《講　座》

ウェーブレット　第3回
直交ウェーブレットと多重解像度解析

山　田　道　夫*

ABSTRACT　This is the third part of an introductory survey on wavelet analysis. Mathematical structure of an orthogonal wavelet is described. An observation of Haar wavelet leads to Multi-Resolution Analysis which is a fundamental concept for orthogonal wavelet.The dilation equation is discussed and how to construct an orthogonal wavelet is described. Mallat transformation and its inverse transformation are also discussed.

1.　はじめに

前回は連続ウェーブレットの応用を述べた後，位置とスケールのパラメータを離散化して得られる離散ウェーブレットについて述べた．離散ウェーブレットは，一般には，直交系となるわけでもまた完全系となるわけでもないが，マザーウェーブレットをうまく選ぶことによって，「フレーム」と呼ばれる完全系にすることができる．しかしこの「フレーム」は，完全系ではあるが，一般には，基底の数が多すぎて，基底同士の間に一次従属関係が生じ，そのため，一つのベクトル（関数）を「フレーム」に属する基底の一次結合として表すとき，その方法が唯一ではなくいくつもある，という面倒な事態を引き起こしてしまう．そのようなややこしさを回避するための最も直截な方法は，離散ウェーブレットを互いに直交するようなものにして完全正規直交基底とすればよい．前回は完全正規直交ウェーブレットの例としてHaarウェーブレットを紹介したが，一般の完全正規直交ウェーブレット（以下，直交ウェーブレットとよぶ）を論じるためには，もっと洗練された概念を導入する必要がある．今回はこの概念の紹介から始めたい．

2.　多重解像度解析

2.1　直交ウェーブレットによる関数展開

この節の話は，線形代数入門のような記述になることをあらかじめお断りしておきたい．多重解像度解析(Multi–Resolution Analysis, MRA）とは，直交ウェーブレットの構成を一般的に論じるための枠組みで，線形代数の言葉を使って定式化された概念である．この枠組みが80年代半ばに発見される以前は，直交ウェーブレットの組立てはいわば手作業であり式変形に関し熟練工のような技術が必要とされた．その組立行程の後ろ半分を自動化したものが多重解像度解析の概念である．この概念のおかげで，直交ウェーブレットの製作が見通しの良いものになったばかりでなく，その構造も透明になり，さらに双直交ウェーブレットやウェーブレットパケットなどへの一般化を行う基礎が得られることとなった．とはいえ，直交ウェーブレットの組立行程の前半分は現在でも手作業の部分を含んでおり，全自動で望みのウェーブレットが得られるようになっているわけではない．多重解像度解析とは2階から出発するエレベータのようなものであり，2階までは今でも階段を歩く必要がある．

Haarウェーブレットについて復習することから始めよう．Haarウェーブレットは

$$\psi(x)=\begin{cases}1\ (0<x\leqq 1/2),\ -1\,(1/2<x\leqq 1),\\ 0\ (\text{otherwise})\end{cases}$$

のように定義されるマザーウェーブレットを用いて

$$\psi_{j,k}(x)=2^{j/2}\psi(2^jx-k)$$

と定義されるウェーブレットであった．これは完全正規直交系をなしており，任意の関数$f(x)$は

$$f(x)=\sum_{j,k}\alpha_{j,k}\psi_{j,k}(x),\ \alpha_{j,k}=\langle\psi_{j,k},f\rangle$$

のように表される．ここで記号$\langle\ \rangle$は内積を意味している．ここで，パラメータjとkは，連続ウェーブレットのパラメータに直せば$a=2^{-j}$, $b=k/2^j$に対応しており，位置xとしては$k/2^j$付近，周波数としては2^j付近の成分に相当している．おおづかみしていえば，

Wavelets. By *Michio Yamada* (Graduate School of Mathematical Sciences, Univ. of Tokyo).
*東京大学大学院数理科学研究科

jは周波数帯のパラメータ，kは位置のパラメータと考えてよい．従って上式の右辺は周波数帯と位置についての和を取っていることになる．

さてこの表現を少し詳しく見てみよう．そのためにまず周波数のパラメータjの値を固定して線形結合

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_{j,k}\psi_{j,k}(x)$$

で表される関数全体(これはもちろん線形空間をなす)を考えてこれをW_jと書くことにする．W_jはさまざまな値のkの$\psi_{j,k}(x)$(jは固定)によって張られる空間である．おおづかみすればW_jは，jの値によって指定されるある周波数帯の成分だけからなる関数の全体，といってよい．いまこのような2つの空間W_jと$W_{j'}$においてjとj'の値が異なるとしよう．このとき

$$\psi_{j,k}(x) \quad と \quad \psi_{j',k'}(x)$$

はウェーブレットの直交性から互いに直交しているから，それぞれによって張られる空間W_jと$W_{j'}$も互いに直交している．すなわち

$$W_j \perp W_{j'}$$

となる．jの値が周波数帯を指定することを思い出せば，異なる周波数帯に属する関数が直交することとして当たり前に見えるかも知れないが，実際には，jとj'の周波数帯が重なり合う場合もあるので，直交性はそれほど明らかなことではない．むしろ，このような重なり合う部分がある場合にどうやって直交性を保証するか，ということが直交ウェーブレットを組み立てる際の課題であるともいえる．さて，先ほどの$f(x)$の表現は，任意の関数はこれらのW_jに属する関数の和として表せることを意味している．

$$f(x)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j(x), f_j(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_{j,k}\psi_{j,k}(x)$$

ここまで明確には触れなかったが，このような表現が許される関数$f(x)$は2乗可積分なもの，すなわち積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx$$

の値が有限なものに限られ（必ずしも限る必要はないが，限った場合が一番簡明な理論の組立てになるのでここでもそうすることにする)，このような関数の全体は通常$L^2(R)$と書かれる．この記号を用いると，W_jに属する元の和として$f(x)$が書ける，という性質は

$$L^2(R)=\overline{\bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j}$$

と簡潔に表現される．ここで右辺の上線は，和としては無限級数の収束先も含む，ということを示している(この上線は式の正しさを保証するためやむを得ずつけたが，全体からみれば「細かいこと」でもありここではあまり気にしないでほしい)．以上でW_jが準備された．これは直交ウェーブレットの周波数パラメータjで分類されていることから分かるように，直交ウェーブレットと直接的に関係する重要な線形空間である．

2.2 多重解像度解析

面白いことに，ウェーブレットの組立てにおいてはW_jより基本的な線形空間がある．いま$f(x)$の表現を

$$f(x)=\lim_{j\to\infty}\sum_{l=-\infty}^{j}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_{l,k}\psi_{l,k}(x)$$

のように書き直そう．このとき右辺に現れる和に注意して，

$$\sum_{l=-\infty}^{j}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_{l,k}\psi_{l,k}(x)$$

の形で表される関数の全体（これも線形空間）をV_jと表すことにしよう．このV_jは，先に導入したW_jを用いると

$$V_j=\overline{\bigoplus_{l=-\infty}^{j} W_l}$$

のように表せる．jが周波数帯に対応することを思い出せば，このV_jはj以下の周波数の成分だけからなる関数の全体を表していることが分かる．従ってjはV_jにおいてはいわば解像度を表しており，jの値が大きくなるほど，高い周波数成分すなわち細かい変動まで含む関数を含んでいる．

上式から分かるように，ここでは空間V_jはW_jを用いて表され，この意味でV_jよりもW_jの方が偉いように見えるが，実は今日では，直交ウェーブレットの組立てにおいては，逆にV_jを基本的な空間として扱い，V_jからW_jを導き出す，という道筋をたどるのが普通である．そこでここで線形空間V_jの性質をまとめておこう．

(MRA 1：単調性)$\cdots\subset V_{-1}\subset V_0\subset V_1\subset\cdots$

この性質は明らかであろう．このことはしばしば「V_jは増大列をなす」と表現される．

(MRA 2：稠密性・分離性)

$$\overline{\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j}=L^2(R), \quad \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j=\{0\}$$

前者の性質は，V_jはjと共に大きくなり極限は$L^2(R)$に一致することを示している．気分的には

$$\lim_{j\to\infty} V_j=L^2(R)$$

と書いてもよさそうな気がするが，よく考えてみると分かるように，集合の極限は実はきちんと定義しておく必要があるので，集合の演算を用いて直接的に（MRA2）のように表現される．後者の性質は，j が小さくなるとき V_j はどこまでも小さくなることを示している．

これも気分は

$$\lim_{j=-\infty} V_j=\{0\}$$

であるが，直接的に（MRA2）のような書き方をしているのである（一般に集合に関する事柄は∩と∪を用いて書くのが最も直接的であり意味が明確になる）．

（MRA 3：スケーリング性）

$$f(x)\in V_j \Longleftrightarrow f(2x)\in V_{j+1}$$

この性質は

$$f(x)=\sum_{l=-\infty}^{j}\alpha_{l,k}\psi_{l,k}(x)$$

であることと

$$f(2x)=\sum_{l=-\infty}^{j+1}\alpha_{l-1,k}\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{l,k}(x)$$

であることが，同値であることの反映である．和の上限が j と $j+1$ で一つずれていることが重要である．これは，等式

$$\psi_{j,k}(2x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{j+1,k}(x)$$

に起因しており，ウェーブレットの性質を直接に反映している．

以上の（MRA1–3）が集合 V_j の主要な 3 つの性質である．しかしこれだけでは実は不十分なことは明らかである．これら 3 つの性質の中には，V_j に特別な関数すなわち直交ウェーブレットを導く関数が住んでいることを要求する項目がない．それを要求するのは次の条件である．

（MRA4：正規直交性）

ある関数 $\phi(x)$ があって

$$\{\phi(x-k)\mid k は整数\}$$

は V_0 の完全正規直交基底となる．

この $\phi(x)$ は直交ウェーブレット $\psi(x)$ とは異なる関数であることに注意してほしい．$\phi(x)$ は通常スケーリング関数と呼ばれる．あるいはマザーウェーブレットと対比してファーザーウェーブレットと呼ばれることもある（以下に示すようにマザーウェーブレットはファーザーウェーブレットから生成されるのでこの名前はちょっとややこしい，旧約聖書的であるというべきか）．Haar ウェーブレットの場合スケーリング関数 $\phi(x)$ はどのような関数だろうか．実は非常に単純な関数

$$\phi(x)=1(0<x\leqslant 1),\quad 0(\text{otherwise})$$

がこのような関数になる．このことを証明するのも可能ではあるが，ここでは話を逆転することにしたい．

いま，まず初めに上式のように定義された関数 $\phi(x)$ があり，それを整数だけ平行移動させたもの

$$\{\phi(x-k)\mid k は整数\}$$

（これらが互いに直交することは明らかである）を考え，それらによって張られる線形空間を V_0 とする（MRA4）．つぎに V_0 に属する関数 $f(x)$ に対して $f(2x)$ を考え，このような関数全体（これは線形空間をなす）から成る空間を V_1 とする．また同様に $f(x/2)$ 全体から成る空間を V_{-1} とする（MRA3）．この手続きを繰り返して線形空間の増大列 V_j（j はすべての整数）を得る（MRA1）．このようにして得られた空間 V_j について

$$\overline{\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j}=L^2(R),\quad \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j=\{0\}$$

が成り立つことを示すことができる（稠密性と分離性（MRA2））．そこでこのような V_0 に対応する $\psi(x)$ はどのようなものになるのか，ということを考えるのである．この場合には答は Harr ウェーブレットであるが，それはどうやったら導くことができるだろうか？

実は次節で示すように，この問題は，一般に（MRA1–4）を満たす V_j と $\phi(x)$ が与えられたときそれに対応する直交ウェーブレット $\psi(x)$ はどのようなものか，という形に定式化し解くことができる．このような（MRA1–4）を満たす V_j と $\phi(x)$ の組は多重解像度解析（Multi–Resolution Analysis, MRA）とよばれる．この名前は，先に述べたように，V_j が j と共に解像度を上げていく空間を表していることによっている．まっとうな直交ウェーブレットは，すべてこのような多重解像度解析から構成することができる（例外的に病的な直交ウェーブレットでは多重解像度解析を作ろうとしても $\phi(x)$ が存在しないものがあるが，このようなウェーブレットが実用に供された例を筆者は知らない）．

3.　直交ウェーブレットの構成

3.1　直交補空間の基底と直交ウェーブレット

前節で多重解像度解析の定義を与えた．しかし一から多重解像度解析を組み立てようとすると，やや数学的な細部に注意が必要で，特に稠密性と分離性の条件

(MRA2) を満たすようにスケーリング関数 $\phi(x)$ を作らなければならない．これは，先に述べた「手作り」に相当する部分で，一般的に適用できるマニュアルは存在しない．とはいえ，この10年ほどの間にさまざまな多重解像度解析が構成され実用化されてきており，なにかよほど必要に迫られてこれまで知られていない新しい形のウェーブレットを構成しようとする場合以外は，従来から知られている代表的な多重解像度解析を理解しておけばそれで十分であると思われる．そこで，ここではこのような多重解像度解析がすでに与えられているとし，そこからどうやって直交ウェーブレットを組み立てるか，ということに重点をおいて述べてゆきたい．すでにいくつかの代表的直交ウェーブレットがある現在では，それらをそのまま（特に何かのライブラリを引用して）用いる限りあまり数学的細部に立ち入る必要はない，といえるかもしれない．しかし，これらの直交ウェーブレットでも，数値計算，とくに展開係数の計算などでは，しばしば，直交ウェーブレットの構造そのものに根ざしたアルゴリズムが用いられるし，また展開係数の意味を考える際にも，このような数学的構造の理解は無駄ではないと思われる．

まず，スケーリング関数についての次のような観察から始めよう．いま関数 $f(x)$ が V_1 に属しているとしよう．このときスケーリング性（MRA3）から $f(x/2)\in V_0$ となるが，V_0 に属する関数はすべて $\{\phi(x-k)\mid k$ は整数$\}$ の一次結合で表わせる（正規直交性 (MRA4)）から，適当な係数 α_k を用いて

$$f(x/2)=\sum_k \alpha_k\phi(x-k)$$

と書くことができる．ここで $x/2$ をあらためて x と書くと

$$f(x)=\sum_k \alpha_k\phi(2x-k)$$

となる．これは $\{\phi(2x-k)\mid k$ は整数$\}$ が V_1 の基底であることを示している．$\phi(2x-k)$ の直交性は容易に確認できるから，結局「$\{\sqrt{2}\,\phi(2x-k)\mid k$ は整数$\}$ は V_1 の完全正規直交基底」であることが分かる．同じようにすれば次のことも明らかであろう．

「$\{2^{j/2}\phi(2^jx-k)\mid k$ は整数$\}$ は
V_j の完全正規直交基底」．

つぎに，直交ウェーブレットが張る空間を考えたい．このため，増大列 V_j について，V_{j+1} と V_j の「差」，つまり

$$V_{j+1}=V_j\oplus W_j,\quad V_j\perp W_j$$

となる線形空間 W_j，すなわち V_{j+1} における V_j の直交補空間 W_j を考えることにする．

$$V_j=W_{j-1}\oplus V_{j-1}=W_{j-1}\oplus W_{j-2}\oplus V_{j-2}=\cdots$$
$$=\left(\bigoplus_{k=0}^{j-1} W_k\right)\oplus V_0=\overline{\bigoplus_{k=-\infty}^{j-1} W_k}$$

であり，従って

$$L^2(R)=\overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} V_j}=\overline{\bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j}$$

これらの W_j はすべて互いに直交していることに注意しよう．さて，いま「$f(x)\in W_0$」であることは，「$f(x)\in V_1$ かつ $f(x)\perp V_0$」と同値であり，すぐに分かるように，これは「$f(2x)\in V_2$ かつ $f(2x)\perp V_1$」と同値となる．これはすなわち「$f(2x)\in W_2$」と同値であり，同じような議論をすると「$f(2^jx)\in W_j$」と同値であることが分かる．これは重要な結果である．なぜならこのことは，もしある関数 $\psi(x)$ が「$\{\psi(x-k)\mid k$ は整数$\}$ は W_0 の完全正規直交系」という性質を満たせば，「$\{2^{j/2}\psi(2^jx-k)\mid k$ は整数$\}$ は W_j の完全正規直交系」となることを意味しているからである．W_j すべてを用いると $L^2(R)$ 全体を張ることができるから，これは結局 $\psi(x)$ が求める直交ウェーブレットであることを示している．すなわち，直交ウェーブレットのマザーウェーブレットは，

「$\{\psi(x-k\mid k$ は整数$\}$ は W_0 の完全正規直交系」　（＃）

となる関数 $\psi(x)$ である．

3.2 マザーウェーブレットの構成

上の条件（＃）を満たす関数はどのようにしたら得られるだろうか．実はこの答は非常に単純であるので，まず結果から述べることにしよう．いまスケーリング関数は，ある定数 h_k を用いて

$$\phi(t)=\sum_k h_k\sqrt{2}\,\phi(2x-k)$$

という関係式を満たす．なぜなら $\phi(x)\in V_0\subset V_1$ であり，$\phi(2x-k)$ は V_1 の正規完全直交基底となっているのでこれを用いて $\phi(x)$ を展開できるからである．上の関係式はこの展開そのものである．この関係式は直交ウェーブレット理論で最も重要な関係式の一つで伸長方程式（dilation equation），あるいは2スケール関係式などと呼ばれている．また，マザーウェーブレットについても $\psi(x)\in W_0\subset V_1$ であるから同様の展開

$$\psi(x)=\sum_k g_k\sqrt{2}\,\phi(2x-k)$$

が可能である．いま $\phi(x)$ は既知としているから h_k も既知であり，我々の問題は係数 g_k を求めることに帰着される．この問題の答は次のようなものである．

$$g_k=(-1)^k h_{1-k+2N}\quad (N\text{は任意の固定した整数})$$

ここでマザーウェーブレットは整数だけ平行移動させても同じ直交ウェーブレットを生成することに注意されたい．上式における任意整数定数 N はこの平行移動に対応している．

このように多重解像度解析からマザーウェーブレットを作り上げる手続きは非常に簡明である．この g_k に対する簡明な結果を導くこともそれほど難しくない．ポイントはすべてフーリエ変換して考えることである．まずスケーリング関数 $\phi(x)$ のフーリエ変換は，上の伸長方程式を用いて，

$$\hat{\phi}(\omega)=m_0\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

となることが容易に分かる．ここで

$$m_0(\omega)=\sum_k \frac{h_k}{\sqrt{2}}e^{-ik\omega}$$

とおいた．h_k は分かっているから $m_0(\omega)$ は既知関数である．そこで同様に $\psi(\omega)$ についてもフーリエ変換を行うと

$$\hat{\psi}(\omega)=m_1\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$m_1(\omega)=\sum_k \frac{g_k}{\sqrt{2}}e^{-ik\omega}$$

となることが容易に分かる．このようにして問題は関数 m_1（ω）を決定することに帰着される．

まず $\{\phi(x-k) \mid k$ は整数$\}$ が正規直交系をなしていることに注意しよう．この条件は関数 $m_0(\omega)$ に関する次の条件と同値であることが容易に証明できる．

$$|m_0(\omega)|^2+|m_0(\omega+\pi)|^2=1$$

全く同様にして $\{\psi(x-k) \mid (k$ は整数$)\}$ が正規直交系をなすための必要十分条件は，

$$|m_1(\omega)|^2+|m_1(\omega+\pi)|^2=1$$

と同値であることが証明できる．さらに，$\{\phi(x-k) \mid k$ は整数$\}$ と $\{\psi(x-n) \mid n$ は整数$\}$ は，それぞれ V_0 と W_0 の元であるから直交しなければならない．この直交条件は上と同様にして

$$\overline{m_0(\omega)}m_1(\omega)+\overline{m_0(\omega+\pi)}m_1(\omega+\pi)=0$$

と書くことができる．ここで上線は複素共役を表わす．さて，$m_0(\omega)$ がどのような関数ならば上の3つの条件を満たすことができるだろうか？これはパズルのようなもので，

$$m_1(\omega)=e^{-(2N+1)i\omega}\overline{m_0(\omega+\pi)},\quad (N\text{は整数})$$

とおけばよいことはすぐに確認できるだろう．実際これがマザーウェーブレットを正しく与えることを証明することができる．この関係を係数 h_k と g_k の関係式に書き直したものが先に述べた簡明な関係に他ならない．なお次の関係が成り立つことを注意しておく．

$$\hat{\phi}(\omega)=\prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\omega}{2^j}\right)$$

この関係式は $\hat{\phi}(0)=1$（これは一般的に成り立つことを示せる）に注意すれば伸長方程式のフーリエ変換から直ちに得られる．代表的ウェーブレットの中には h_k の値から出発するものもあり，このような場合 $m_0(\omega)$ を通してスケーリング関数を求めるこの関係式は便利で実用的なものである．マザーウェーブレットを作り上げるという一見非常に複雑そうな作業は，このようにして比較的簡単に行うことができる．さまざまの関係式が互いに単純な関係で結びついていて，計算が予想以上に単純に遂行できる様子は見事な工芸品の感さえある．

3.3 Mallat 変換

上で述べたような数学的構成は，実はウェーブレット展開係数の数値計算と密接に関連している．いま V_1 に属する関数 $f(x)$ が与えられたとしよう．V_1 は $\{\sqrt{2}\phi(2x-k) \mid$ k は整数$\}$ によって張られる空間だから

$$f(x)=\sum_m C_m^1\sqrt{2}\phi(2x-m)$$

と展開することができる．ところで $V_1=V_0\oplus W_0$ だから f(x) は

$$f(x)=\sum_l C_l^0\phi(x-l)+\sum_l D_l^0\psi(x-l)$$

のようにも展開することができる．これら2つの展開はどのような関係を持っのだろうか？いま伸長方程式に注意すると

$$\begin{aligned}C_l^0&=\int\overline{\phi(x-l)}f(x)\,dx\\&=\int\overline{\sum_k h_k\sqrt{2}\phi(2x-2l-k)}\\&\quad\times\sum_m C_m^1\sqrt{2}\phi(2x-m)\,dx\\&=\sum_m \bar{h}_{m-2l}C_m^1\end{aligned}$$

という関係式が得られる．また同様にして

$$D_l^0=\sum_m \bar{g}_{m-2l}C_m^1$$

が得られる．ここに得られた関係式を Malla t変換という．これは $j-1$ と j の間にも成り立つことは明らかだから，例えば $j=0$ から出発して

$$\begin{array}{ccccccc}C_l^0 & \to & C_l^{-1} & \to & C_l^{-2} & \to\cdots\to & C_l^{-n}\\ & \searrow & & \searrow & & \searrow\quad\searrow & \\ & & D_l^{-1} & & D_l^{-2} & & D_l^{-n}\end{array}$$

のように次々と変換され

$$\{C_l^0\}\longrightarrow\{D_l^{-1},D_l^{-2},\cdots,D_l^{-n},C_l^{-n}\}$$

が得られることになる．ここに得られた展開係数 D_l^j は，直交ウーブレットによる展開係数に他ならないことに注意しよう．この階段型のアルゴリズムは直交ウェーブレット展開のアルゴリズムにほかならない．

展開アルゴリズムがあるならその逆方向のアルゴリズムはどのようなものだろうか？もう一度上の$f(x)$の２つの展開に戻ろう．いま $V_0 \oplus W_0$ における展開式に伸長方程式を用いると

$$f(t)=\sum_{k'}\left(\sum_l C_l^0 h_{k'-2l}+\sum_l D_l^0 g_{k'-2l}\right)\times\sqrt{2}\,\phi(2x-k')$$

が得られる．これを V_1 における展開式と比較し，係数を等値することで次の関係式を得る．

$$C_m^1=\sum_l C_l^0 h_{m-2l}+\sum_l D_l^0 g_{m-2l}$$

これは明らかにjと$j-1$の間でも成り立つ関係であり，逆 Mallat 変換と呼ばれる．この操作を次々に繰り返すことにより，

$$\{C_l^{-n}, D_l^{-n}, D_l^{-(n-1)}, \cdots, D_l^{-1}\}\longrightarrow\{C_l^0\}$$

となりもとの関数$f(t)$ の V_0 での展開係数が再現されることになる．

ここに述べたアルゴリズムが具体的展開法を与えている，という説明はやや補足が必要である．我々はまず，例えば時系列などのように，等間隔でサンプリングされた関数値を与えられるのであって，その展開係数である C_l^0 を与えられるわけではない．従って，関数値からこれらの C_l^0 を求めることが必要である．この手続きはもちろん，定義通り関数とスケーリング関数の内積を正直に数値計算することによって行うことができる．しかし多くの場合これは手間がかかりすぎる．そこで簡便法として，スケーリング関数による展開係数 C_l^0 は関数値そのものと等しい，とおいてしまう方法がある．これはもちろん乱暴ではあるが，結構役に立つので，しばしば実用に用いられる方法である．また Mallat 変換および逆変換は畳み込み（convolution）の形式をしているため，FFT を用いた高速計算が可能であることを注意しておく．

以上，今回は直交ウェーブレットの構成法を中心に述べた．数学的形式の議論が多く応用には全く触れる余裕が無かったが，次回（最終回）は，具体的な直交ウェーブレットをいくつか挙げてそれらの応用について触れ，さらに双直交ウェーブレットの考え方とその応用についても述べてみたい．

参　考　文　献

直交ウェーブレットの数学については，いろいろな立場や手法を用いた本がある．ここでは数学的だが比較的読みやすいものとして

- Daubechies, I.: Ten Lectures on Wavelets, SIAM, 1992.
  また，日本語で手にはいるものとして
- Chui, C.: An Introduction to Wavelets, Academic Press, 1992.
  （邦訳：ウェーブレット解析入門，桜井明・新井勉，東京電機大学出版局，1993）
- 榊原進：ウェーヴレットビギナーズガイド，東京電機大学出版局，1995.
- Benedetto, J. J. et al.: Wavelets–Mathematics and Applications, CRC Press, 1994.
  （邦訳：ウェーブレット，基礎と応用，山口昌哉・山田道夫監訳，シュプリンガー・フェアラーク東京，1995）
  を挙げておく．