する関数 $f(x)$ から G 上の関数 $T(a, b)$ への写像でよい性質をもつものが存在することが保証される. この写像が連続ウェーブレット変換にはかならない.

このように一般的な形で定理を述べることによって, 連続ウェーブレット変換だけでなくもっと他の種類の変換も統一的に理解することが可能になるが, 我々にとっての直接のメリットは連続ウェーブレット変換の多次元化である. ここでは数学的な詳細には立ち入らず, n 次元における連続ウェーブレット変換の形を掲げることにする (なおこれらの形を一般定理を用いずに直接示すことも可能である).

まずマザーウェーブレットは次の許容条件を満たさなければならない.

$$c_\psi \equiv \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\hat{\psi}(k)|^2}{|k|^n} dk < \infty$$

ここで φ は φ のフーリエ変換, k は n 次元のベクトルを表わす. このマザーウェーブレットを用いてウェーブレットは次のように生成される.

$$\psi^{(a, r, b)}(x) = \frac{1}{a^{n/2}} \psi\left(\frac{r^{-1}(x-b)}{a}\right)$$

ここで r は n 次元の回転行列 (直交変換) である. 1 次元のときと比較して, a と b 以外に回転 r が加わっていることに注意されたい. これは, 2 次元以上では平行移動のほかに回転をほどこすことによって初めて, すべての配置をつくることができるからである. このウェーブレットを用いれば, 関数 $f(x)$ の連続ウェーブレット変換と連続ウェーブレット逆変換は次のように表される.

$$T(a, r, b) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi^{(a, r, b)}(x)} f(x) dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \int_G T(a, r, b) \psi^{(a, r, b)}(x) \frac{da dr db}{a^{n+1}}$$

ここで dr は直交変換 ($SO(n)$) の不変測度 (今の場合 $n-1$ 次元単位球面の面積に比例), $G = \{(a, r, b) | a > 0, r \in SO(n), b \in \mathbb{R}^n\}$ である. 実際には 3 次元以

上のものを応用した例はあまりなく, 2 次元の場合の応用が多い. 2 次元の形は上の式で $n=2$ とおけばよい. 具体的に書くと, ウェーブレット, 連続ウェーブレット変換, 逆変換はそれぞれ次のようになる.

$$\psi^{(a, \theta, b)}(x) = \frac{1}{a} \psi\left(\frac{1}{a} R_\theta^{-1}(x-b)\right)$$

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$T(a, \theta, b) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \int \overline{\psi^{(a, \theta, b)}(x)} f(x) dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \int_0^\infty \frac{da}{a^3} \int_{\mathbb{R}^2} db \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{2\pi} T(a, \theta, b) \times \psi^{(a, \theta, b)}(x)$$

特にマザーウェーブレットが回転対称な場合は角度依存性がなくなって

$$\psi^{(a, \theta, b)}(x) = \psi^{(a, b)}(x)$$

となるので, 上の関係式は大幅に簡単化され, 計算の効率化の点からも有利である. 2 次元の Mexican hat や 2 次元 Morlet ウェーブレットはマザーウェーブレットとしてよく用いられる. 例えば, 2 次元平面上のフラクタル図形を 2 次元連続ウェーブレット変換を用いて処理すると, a の値を小さくするにつれ $T(a, b)$ (回転対称マザーウェーブレットを使用) は, 顕微鏡ではじめばやけていた像が次第に明確になるのに似て, フラクタル図形が大きさの異なる相似的な図形から成り立って行く過程を再現するように見える. このことからウェーブレット解析は「数学的顕微鏡」とよばれることもある.

5. ウェーブレットの離散化とフレーム

前回, 連続ウェーブレット変換 $T(a, b)$ は, フーリエ変換に比べ, フィルター処理などをすることが難しいことを指摘し, その原因はウェーブレットが一次独立でなく過剰完全系となっているためであることを述べた. この難点を根本的に解消しフーリエ解析と同様の扱いやすさを保証するためには, ウェーブレットが正規直交系となるようにしてやるのが一番である. このためにはどうすればいいだろうか? まず気がつくのは, パラメータである a や b が連続変数のままではこの目的は達成されない, ということである. なぜなら 2 つのウェーブレットの内積

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi^{(a', b')}(x)} \psi^{(a, b)}(x) dx$$

を考えると, $a' \rightarrow a, b' \rightarrow b$ のときこの値は

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi^{(a,b)}(x)|^2 dx$$

に収束するがこれは明らかに正である，従って， a' と a, b' と b がそれぞれ（異なる値ではあっても）近い値にあるときは内積はゼロではないからである．従って，パラメータ a と b は離散化しなければならないことになる．

どのように a と b を離散化すればよいだろうか．先に注意したようにウェーブレットの最大の特徴は，すべてのウェーブレットが互いに相似関係にあり，どのウェーブレットもスケール変換すればみんな同じ，という平等原理にある．離散化するときこの性質を保ちながら行わないと，ウェーブレットの特徴を殺してしまうことになる．しかも離散化の際には，この特徴はもう少し注意深く考えなければならない．というのは連続ウェーブレットにおいては，1つの（すなわち (a, b) の1つの値に対する）ウェーブレットとその他の（すなわちそれ以外の (a, b) の値に対する）ウェーブレットとの関係は言及する必要はなかった．パラメータ a, b の連続的な値に対して（いわばべったりと）ウェーブレットが存在したためである．しかし離散化された場合は，この関係も含めて相似的になるようにする必要がある．すなわち，1個1個のウェーブレットはどれをとってもスケール変換すれば，それ自身以外のウェーブレットとの関係も含めて，全く同じでなければいけない．例えばナイーブに a や b を等間隔で離散化する，などというのは， a が大きくなるほど b の間隔を相対的に細かく選んでいることになり，ウェーブレット同士の関係が相似的でなく，ダメである．また a や b に最大値や最小値があってもダメである．それらの値に対応するウェーブレットが特別なものとなり平等原理に反するからである．

そこでまず a について考えよう．いま，離散化によって a の値が大ききの順に $\dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots$ となっているとしよう．このとき比 a_{n+1}/a_n を考えるとこれは n に依存してはいけない．なぜならばこの比が変化すると，ウェーブレット同士の関係が a とともに変化することになり，平等でなくなるからである．ゆえに a_n は等比数列となる．次に b の離散化について考えよう． b はウェーブレットの位置を指定するパラメータである．例えば $a=a_0$ に対するウェーブレットの（離散化された）位置を考えると，これは等間隔で並ばざるを得ない，というのは，並び方にムラがあると，となり同士のウェーブレットの関係が一様でなくなり，平等でなくなる．つぎに $a=a_1$ にのときの位置を考える

と，この位置間隔も等間隔であり，しかも $a=a_0$ のときの位置間隔の a_1/a_0 倍でなければならない，そうでなければ，スケール変換したときウェーブレット相互の関係が同じにならないからである．

以上の結果をまとめると，ウェーブレットがすべて平等であるためには離散化はつぎのようなものでなければならない．

$$a_n = a_0 \alpha^n, b_n = a_n \beta n \quad (\alpha(>1), \beta \text{ は定数})$$

便利のため以下ではすべて， $a_0=1$ とおくことにする．ところで，逆に，このような離散化を行えば，離散ウェーブレット

$$\psi_{j,k}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a_j|}} \psi\left(\frac{x-b_k}{a_j}\right), \quad (j, k \text{ は整数})$$

は完全正規直交系となるか，ということになると，話はそれほど簡単ではない．実際にはこのようにしてでたために作ってみても，出来たものについてはそもそも完全系（=任意の関数を級数の形で表せる）であるかどうかすら疑わしい．しかし，おおざっぱに言って，マザーウェーブレットとそのフーリエ変換がともに無限遠で十分速く減衰しているときは， α と β を上手にえらんでやれば，関数系 $\{\psi_{j,k}\}$ をフレーム (frame) にすることができる．ここでフレームであるとは，定数 A と B があって，任意の関数 $f(x)$ に対して

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j,k} |\langle \psi_{j,k}, f \rangle|^2 \leq B\|f\|^2$$

となることである．ここで $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は内積， $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle$ を表している．この条件はこの形のままでは何んのことかよく分からないが，実は，この条件が成り立てば $\{\psi_{j,k}\}$ に対して $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}$ という関数系（これを双対フレームとよぶ）が存在し，任意の関数 $f(x)$ は次のように展開できることを証明することができる．

$$f(x) = \sum_{j,k} \langle \psi_{j,k}, f \rangle \tilde{\psi}_{j,k} = \sum_{j,k} \langle \tilde{\psi}_{j,k}, f \rangle \psi_{j,k}$$

この展開の形は正規直交系とよく似ていることに注意されたい．実際 $A=B$ ならば $\psi_{j,k} = \tilde{\psi}_{j,k}$ と選べることを示すことができ，特に tight frame と呼ばれる．この場合，上の展開形は形式的には正規直交系とほとんど同じ形になる．しかし残念ながら tight frame もまだ直交系であるとは限らない．それどころか一次独立性すら持たない場合がある．このような tight frame の最も簡単な例は平面の中の3つのベクトルで，互いに 120° の角をなしそれぞれの長さが $\sqrt{2/3}$ であるものである．これらのベクトルを e_1, e_2, e_3 とすると平面上の任意のベクトル x は

$$x = (e_1, x)e_1 + (e_2, x)e_2 + (e_3, x)e_3,$$

(,)は2次元空間の内積と表せることを簡単に示すことができる。しかし2次元空間内の3つのベクトルは一次従属であり、実際

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

である。このような状況は前回述べた連続ウェーブレットの場合と全く同様であることに注意されたい。つまり、連続ウェーブレットはうまく離散化すれば tight frame であるという性質を保つことができるわけである。

ここで tight frame の性質を強調しておきたい。それは上の場合

$$|x|^2 = (e_1, x)^2 + (e_2, x)^2 + (e_3, x)^2$$

が成り立つことである。ピタゴラスの定理そっくりであるが、もちろん意味は異なる。しかし x の長さの2乗(左辺)が各成分の2乗和(右辺)に分割されることに変わりはなく、従って「エネルギーの分割」と解釈できないこともない。この関係は元の連続ウェーブレットにおいても

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da db}{a^2} |T(a, b)|^2$$

という形で成り立つことが確かめられる。しかし、例えば $x = e_1$ とおいた場合でも、 (e_2, x) や (e_3, x) はゼロではないことから分かるように、これらの基底は通常の正規直交系とかなり性質が異なっている。上式の右辺の各々の項や被積分関数を「エネルギー成分」と解釈する場合は、このような事情に十分注意する必要があるだろう。

6. 完全正規直交ウェーブレット

これまで述べてきたように、ウェーブレットを離散化して直交系をつくることはなかなか難しい。しかし、実は、離散ウェーブレットが完全正規直交系となる簡単な例が昔から知られている。それはマザーウェーブレットを次の形に選び(図1),

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x < 1/2) \\ -1 & (1/2 \leq x < 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

次のように $\alpha=1/2$, $\beta=1$ として離散化したもので Haar ウェーブレットとよばれている。

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$$

これらが正規直交系であることは簡単に確かめられる。またこれらが完全系であることも、ウェーブレットの概念が提案されるかなり以前から知られていた。このような完全正規直交ウェーブレット(以下、直交

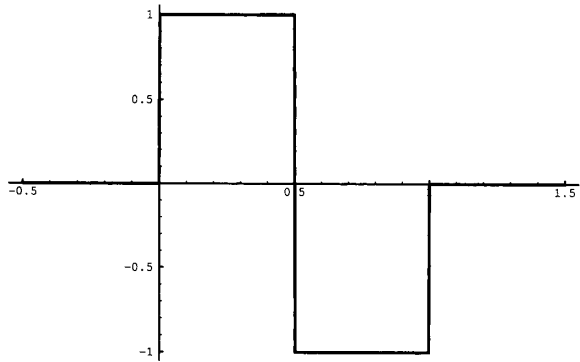


図1 Haar ウェーブレット

ウェーブレット)を用いると、任意関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \sum_{j,k} \langle \psi_{j,k}, f \rangle \psi_{j,k}$$

の形に展開される。ウェーブレットの直交性から、展開係数はすべて独立であり、従って展開係数を操作したときもそれに対応する関数の存在は保証されている。また展開係数の2乗和は関数 $f(x)$ のエネルギーに等しい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \sum_{j,k} |\langle \psi_{j,k}, f \rangle|^2$$

もちろん tight frame の場合と異なり、この関係はピタゴラスの定理そのもの(Parsevalの等式)である。

Haar ウェーブレットは不連続関数による直交ウェーブレットであるが、その組立て方は非常に単純である。しかしこの単純さゆえ、Haar ウェーブレットはもっと他の直交ウェーブレットを作ろうとするときにはあまり参考にならない。実際、連続関数による直交ウェーブレットを構成することは、当初はたいへん難しく、そのようなものは存在しないのではないかとさえ考えられていた。今日知られているような連続性の良い(解析的でさえあるような)直交ウェーブレットが構成されたのは80年代半ばになってからのことである。初めはその構成法はかなり技巧的なものであったが、一度構成に成功したあとは、直交ウェーブレットの構造が詳しく調べられ、その組立て方もある程度自動化されるような枠組みが作り上げられた。次回はこの枠組みの紹介から話を始めることにしたい。

参考文献

- 連続ウェーブレット変換の応用については、
- Combes, J. M. et al. eds.: Wavelets, Springer 1989
- Arneodo et al.: in Nonlinear Dynamics ed. G. Turchetti, World Scientific, 1989, 130
- Benedetto, J. J. et al.: Wavelets-Mathematics and Applica-

tions, CRC Press, 1994

などを見られたい。3 番目のものはアドバンストコースではあるが、数学から応用まで幅広い内容を論じていて大変興味深い。また文中で引用した一色氏の解説は

- ウェーブレット技術セミナー講習会テキスト，三菱総研，1993

に収録されている。

なお，前号でも掲げたが，

- Daubechies, I.: Ten Lectures on Wavelets, SIAM, 1992

は特に数学的細部に詳しい。また

- Chui, C.: An Introduction to Wavelets, Academic Press, 1992
(邦訳：ウェーブレット解析入門，桜井 明・新井 勉，東京電機大学出版局，1993)

- 榑原 進：ウェーブレットビギナーズガイド，東京電機大学出版局，1995

などは日本語で入手可能な入門書である。