

正則関数 Trefftz 法と特異関数 Trefftz 法による 2 次元ポテンシャル問題感度解析[†]

北 栄 輔*・神 谷 紀 生**・池 田 洋 一***

ABSTRACT Trefftz method is formulated by introducing regular T-complete function or singular fundamental solution. In our previous studies, regular-function Trefftz method using the regular T-complete function was applied to the sensitivity analysis of two and three-dimensional potential problems. On the other hands, in this paper, singular-function Trefftz method using the singular fundamental solution is applied to the sensitivity analysis of two-dimensional potential problem. Finally, simple numerical examples are shown in order to confirm validity of the schemes.

Key Words: Trefftz Method, T-complete function, Fundamental solution, Potential Problem, Sensitivity Analysis.

1. 緒 論

Trefftz 法は、1926年に Trefftz¹⁾により初めて提案されたあと、多くの研究者によって研究が進められてきた^{2)~34)}。このうち、理論的な検討の多くは、Herrera^{8)~12)}によってなされた。また応用研究については、神谷ら^{19),20)}が Helmholtz 方程式の固有値問題に適用し、北ら^{21)~24)}は感度解析に適用した。

本来の Trefftz 法では支配方程式を満足する関数の線形結合によって問題の解を近似し、境界条件を満足するように未知係数を決定する。したがって、未知数を含む方程式は境界についての項だけから構成されるので Trefftz 法は境界型解法と考えられ、入力データ作成やメッシュ分割などの点で境界要素法と同様の利点がある。ここで問題の解に対する近似関数として、一般には非特異な T-complete 関数を用いられる^{3)~6),8)~24),30)~34)}。このため未知係数を含む方程式も非特異となり、境界要素法で生じる特異積分は Trefftz 法では生じない。しかし、支配方程式を満足する関数は T-complete 関数だけではなく、境界要素

法で用いられる基本解も支配方程式を満足している。そこで、基本解などの特異性を有する関数を用いた Trefftz 法の定式化も提案されている^{2),7),25)~29),34)}。このような定式化は、最初 Oliveira²⁵⁾により提案された。彼は重ね合わせの原理に基づき、支配方程式を満足する特異関数の線形結合で問題の解を近似し、未知係数を境界条件に合わせて決定する定式化法を示した。これは Trefftz の示した定式化と全く同一であるが、彼は Trefftz と独立に提案している。また、Patterson と Sheikh^{26)~29)}は境界要素法の基本解を用いた Trefftz 法を“Modified Trefftz Method”と名付け、ポテンシャル問題や弾性問題の解析に適用している。しかし、本論文では正則な T-complete 関数と基本解に代表される特異関数を用いる点を強調するために、“正則関数 Trefftz 法”および“特異関数 Trefftz 法”という用語を用いる。ところで、特異関数 Trefftz 法の定式化ではソース点を解析対象領域の外側に配置することによって、解析対象の領域内では常に支配方程式を満足するように定式化される。したがって、特異関数 Trefftz 法は基本解を用いるにも関わらず、問題の解の近似式は解析対象内では正則となる。Trefftz 法の定式化は選点法・最小 2 乗法・Galerkin 法などで定式化されるが、本論文では選点法を用いる。その結果、選点法による特異関数 Trefftz 法の定式化から導かれる式は、境界要素法の間接法の一つである電荷重畳法(代用電荷法)と同様な式となるので、本論文ではこの点についても議論する。

上記のように Trefftz 法は定式化が非特異となる境界型解法である。このような Trefftz 法の特徴を生か

Sensitivity Analysis of Two-Dimensional Potential Problem by Regular and Singular-function Trefftz Methods. By Eisuke Kita (Graduate School of Engineering, Nagoya Univ.), Norio Komiya (School of Informatics and Sciences, Nagoya Univ.) and Youichi Ikeda (Dept. of Mechanical Engineering, Daido Technical Institute).

*名古屋大学大学院工学研究科

**名古屋大学情報文化学部

***大同工業大学機械工学科

[†]1994年9月9日受付 1994年12月26日再受付

すため、著者らはこれまで形状寸法や境界条件に対する感度解析に Trefftz 法を適用した^{21)~24)}。これまでの研究では、定式化に一貫して正則関数 Trefftz 法を用いた。それは、特異関数 Trefftz 法ではソース点を解析対象の外側にとるので、計算精度がソース点の配置に強く依存するからである。しかし、正則関数 Trefftz 法にも問題がないわけではない。それは T-complete 関数が座標原点と境界点の距離のべき乗関数であるため、適切な座標変換を施さなければ係数マトリックスの条件数が大きくなってしまいうことである。これに対して、特異関数 Trefftz 法で用いる基本解は 2 点間距離の関数であるため、係数マトリックスの条件数は正則関数 Trefftz 法に比べてあまり大きくならないと期待できる。ところで、これまでの研究の多くは定式化に T-complete 関数と特異関数のどちらか一方を用いており、両者をまとめて比較しているものはない。そこで本論文では、まず正則関数 Trefftz 法と特異関数 Trefftz 法の定式化をまとめて示すとともに、それらに基づく感度解析手法を示す。そして、2 次元ポテンシャル問題の簡単な例題を通じて 2 つの Trefftz 法の特徴について検討する。

2. Trefftz 法の定式化

2.1 T-complete 関数と基本解

2 次元ポテンシャル問題の支配方程式と境界条件は次式で与えられる。

$$\nabla^2 u = 0 \quad (\text{in } \Omega) \quad (1)$$

$$u = \bar{u} \quad (\text{on } \Gamma_1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} (\equiv q) = \bar{q} \quad (\text{on } \Gamma_2) \quad (2)$$

ここで、 Ω は解析対象領域を、 Γ_1, Γ_2 はポテンシャル u の指定境界、フラックス q の指定境界を示す。また n は境界での単位法線ベクトルを、 $(\bar{\cdot})$ は指定境界条件値を示す。

Trefftz 法では、式(1)を満足する関数を用いて解を近似する。正則関数 Trefftz 法では近似関数に T-complete 関数を用いる。2 次元閉領域での Laplace 問題について、式(1)を変数分離で解けば、T-complete 関数 u^* は次のように求められる¹¹⁾。

$$\{u_j^*\} = \{r^{\nu} e^{j\nu\theta}\} \quad (\nu=0, 1, \dots) \quad (3)$$

ここで j は虚数単位であり、 r, θ は任意に取られた平面極座標における任意点の座標である。また、 r は特異関数 Trefftz 法の定式化で用いる基本解の 2 点間距離 $r(P, Q)$ とは異なるので、注意しなければならない。

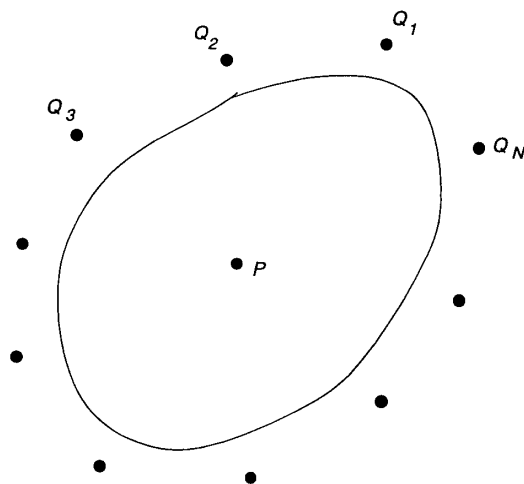


図1 観測点とソース点

正則関数 Trefftz 法では、式(3)に示されるような正則な関数を用いて定式化を行うのに対して、特異関数 Trefftz 法では観測点とソース点の 2 点間距離の関数である基本解を用いて定式化を行う。2 次元 Laplace 問題に対する基本解は次式で与えられる³⁵⁾。

$$u^*(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r(P, Q)} \right) \quad (4)$$

ここで P は解析対象の境界上に取られた観測点を示し、 Q はソース点を示す。 $r(P, Q)$ は P と Q の 2 点間距離を示し、次式で定義される。

$$r(P, Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} \quad (5)$$

ところで、式(4)で示される基本解は非同次方程式

$$\nabla^2 u + \delta(P, Q) = 0 \quad (\text{in } \Omega) \quad (6)$$

の解であるから、ソース点 Q が領域 Ω に含まれる場合 $P=Q$ は特異点となり、式(1)が成り立たない。そこで、ソース点 Q を領域 Ω の外にとることによって、領域 Ω 内では基本解(式(4))が式(1)を満足するようにしなければならない。つまり、特異関数 Trefftz 法の定式化では、図1に示すようにソース点 Q を領域 Ω の外側にとることになる。この結果、定式化に用いる基本解は特異関数であるにも関わらず、解析対象領域における Trefftz 法の定式化には特異性は含まれない。

2.2 選点法による定式化

Trefftz 法では、領域内の任意点 P でのポテンシャル u を、支配方程式を満足する関数の線形結合によって近似する。正則関数 Trefftz 法では、近似関数として T-complete 関数 u_j^* をとり、次のようになる。

$$u(P) \simeq \bar{u}(P) = a_1 u_1^* + a_2 u_2^* + \cdots + a_N u_N^* \\ = \mathbf{a}^T \mathbf{u}^*(P) \quad (7)$$

ここで N は T-complete 関数の総数を示し, $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}^T$ は未知定数ベクトルである. 一方, 特異関数 Trefftz 法では近似関数に基本解をとり, 次のように線形近似する.

$$u(P) \simeq \bar{u}(P) = a_1 u^*(P, Q_1) + a_2 u^*(P, Q_2) \\ + \cdots + a_N u^*(P, Q_N) \\ \equiv \mathbf{a}^T \mathbf{u}^*(P) \quad (8)$$

ここで N はソース点の総数であり, $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}^T$ は未知定数ベクトルを示す.

式(7)または式(8)を境界の法線方向に微分すれば境界でのフラックス $q(P)$ の近似式を得る.

$$q(P) \simeq \bar{q}(P) = \frac{\partial \bar{u}(P)}{\partial n} = \mathbf{a}^T \mathbf{q}^*(P) \quad (9)$$

式(7), (8), (9)を境界条件式(2)に代入すると, 境界条件は完全には満足されないので残差が生じる.

つまり,

$$P \in \Gamma_1: R_1 \equiv \bar{u} - u = \mathbf{a}^T \mathbf{u}^*(P) - \bar{u}(P) \neq 0 \\ P \in \Gamma_2: R_2 \equiv \bar{q} - q = \mathbf{a}^T \mathbf{q}^*(P) - \bar{q}(P) \neq 0 \quad (10)$$

Trefftz 法では境界条件を近似的に満足するように係数ベクトル $\mathbf{a}$ を定める. 定式化に選点法を用いる場合, 境界上にとられた選点 P_i で残差を 0 とおく.

つまり, 式(10)より

$$P_i \in \Gamma_1: R_1(P_i) = \mathbf{a}^T \mathbf{u}^*(P_i) - \bar{u}(P_i) = 0 (i=1 \cdots, M_1) \\ P_i \in \Gamma_2: R_2(P_i) = \mathbf{a}^T \mathbf{q}^*(P_i) - \bar{q}(P_i) = 0 (i=1 \cdots, M_2) \quad (11)$$

ここで, M_1, M_2 はそれぞれ Γ_1, Γ_2 上にとられた選点の総数である. 上式を整理すると,

$$\mathbf{a}^T \mathbf{u}^*(P_i) = \bar{u}(P_i) (P_i \in \Gamma_1) \\ \mathbf{a}^T \mathbf{q}^*(P_i) = \bar{q}(P_i) (P_i \in \Gamma_2) \quad (12)$$

これをマトリックス表示すると,

$$\begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & \cdots & u_{1N}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & \cdots & u_{2N}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{M_1 1}^* & u_{M_1 2}^* & \cdots & u_{M_1 N}^* \\ q_{11}^* & q_{12}^* & \cdots & q_{1N}^* \\ q_{21}^* & q_{22}^* & \cdots & q_{2N}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{M_2 1}^* & q_{M_2 2}^* & \cdots & q_{M_2 N}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \vdots \\ \bar{u}_{M_1} \\ \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \vdots \\ \bar{q}_{M_2} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

ここで $\bar{u}(P_i) \equiv \bar{u}_i$, $\bar{q}(P_i) \equiv \bar{q}_i$ である. また, 正則関数 Trefftz 法の場合 $u_j^*(P_i) \equiv u_{ij}^*$, $q_j^*(P_i) \equiv q_{ij}^*$ であり, 特異関数 Trefftz 法の場合 $u^*(P_i, Q_j) \equiv u_{ij}^*$, $q^*(P_i, Q_j) \equiv q_{ij}^*$ である. 上式を次のように表す.

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (14)$$

式(14)の係数マトリックスは $M \times N$ ($M = M_1 + M_2$) となっている. したがって, $M = N$ ならばそのまま解くことができるが, $M \neq N$ ならばそのまま解くことができない. そこで, $M > N$ の場合は式(14)に最小 2 乗法を適用する.

2.3 特異関数 Trefftz 法と電荷重畳法の比較

電荷重畳法では, 解析対象 Ω の境界 Γ を含むように仮想境界 Γ' をとる (図 2). 解析対象領域内の任意点 P でのポテンシャル $u(P)$ は, Γ' 上に分布する未知の密度関数 $a(Q)$ と基本解 u^* によって, 次のように表される.

$$u(P) = \int_{\Gamma'} u^*(P, Q) a(Q) d\Gamma \quad (15)$$

P が Γ 上にある場合に, 上式を P で境界の法線方向に微分すればフラックスの近似式を得る.

$$q(P) \equiv \frac{\partial u(P)}{\partial n} = \int_{\Gamma'} \frac{\partial u^*(P, Q)}{\partial n} a(Q) d\Gamma \\ = \int_{\Gamma'} q^*(P, Q) a(Q) d\Gamma \quad (16)$$

Γ' をいくつかの境界要素 Γ_j' に分割し, そこでの分布関数 $a(Q)$ を次のように近似する.

$$a(Q) = \phi^T \mathbf{a}$$

ここで, $\mathbf{a}$ は要素 Γ_j' 上に取られた節点での密度関数値からなるベクトルであり, ϕ は内挿関数ベクトルである. 式(15)と(16)に上式を代入して離散化すれば次式を得る.

$$u(P) = \sum_j \int_{\Gamma_j'} u^* \phi^T d\Gamma \mathbf{a} \quad (17)$$

$$q(P) = \sum_j \int_{\Gamma_j'} q^* \phi^T d\Gamma \mathbf{a} \quad (18)$$

次に境界 Γ 上にいくつかの選点 P_i を取り, それらの選点において式(17)または(18)が成り立つと考えれば次式を得る.

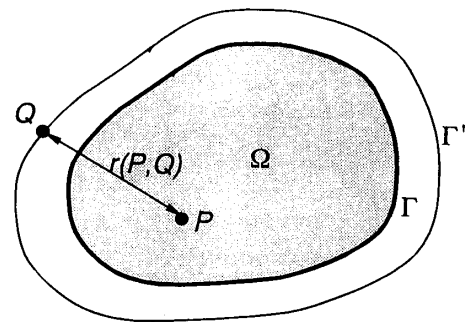


図 2 実境界と仮想境界

$$P_i \text{ on } \Gamma_1 \quad u(P_i) \equiv u_i = \sum_j \int_{\Gamma_j} u^* \phi^T d\Gamma a = \sum_j h_{ij} a_j$$

$$P_i \text{ on } \Gamma_2 \quad q(P_i) \equiv q_i = \sum_j \int_{\Gamma_j} q^* \phi^T d\Gamma a = \sum_j g_{ij} a_j$$

これらをまとめてマトリックス表示すると

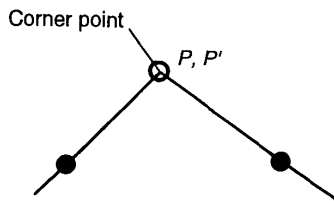
$$K\mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (19)$$

ここで、 K は h_{ij} や g_{ij} からなる係数マトリックスであり、 $\mathbf{f}$ は境界条件値のベクトルである。また、この式では $\mathbf{a}$ は全節点での関数値からなるベクトルである。

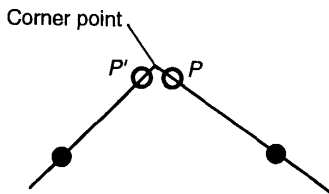
上式は、マトリックス K が基本解の境界積分によって構成されていることを除くと、特異関数 Trefftz 法の定式化から導かれた式と類似している。このことは、従来間接法境界要素法の1つと考えられていた電荷重畳法が、基本解を用いた Trefftz 法（特異関数 Trefftz 法）の1つとも考えられることを示している。また、電荷重畳法では、式(15)を静電界の定理によって保証しているのに対して、Trefftz 法では数学理論の面から同様の関係式を導き出していると考えられることもできる。

2.4 かど点での選点配置

境界条件の種類や値が変化する境界上の点を、ここではかど点と呼ぶことにする。かど点に対する境界条



(a) Coincident double collocation points



(b) Near-by double collocation points

図3 2重選点

件の与え方は、精度良く解析を行うために非常に重要である。かど点のタイプにはいくつかあるが、本論文で用いるプログラムでは次の2つの場合

- かど点の両側で境界条件の種類が変化する場合
- かど点の両側で異なる法線ベクトルをもつフラックス値が与えられている場合

には、かど点に同じ座標値を持つ2つの選点をとる方法を用いる。これを、ここでは完全2重選点法 (Coincident double collocation points) とよぶことにする (図3(a))。これ以外のかど点については、完全2重選点法を用いると係数マトリックスに同じ成分を持つ行が2つ生じてマトリックスが特異となるため、かど点からずらして2選点をとる方法を用いる。これを近接2重選点法 (Near-by double collocation points) とよぶことにする (図3(b))。ただし、近接2重選点法を用いる場合、選点配置が計算精度に影響するので、用いる計算機の計算精度も考慮してずらし量を決定しなければならない。

2.5 係数マトリックスの条件数

著者らの以前の研究^{21)~24)}において指摘したように、正則関数 Trefftz 法では係数マトリックスの条件数の増大による計算精度の低下が重要な問題となる。これは、T-complete 関数が原点と選点の距離 r のべき乗の関数であるため、T-complete 関数の個数 N が大きくなると $r > 1$ の場合 r^N が非常に大きくなる ($r < 1$ の場合 r^N が非常に小さくなる) ために生じる。この問題を解決するために次のような座標変換を行う¹⁷⁾。

- 解析対象の図心が座標原点となるように座標変換する。
- その上で、図心と各選点の距離の平均値が1となるようにスケーリングする。

この方法を用いることで、選点 P_i への座標 (x_i, y_i) は次のように座標変換される。

$$\hat{x}_i = (x_i - x_c)/D, \quad \hat{y}_i = (y_i - y_c)/D \quad (20)$$

ここで x_c, y_c は初期座標系における図心座標であり、 D はスケーリング係数である。これらは次のように与えられる。

$$x_c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x_i$$

$$y_c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M y_i$$

$$D = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$$

このような座標変換は正則関数 Trefftz 法にのみ適用

され、特異関数 Trefftz 法には適用されない。これは、特異関数 Trefftz 法では基本解に含まれる r が 2 点間距離の関数であるため、このような操作を用いなくとも条件数の増加が抑制されるからである。

3. 感度解析

3.1 形状感度解析

最初に解析対象の形状パラメータについての感度解析について考える。解析対象領域内にとられた任意点 R でのポテンシャル値 $u(R)$ とフラックス値 $q(R)$ は次式のように近似される。

$$\begin{aligned} u(R) &\simeq \tilde{u} = \mathbf{a}^T \mathbf{u}^*(R) \\ q(R) &\simeq \tilde{q} = \mathbf{a}^T \mathbf{q}^*(R) \end{aligned} \quad (21)$$

ここで、 $\mathbf{u}^*$ 、 $\mathbf{q}^*$ は関数値を計算する点 R の座標値によって決定されるのに対して、 $\mathbf{a}$ は解析対象の形状や境界条件によって決定される数値である。このことに注意して、上式を形状パラメータで微分すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \dot{u}(R) &= \dot{\mathbf{a}}^T \mathbf{u}^*(R) \\ \dot{q}(R) &= \dot{\mathbf{a}}^T \mathbf{q}^*(R) \end{aligned} \quad (22)$$

ここで、 $(\dot{})$ は形状パラメータについての微分を示す。また、 $\dot{\mathbf{a}}$ は式(14)から次のようにして求めることができる。

まず、式(14)の両辺を形状パラメータで微分すると次式を得る。

$$\dot{\mathbf{K}}\mathbf{a} + \mathbf{K}\dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{f}} \quad (23)$$

したがって

$$\mathbf{K}\dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{f}} - \dot{\mathbf{K}}\mathbf{a} \quad (24)$$

または、境界条件が形状変更によって変化しない場合は $\dot{\mathbf{f}} = 0$ となるから

$$\mathbf{K}\dot{\mathbf{a}} = -\dot{\mathbf{K}}\mathbf{a} \quad (25)$$

これらから $\dot{\mathbf{a}}$ を計算して式(22)へ代入すれば感度を求めることができる。また、式(24)と式(25)の左辺係数マトリックス $\mathbf{K}$ は感度解析に先立つ初期解析で用いるもの(式(14))と同じなので、初期解析の段階で LU 分解しておけば、感度解析の段階では簡単な計算によって $\dot{\mathbf{a}}$ を求めることができる。このことは、計算効率改善のためには非常に有利である。

3.2 境界条件感度解析

次に境界条件値に対する感度解析について考える。ポテンシャルとフラックスは式(21)で与えられるので、これらを境界条件値について微分する。このとき、 $\mathbf{u}^*(R)$ 、 $\mathbf{q}^*(R)$ が境界条件値の関数でないことに注意すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \dot{u}(R) &= \dot{\mathbf{a}}^T \mathbf{u}^*(R) \\ \dot{q}(R) &= \dot{\mathbf{a}}^T \mathbf{q}^*(R) \end{aligned} \quad (26)$$

ここで、 $(\dot{})$ は境界条件値についての微分を示す。次に、 $\dot{\mathbf{a}}$ を求めるために式(14)の両辺を境界条件値で微分すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}}\mathbf{a} + \mathbf{K}\dot{\mathbf{a}} &= \dot{\mathbf{f}} \\ \mathbf{K}\dot{\mathbf{a}} &= \dot{\mathbf{f}} \\ \dot{\mathbf{a}} &= \mathbf{K}^{-1}\dot{\mathbf{f}} \end{aligned} \quad (27)$$

これを式(26)に代入すれば境界条件値に対する感度を求めることができる。

4. 解析例

4.1 解析例 1

解析対象と選点配置 最初に厚肉円筒の熱伝導解析を考える。対象は内半径 r_1 、外半径 $r_2 (=3r_1)$ であり、内壁温度 $u_1=0$ 、外壁温度 $u_2=1$ とする(図4)。対称性を考えて問題の $1/8$ 領域を解析対象とし、境界条件を次のように与える。

$$\begin{aligned} u &= u_2 = 1 && \text{外壁上} \\ u &= u_1 = 0 && \text{内壁上} \\ q &= 0 && \text{対称軸上} \end{aligned}$$

解析に用いる選点総数は100個であり、これらが外周上に32個、内周上に12個、対称軸上に28個ずつ均等に配置されており、4つのかど点には完全2重選点が取られている。

精度検定 この問題を正則関数 Trefftz 法と特異関数 Trefftz 法で解析し、ポテンシャルとフラックスの

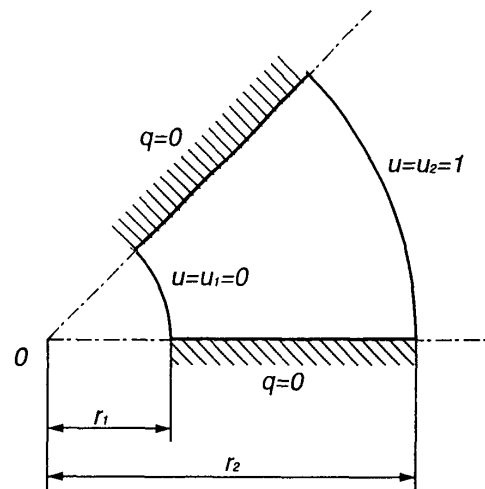


図4 厚肉円筒 (1/8 領域)

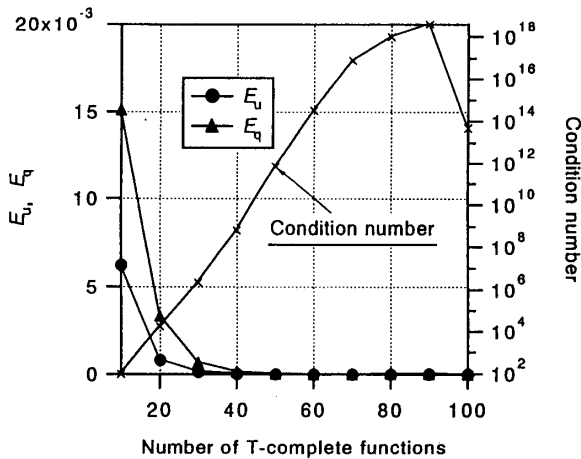


図5 正則関数 Trefftz 法での計算精度

計算精度を理論解と比較する．まず正則関数 Trefftz 法で解析を行う．T-complete 関数の総数を10個から100個までに徐々に増加させて解析を行い，全体誤差の収束と係数マトリックスの条件数の増加³⁶⁾を検討する．誤差の評価には，次式で定義する全体誤差指標 E_u, E_q を用いる．

$$E_u = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \|u(P_i) - u^\alpha(P_i)\|$$

$$E_q = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \|q(P_i) - q^\alpha(P_i)\|$$

ここで， $\|\cdot\|$ は2乗ノルムを示す．

図5に誤差の収束と条件数の増加を示す．誤差はT-complete 関数の個数 N の増加につれて急速に減少し， $N=40$ においてほぼ0となっている．条件数は N の増加につれて指数関数的に増加し， $N=90$ において 10^{19} 程度になっているが， $N=100$ では 10^{14} 程度に減少している． $N=100$ において条件数が減少しているのは，このとき $M=N=100$ となるので，最小2乗法を適用することなく連立1次方程式が解かれるためである．

次に特異関数 Trefftz 法で解析を行う．このために，選点から境界の法線方向に D 離れたところにソース点をとる．従って，ソース点の総数（基本解の総数） $N=100$ である． D を徐々に大きくしながら，全体の誤差の収束状況の評価する． D に対する誤差の収束状況を図6に示す．横軸には D を平均要素長さ L で無次元化した値を，縦軸には誤差指標を示す．この図から， D が大きくなるにつれて誤差は小さくなり $D/L=5$ あたりではほぼ0となるが， $D/L \geq 100$ では再び増加している． $D/L \geq 100$ では条件数が 10^{20} よりも大き

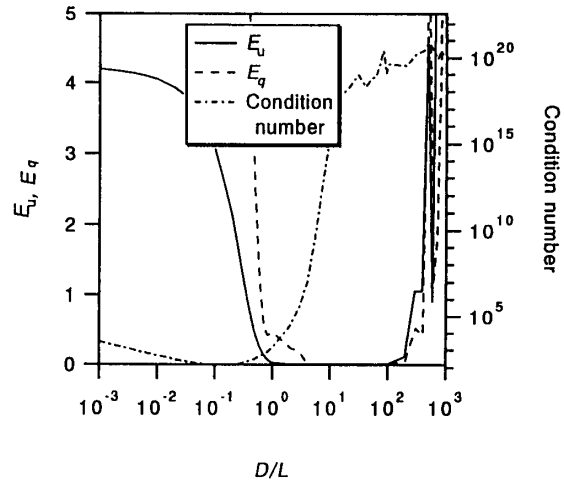


図6 特異関数 Trefftz 法での計算精度

くなることから，これが用いた計算機と LU 分解アルゴリズムの精度の限界と考えられる．誤差が十分に収束している $0.5 \leq D/L \leq 100$ において係数マトリックスの条件数は 10^3 から 10^{19} であるが，これは正則関数 Trefftz 法で $M=N=100$ として解析を行った場合の係数マトリックスの条件数 10^{14} とほぼ同程度と考えられる．

形状感度解析 感度解析の変数として外半径 r_2 をとり，ポテンシャルとフラックスの形状感度を計算する．まず正則関数 Trefftz 法で解析を行う．T-complete 関数の総数を10個から100個までに徐々に増加させて解析を行い，全体誤差の収束を評価する．誤差の評価には，次式で定義する全体誤差指標 E_{su}, E_{sq} を用いる．

$$E_{su} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \|\bar{u}(P_i) - \bar{u}^\alpha(P_i)\|$$

$$E_{sq} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \|\bar{q}(P_i) - \bar{q}^\alpha(P_i)\|$$

図7に誤差の収束と条件数の増加を示す．誤差はT-complete 関数の個数 N の増加につれて急速に減少し， $N=30$ においてほぼ0となっている．

次に，特異関数 Trefftz 法で解析を行う． D の増加に対する感度の誤差の収束状況を図8に示す．この場合も先の例と同様に， D が大きくなるにつれて誤差は小さくなり $D/L=5$ ではほぼ0となるが， $D/L \geq 10$ では再び増加している．

境界条件値感度解析 感度解析の変数として外壁上での境界条件値 u_2 をとり，ポテンシャルとフラックスの境界条件値感度を計算する．まず，正則関数

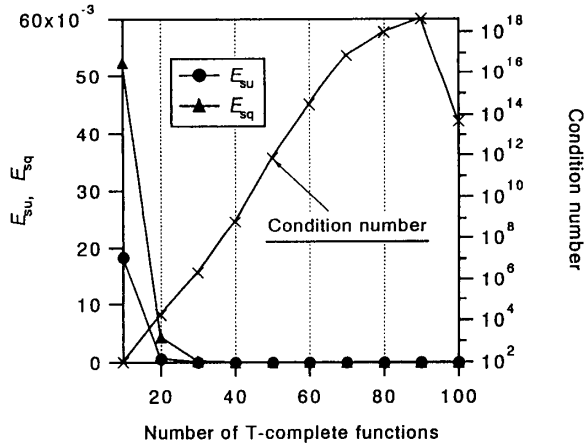


図7 形状感度の誤差収束 (正則関数 Trefftz 法の場合)

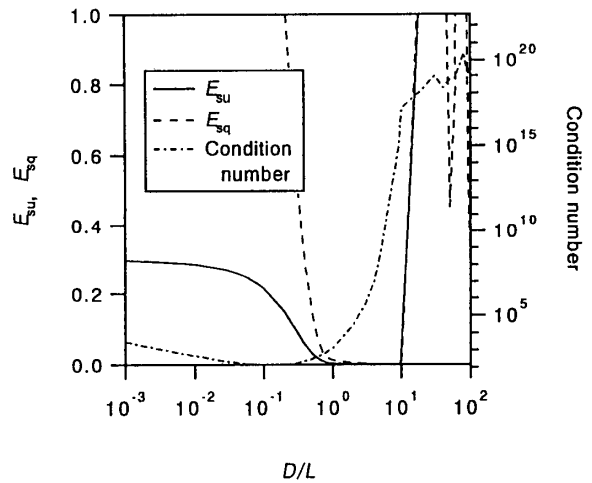


図10 境界条件感度の誤差収束 (特異関数 Trefftz 法の場合)

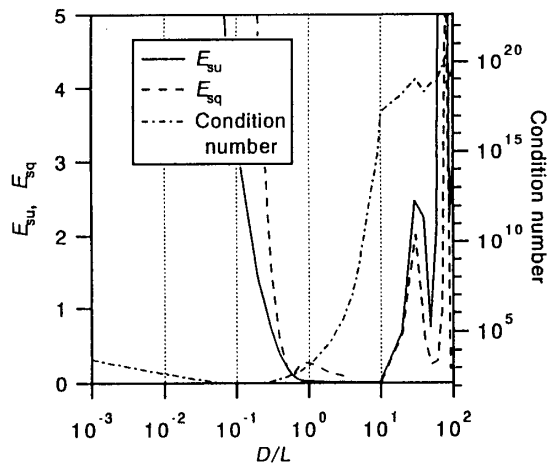


図8 形状感度の誤差収束 (特異関数 Trefftz 法の場合)

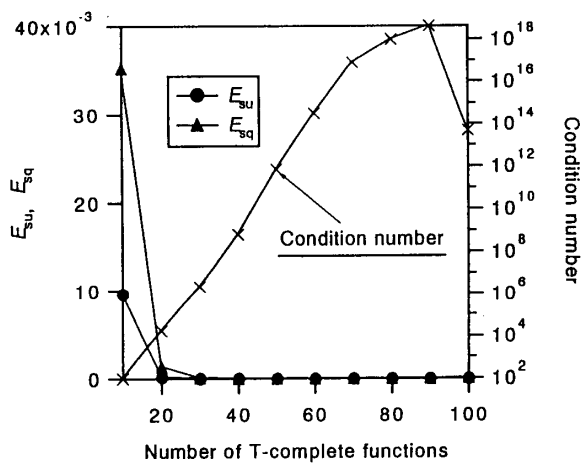


図9 境界条件感度の誤差収束 (正則関数 Trefftz 法の場合)

Trefftz 法で解析を行う。T-complete 関数の総数を10個から100個までに徐々に増加させて解析を行い、全体誤差の収束を評価する。全体誤差の評価には、上式で定義する全体誤差指標 E_m , E_{sq} を用いる。図9に誤差の収束と条件数の増加を示す。上記の例と同様に誤差は T-complete 関数の個数 N の増加につれて急速に減少し、 $N=30$ においてほぼ0となっている。次に特異関数 Trefftz 法で解析を行う。解析に用いた選点やソース点の配置は、先に用いたものと同じである。 D の増加に対する感度の誤差の収束状況を図10に示す。この場合も先の例と同様に、 D が大きくなるにつれて誤差は小さくなり $D/L=1$ でほぼ0となるが、 $D/L \geq 10$ では再び増加している。

4.2 解析例2

第2の感度解析例として、図11に示した楕円形領域

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

について境界値問題

$$\nabla^2 w = -2 \quad (\text{in } \Omega)$$

$$w = 0 \quad (\text{on } \Gamma)$$

を解くことを考える。この問題に変数変換

$$w = u - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

を施せば、支配方程式は Laplace 方程式に変換される。

$$\nabla^2 u = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$

$$u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad (\text{on } \Gamma)$$

この問題で、 $a/b=1, 3, 5, 10$ の場合について u , $q \equiv \partial u / \partial n$ の a に対する感度を計算し、計算結果を厳密解と

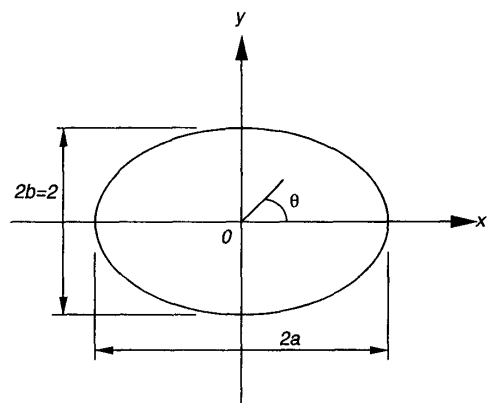


図11 楕円形領域

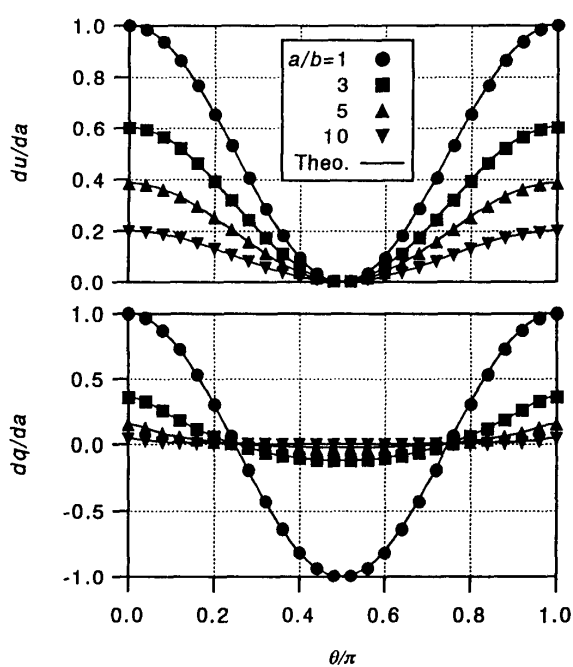


図12 数値解と理論解の比較

比較する。解析に用いた選点総数は50個であり、これらが角度 θ について均等に配置されている。まず、T-complete関数を $M=50$ にとり、正則関数 Trefftz 法で解析を行う。計算結果を図12に示すが、 a/b の値によらず数値解と理論解は良く一致していることが分かる。次に、ソース点を $N=50$ にとって、特異関数 Trefftz 法で解析を行う。ソース点を選点から境界の法線方向に D 離れたところに配置する。そこで、 D と計算精度の関係を検討した結果を図13と図14に示す。横軸には D を平均要素長さ L で無次元化した値を、縦軸にはポテンシャル感度とフラックス感度の全体誤

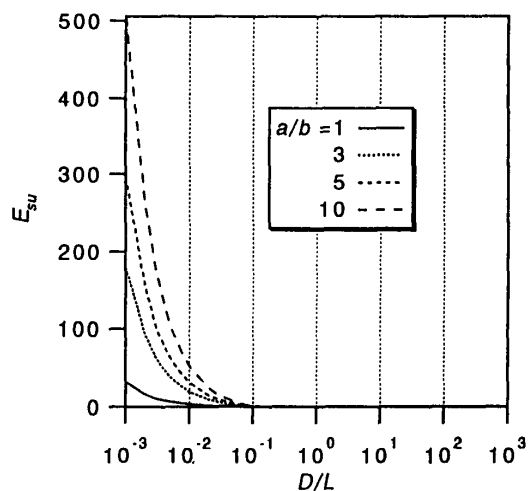


図13 ポテンシャル感度の誤差収束 (特異関数 Trefftz 法の場合)

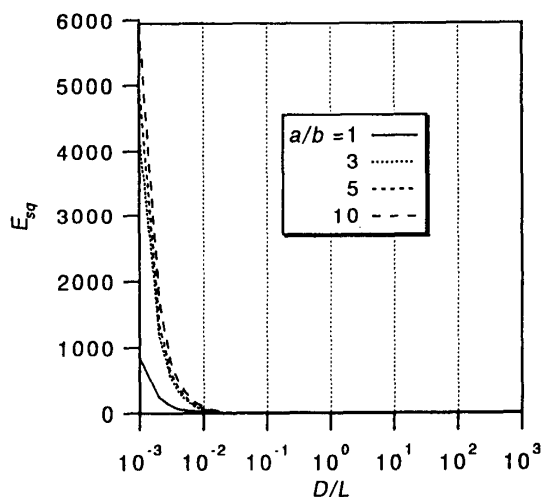


図14 フラックス感度の誤差収束 (特異関数 Trefftz 法の場合)

差 E_{su} , E_{sq} を示す。この図から誤差は a/b によらず同じように一様に収束し、 $D/L=0.5$ 程度ではほぼ0となっていることがわかる。そして、 $D/L \geq 0.5$ での特異関数 Trefftz 法による数値解と理論解の比較は正則関数 Trefftz 法による結果と全く同じとなった。

5. 結 論

Trefftz 法では問題の解は支配方程式を満足する関数の線形結合によって近似され、この近似解が境界条件を満足するように未知係数が決定される。ここで、近似に用いる関数は正則な T-complete 関数と特異な基本解に分けることができるので、本論文では T-

complete関数を用いる Trefftz法を正則関数 Trefftz法, 基本解を用いる Trefftz法を特異関数 Trefftz法と名付けて区別した. 著者らは, これまで正則関数 Trefftz法による感度解析手法を提案しているが, 本論文では特異関数 Trefftz法による感度解析手法もあわせて開発した. そして, 簡単な解析例を用いて正則関数 Trefftz法と特異関数 Trefftz法による感度解析手法を比較し, 次のような結果を得た.

1. 正則関数 Trefftz法では, T-complete関数の個数を多く取れば厳密解に一樣に収束していく.
2. 特異関数 Trefftz法では, ソース点と解析対象境界の距離を適切に取れば十分に精度の良い計算結果を与える. しかし, ソース点と解析対象境界との距離をあらかじめ適切に決定するのが困難である.
3. 正則関数 Trefftz法では, 係数マトリックスの条件数の増加を抑えるために座標変換などの手法を用いなければならない. これに対して, 特異関数 Trefftz法では条件数の増加は正則関数 Trefftz法ほど大きくなく, 座標変換も必要ない.

これらのことから, 2つの方法の特徴を次のようにまとめることができる. まず, 正則 Trefftz法の定式化には, 特異関数 Trefftz法でのソース点配置におけるような任意性がないが, 条件数の増加を抑えるような手法が必要になる. 一方, 特異関数 Trefftz法では条件数の増加は大きくはないが, ソース点の適切な配置方法が確立されていない. したがって, これらの問題の解決のため今後一層の研究が必要である.

参 考 文 献

- 1) E. Trefftz. Ein Gegenstück zum ritzschen Verfahren. *Proc. 2nd Int. Conf. Appl. Mech., Zurich*, 131/137, 1926
- 2) H. Antes. On a regular boundary integral equation and a modified Trefftz method in Reissner's plate theory. *Engineering Analysis*, 1(3): 149/153, 1984
- 3) Y. K. Cheung, W. G. Jin, and O. C. Zienkiewicz. Direct solution procedure for solution of harmonic problems using complete, non-singular, Trefftz functions. *Comm. Appl. Num. Meth.*, 5: 159/169, 1989
- 4) W. G. Jin, Y. K. Cheung, and O. C. Zienkiewicz. Application of the Trefftz method in plane elasticity problems. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 30: 1147/1161, 1990
- 5) Y. K. Cheung, W. G. Jin, and O. C. Zienkiewicz. Solution of Helmholtz equation by Trefftz method. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 32: 63/78, 1991
- 6) W. G. Jin, Y. K. Cheung, and O. C. Zienkiewicz. Trefftz method for Kirchhoff plate bending problems. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 36: 765/781, 1993
- 7) U. Heise. Numerical properties of integral equations in which the given boundary values and the sought solutions are defined on different curves. *Comp. Struct.*, 8: 199/205, 1978
- 8) I. Herrera and F. J. Sabina. Connectivity as an alternative to boundary integral equations, construction of bases. In *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 2059/2063, 1978
- 9) H. Gourgeon and I. Herrera. Boundary methods. C-complete systems for the biharmonic equations. In C. A. Brebbia, editor, *Boundary Element Methods (Proc. 3rd Int. Conf. on BEM, Irvine, Calif., 1981)*, 431/441, CML Pub./Springer Verlag, 1981
- 10) I. Herrera. Boundary methods for fluids. In R. H. Gallagher, D. H. Norrie, J. T. Oden, and O. C. Zienkiewicz, editors, *Finite Elements in Fluids*, chapter 19, 403/432, John Wiley & Sons, 1982
- 11) I. Herrera. *Boundary Methods: An Algebraic Theory*. Pitman, 1984
- 12) I. Herrera. Trefftz method. In C. A. Brebbia, editor, *Topics in Boundary Element Method*, chapter 10, Springer Verlag, 1984
- 13) Ch. Hochard and L. Proslier. A Trefftz method for a simplified analysis of elastic Structures. In Ch. Hirsch, O. C. Zienkiewicz, and E. Oñate, editors, *Numerical Methods in Engineering '92 (Proc. 1st European Conf. Num. Meth. Eng., Brussels, Belgium, 1992)*, 375/382, Elsevier, 1992
- 14) J. Jirousek and N. Leon. A powerful finite element for plate bending. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 12: 77/96, 1977
- 15) J. Jirousek and Lan Guex. The hybrid-Trefftz finite element model and its application to plate bending. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 23: 651/693, 1986
- 16) J. Jirousek and A. Venkatesh. A simple stress error estimator for hybrid-Trefftz p-version elements. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 28: 211/236, 1989
- 17) J. Jirousek and A. Venkatesh. Hybrid-Trefftz plane elasticity elements with p-method capabilities. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 35: 1443/1472, 1992
- 18) J. Jirousek and A. P. Zielinski. Dual Hybrid-Trefftz element formulation based on independent boundary traction frame. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 36: 2955/2980, 1993
- 19) 神谷紀生, S.-T. Wu. Trefftz法の固有値解析への応用. BEMテクノロジーコンファレンス論文集, 53/58, 1993
- 20) 神谷紀生, S.-T. Wu. Trefftz法による境界型固有値解析. 日本シミュレーション学会論文集, 12(3): 239/243, 1993
- 21) 北 栄輔, 神谷紀生, 池田洋一. Trefftz法の2次元形状感度解析への応用. 境界要素法論文集, 153/158, 1993
- 22) 北 栄輔, 神谷紀生, 池田洋一. Trefftz法による2次元ポテンシャル問題の感度解析. 日本シミュレーション学会論文集, 13(3): 247/254, 1994
- 23) 北 栄輔, 神谷紀生, 池田洋一. Trefftz法によるポテンシャル問題の感度解析. 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, 441/446, 1994
- 24) 北 栄輔, 神谷紀生, 池田洋一. Trefftz法の3次元ポテンシャル問題感度解析への応用. 日本シミュレーション学会論文集, 14(1): 26/33, 1995

- 25) E. R. A. Oliveira. Plane stress analysis by a general integral method. *J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE*, 94: 79/101, 1968
- 26) C. Patterson and M. A. Sheikh. On the use of fundamental solutions in Trefftz method for potential and elasticity problems. In C. A. Brebbia, editor, *Boundary Element Methods in Engineering (Proc. 4th Int. Conf. on BEM, Southampton, England, 1982)*, 43/57, Springer Verlag, 1982
- 27) M. A. Sheikh and C. Patterson. A modified Trefftz method for fluid flow. In T. Kawai, editor, *Finite Elements Flow Analysis (Proc. 4th Int. Symp. on Finite Element Methods in Flow Problems)*, 973/980, Univ. Tokyo Press, 1982
- 28) C. Patterson and M. A. Sheikh. A modified Trefftz method for stress analysis. In H. Guangqian and Y. K. Cheung, editors, *Proc. Int. Conf. Finite Element Methods*, Science Press/Gordon and Breach Sci. Pub., 1982
- 29) C. Patterson and M. A. Sheikh. A modified Trefftz method for three dimensional elasticity. In C. A. Brebbia, T. Futagami, and M. Tanaka, editors, *Boundary Elements (Proc. 5th Int. Conf. on BEM, Hiroshima, Japan, 1983)*, 427/437, Comp. Mech. Pub./Springer Verlag, 1983
- 30) R. Piltner. A quadrilateral hybrid-Trefftz plate bending element for the inclusion of warping based on a three-dimensional plate formulation. *Int. J. Num. Meth. Eny.*, 33: 387/408 1992
- 31) E. Stein. Die kombination des modifizierten Trefftzschen verfahrens mit der methode der finiten elemente. In K. E. Bruck, D. W. Scharpf, E. Stein, and W. W. Bochum, editors, *Finite Elemente in der Statik*, 172/185, Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, 1973
- 32) E. Stein and K. Petefs. A new boundary-type finite element, for 2D- and 3D-elastic solids. In E. Onate, J. Periaux, and A. Samuelsson editors, *Finite Elements in the 90's*, 35/48, Springer Ver./ CIMNE, 1991
- 33) A. P. Zielinski and O. C. Zienkiewicz. Generalized finite element analysis with T-complete boundary solution function. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 21: 509/528, 1985
- 34) A. P. Zielinski and I. Herrera. Trefftz method: fitting boundary conditions. *Int. J. Num. Meth. Eny.*, 24: 871/891, 1987
- 35) C. A. Brebbia 著, 神谷, 田中 (正), 田中 (喜) 共訳. 境界要素法入門. 培風館, 1980
- 36) 森 正武. FORTRAN77数値計算プログラミング. 岩波書店, 1990. 増補版