

Galerkin-Trefftz 法に基づく境界型感度解析手法について†

北 栄 輔*・神 谷 紀 生**・池 田 洋 一***

ABSTRACT This paper presents a new boundary-type scheme for the sensitivity analysis with the help of Galerkin-Trefftz formulation. Firstly, the Trefftz method is formulated by the help of the Galerkin method, which is compared with the collocation-Trefftz method. Then, the sensitivity analysis scheme based on the Galerkin-Trefftz method is formulated. Finally, the heat transfer in a thick-walled cylinder is considered as the numerical example in order to confirm the validity of the present method.

1. 緒 論

工学における各種の逆問題, 例えば最適設計問題, 自由境界問題などを扱う場合には, 形状や境界条件などの変化に対する物理量の変化を評価するための感度解析法が必要となる. そこで, これまでに有限要素法や境界要素法を用いた手法が提案されている^{1)~17)}. しかし, これらの方法にはいくつかの問題点があるので, 本論文ではこれらの問題点を改善するために, Trefftz 法を用いた感度解析手法を提案する.

最初に, これまでの手法の問題点を検討する. まず, 有限要素法は領域型数値解析法なので, 入力データ作成が面倒である. その上, 最適設計問題などのように解析対象の形状を逐次変更しながら繰り返し計算を行う場合は, 形状変更によって有限要素メッシュがゆがんで計算精度が低下する問題がある. この問題は, 形状変更ごとに自動メッシュ生成を利用することである程度解決できるが, このようなプロセスは計算コストを増大させる. また有限要素法では, 場の関数が節点値と内挿関数の線形結合によって近似される. ところが内挿関数は形状の関数であるため, 感度を求めるために場の関数を形状を表す変数で微分すると内挿関数のオーダーが低下してしまい, 感度解析の近似

の程度が低下することになる. そこで, このような問題を改善するために境界要素法の利用が考えられた. 境界要素法は境界型解析法なので, 有限要素法におけるメッシュ生成やメッシュのゆがみに関する問題は緩和される. また, 微分によって感度の近似のオーダーが低下することもない. しかし, 場の関数は特異性をもつ積分方程式によって表されるため, これを微分して得られる感度についての式は高次の特異性を有することになり, 複雑な定式化が必要となる^{4), 5), 8)~10), 16), 17)}. そして, このような定式化はしばしば計算コストを著しく増大させる.

このような問題を解決するために, 本論文では Trefftz 法による感度解析手法を提案する. Trefftz 法は, 正則な定式化に基づく境界型解法である. 従って, 入力データ作成は有限要素法に比べてはるかに容易である. さらに, 場の関数が正則な式で表されるので, それを微分して求めた感度についての式も正則となり, 境界要素法に比べて容易に計算できる.

ところで, Trefftz 法の定式化は間接法と直接法に大別される. 間接法¹⁸⁾では, 問題の解が支配方程式を満足する関数の重ね合わせによって近似され, 近似解が境界条件を満足するように未知係数を決定する. 一方, 直接法¹⁹⁾では, 支配方程式を満足する正則な関数を重み関数として積分方程式を導出し, これを離散化して境界での未知数について解く. このうち本論文では間接法を採用するので, 場の関数やその感度を連続関数として求めることができる. また, これまでの研究^{20)~22)}では選点法を用いてきたのに対して, 本論文では Galerkin 法を用いる. その結果, 選点法に比べて高い計算精度を期待できる上に, 選点法でしばしば重要となるかど点の問題を排除することができる.

Sensitivity Analysis Scheme Based on Galerkin-Trefftz Method. By Eisuke Kita (Graduate School of Engineering, Nagoya Univ.), Norio Kamiya (School of Informatics and Sciences, Nagoya Univ.) and Youichi Ikeda (Dept. of Mechanical Engineering, Daido Technical Institute).

*名古屋大学大学院工学研究科

**名古屋大学情報文化学部

***大同工業大学機械工学科

†1995年5月10日受付 1995年8月30日再受付

本論文は以下のように構成されている。まず、T-complete 関数を導入して、間接法 Trefftz 法の基本ソルバーを選点法と Galerkin 法で定式化する。次に、Galerkin 法に基づく感度解析手法を定式化する。最後に、厚肉円筒の熱伝導問題を解析例として提案した手法の有効性を確認する。この例題は比較的単純であるが、理論的妥当性を確認するには十分と考えられる。

2. Trefftz 定式化

2.1 支配方程式と T-complete 関数

2 次元ポテンシャル問題を考える。支配方程式と境界条件は次式で与えられる。

$$\nabla^2 u = 0 \quad (\text{in } \Omega) \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \bar{u} \quad (\text{on } \Gamma_1) \\ q &\equiv \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} \quad (\text{on } \Gamma_2) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここで、 u と q はそれぞれポテンシャルとその法線方向導関数（フラックス）を示す。 Ω , Γ_1 , Γ_2 は解析対象領域、ポテンシャル指定境界、フラックス指定境界を示す。 n は境界での単位法線ベクトルであり、 $(\cdot)$ は境界条件値を示す。

Trefftz 法では T-complete 関数を用いて定式化を行う。ポテンシャル問題に対する T-complete 関数は支配方程式を変数分離で解くことによって求めることができ、閉領域での 2 次元ポテンシャル問題に対しては次式で与えられる^{23)~25)}。

$$\{u_m^*\} = \{r^v e^{jv\theta}\} \quad (v=0, 1, \dots) \quad (3)$$

ここで、 j は虚数単位を、 r と θ は平面曲座標を示す。

ポテンシャル u は T-complete 関数 $u_m^* (m=1, \dots, N)$ の重ね合わせによって次のように近似される。

$$u \simeq \bar{u} = a_1 u_1^* + a_2 u_2^* + \dots + a_N u_N^* = \mathbf{a}^T \mathbf{u}^* \quad (4)$$

ここで $a_m (m=1, \dots, N)$ は未知係数を示す。式(4)を境界法線方向に微分することによって、フラックスの近似式を得る。

$$q \simeq \bar{q} \equiv \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = a_1 q_1^* + a_2 q_2^* + \dots + a_N q_N^* = \mathbf{a}^T \mathbf{q}^* \quad (5)$$

式(4)と(5)は式(2)を満足していないので、残差が生じる。

$$\left. \begin{aligned} R_1 &\equiv \bar{u} - u = \mathbf{a}^T \mathbf{u}^* - \bar{u} \neq 0 \text{ on } \Gamma_1 \\ R_2 &\equiv \bar{q} - q = \mathbf{a}^T \mathbf{q}^* - \bar{q} \neq 0 \text{ on } \Gamma_2 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

間接法 Trefftz 法では、残差 R_1 と R_2 を最小化するようにして、未知係数 $\mathbf{a}$ を決定する。

2.2 選点法定式化

選点法では、境界選点 P_l での残差が 0 とおかれる。つまり、式(6)より、

$$\left. \begin{aligned} P_l \in \Gamma_1: R_1(P_l) &= \mathbf{u}^*(P_l)^T \mathbf{a} - \bar{u}(P_l) = 0 \\ &\quad (l=1, \dots, M_1) \\ P_l \in \Gamma_2: R_2(P_l) &= \mathbf{q}^*(P_l)^T \mathbf{a} - \bar{q}(P_l) = 0 \\ &\quad (l=1, \dots, M_2) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここで M_1 と M_2 は、それぞれ境界 Γ_1 と Γ_2 上に取られた選点の総数である。上式を整理して、

$$\left. \begin{aligned} P_l \in \Gamma_1: \mathbf{u}^*(P_l)^T \mathbf{a} &= \bar{u}(P_l) \\ P_l \in \Gamma_2: \mathbf{q}^*(P_l)^T \mathbf{a} &= \bar{q}(P_l) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

マトリックス表示すると、

$$\begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & \dots & u_{1N}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & \dots & u_{2N}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{M_1 1}^* & u_{M_1 2}^* & \dots & u_{M_1 N}^* \\ q_{11}^* & q_{12}^* & \dots & q_{1N}^* \\ q_{21}^* & q_{22}^* & \dots & q_{2N}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{M_2 1}^* & q_{M_2 2}^* & \dots & q_{M_2 N}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \vdots \\ \bar{u}_{M_1} \\ \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \vdots \\ \bar{q}_{M_2} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

または

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (10)$$

ここで、 $\bar{u}(P_l) \equiv \bar{u}_l$, $\bar{q}(P_l) \equiv \bar{q}_l$, $u_m^*(P_l) \equiv u_{lm}^*$, $q_m^*(P_l) \equiv q_{lm}^*$ である。式(10)の係数マトリックスは $M \times N$ ($M = M_1 + M_2$) の非対称マトリックスである。したがって、 $M = N$ ならば直接解けるが、 $M \neq N$ ならば最小二乗法を適用して解くことになる。

2.3 Galerkin 法定式化

残差 R_1 と R_2 に対して $\bar{q}$ と $-\bar{u}$ を重み関数としてとると、次の重み付き残差式を得る。

$$\int_{\Gamma_1} \bar{q} R_1 d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \bar{u} R_2 d\Gamma = 0 \quad (11)$$

式(4)と(5)を上式に代入すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_1} \mathbf{q}^{*T} \mathbf{a} (\mathbf{u}^{*T} \mathbf{a} - \bar{u}) d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \mathbf{u}^{*T} \mathbf{a} (\mathbf{q}^{*T} \mathbf{a} - \bar{q}) d\Gamma = 0 \\ &\mathbf{a}^T \left[\int_{\Gamma_1} \mathbf{q}^* (\mathbf{u}^{*T} \mathbf{a} - \bar{u}) d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \mathbf{u}^* (\mathbf{q}^{*T} \mathbf{a} - \bar{q}) d\Gamma \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\int_{\Gamma_1} \mathbf{q}^* (\mathbf{u}^{*T} \mathbf{a} - \bar{u}) d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \mathbf{u}^* (\mathbf{q}^{*T} \mathbf{a} - \bar{q}) d\Gamma = 0$$

整理すると、

$$\begin{aligned} &\left[\int_{\Gamma_1} \mathbf{q}^* \mathbf{u}^{*T} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \mathbf{u}^* \mathbf{q}^{*T} d\Gamma \right] \mathbf{a} \\ &= \int_{\Gamma_1} \mathbf{q}^* \bar{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \mathbf{u}^* \bar{q} d\Gamma \end{aligned} \quad (13)$$

または

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (14)$$

ここで、

$$k_{lm} = \int_{\Gamma_1} q_l^* u_m^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} u_l^* q_m^* d\Gamma \quad (15)$$

$$f_i = \int_{\Gamma_1} q_i^* \bar{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} u_i^* \bar{q} d\Gamma \quad (16)$$

Cheung ら^{19),26)~28)}は、以下のようにして上式の係数マトリックス $\mathbf{K}$ の対称性を示している。マトリックス要素 k_{ml} を k_{lm} から引くと次式を得る。

$$\begin{aligned} k_{lm} - k_{ml} &= \int_{\Gamma_1} q_l^* u_m^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} u_l^* q_m^* d\Gamma \\ &\quad - \left(\int_{\Gamma_1} q_m^* u_l^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} u_m^* q_l^* d\Gamma \right) \\ &= \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} q_l^* u_m^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2 + \Gamma_1} u_l^* q_m^* d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma} q_l^* u_m^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u_l^* q_m^* d\Gamma \end{aligned}$$

T-complete 関数は連続関数であり、上式では T-complete 関数を境界について一周積分しているので、

$$k_{lm} - k_{ml} = \int_{\Gamma} q_l^* u_m^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u_l^* q_m^* d\Gamma = 0$$

となる。したがって

$$k_{lm} = k_{ml}$$

Galerkin 法は境界条件式の残差を全境界において小さくするように定式化するので、選点法に比べて高い精度を期待できる。また、Cheung らの定式化に従えばマトリックスの対称性が保証されるので、連立方程式を精度良く解くことができると考えられる。

2.4 係数マトリックスの条件数

T-complete 関数 (式(3)) は r^N の関数である。従って N や r の増加につれて、係数マトリックスの条件数は急激に増加し、計算精度が低下する。この問題を解決するために、本論文では次のような座標変換法を用いる。

- 解析対象の図心が座標原点となるように、平行移動する。

- 図心と境界選点の距離の平均が 1 となるように、解析対象の大きさをスケールリングする。

同様な方法は、すでに Jirousek²⁹⁾が提案している。このような座標変換によって、選点 P_i の座標 (x_i, y_i) は次のようになる。

$$\begin{cases} \hat{x}_i = (x_i - x_c) / D \\ \hat{y}_i = (y_i - y_c) / D \end{cases} \quad (17)$$

ここで x_c と y_c は、本来の座標系における図心座標を、 D はスケールリング係数を示す。つまり、

$$x_c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x_i$$

$$y_c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M y_i$$

$$D = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$$

3. Galerkin 定式による感度解析手法

3.1 形状感度解析

まず、解析対象の形状に関する感度解析について考える。解析対象上の任意点 $Q (\in \Omega \cup \Gamma)$ におけるポテンシャル $u(Q)$ とフラックス $q(Q)$ は、それぞれ式(4)と(5)で与えられる。これを改めて示すと次のようである。

$$\begin{cases} u(Q) \simeq \bar{u} = \mathbf{a}^T \mathbf{u}^* \\ q(Q) \simeq \bar{q} = \mathbf{a}^T \mathbf{q}^* \end{cases} \quad (18)$$

$\mathbf{u}^*$ と $\mathbf{q}^*$ は Q の座標の関数である。これに対して、 $\mathbf{a}$ は形状と境界条件の関数である。従って、式(18)を形状変数について微分すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \dot{u}(Q) &= \dot{\mathbf{a}}^T \mathbf{u}^* \\ \dot{q}(Q) &= \dot{\mathbf{a}}^T \mathbf{q}^* \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、 $(\dot{})$ は形状変数についての微分を示す。また、 $\dot{\mathbf{a}}$ は式(14)から次のようにして求められる。式(14)の両辺を形状変数で微分すると次式を得る。

$$\dot{\mathbf{K}}\mathbf{a} + \mathbf{K}\dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{f}} \quad (20)$$

または

$$\mathbf{K}\dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{f}} - \dot{\mathbf{K}}\mathbf{a} \quad (21)$$

選点法では、 $\dot{\mathbf{K}}$ と $\dot{\mathbf{f}}$ は、それぞれ T-complete 関数と境界条件値を形状変数によって微分することで求められる。これに対して、Galerkin 法では式(15)と(16)を微分することによって求められる。まず、 $\dot{\mathbf{K}}$ の成分は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{k}_{ij} &= \int_{\Gamma_1} (\dot{q}_i^* u_j^* + q_i^* \dot{u}_j^*) d\Gamma + \int_{\Gamma_2} q_i^* \dot{u}_j^* d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma_2} (\dot{u}_i^* q_j^* + u_i^* \dot{q}_j^*) d\Gamma - \int_{\Gamma_2} u_i^* \dot{q}_j^* d\Gamma \end{aligned} \quad (22)$$

また、 $\dot{\mathbf{f}}$ の成分は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{f}_i &= \int_{\Gamma_1} (\dot{q}_i^* \bar{u} + q_i^* \dot{\bar{u}}) d\Gamma + \int_{\Gamma_1} q_i^* \dot{\bar{u}} d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma_2} (\dot{u}_i^* \bar{q} + u_i^* \dot{\bar{q}}) d\Gamma - \int_{\Gamma_2} u_i^* \dot{\bar{q}} d\Gamma \end{aligned} \quad (23)$$

境界条件値が形状変数の関数でなければ、次式を得る。

$$\begin{aligned} \dot{f}_i &= \int_{\Gamma_1} \dot{q}_i^* \bar{u} d\Gamma + \int_{\Gamma_1} q_i^* \dot{\bar{u}} d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma_2} \dot{u}_i^* \bar{q} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} u_i^* \dot{\bar{q}} d\Gamma \end{aligned} \quad (24)$$

式(21)を $\dot{a}$ について解き、式(19)に代入すれば形状感度を得ることができる。

3.2 境界条件感度解析

次に、境界条件値についての感度解析を考える。感度についての近似式は、式(18)の両辺を形状変数について微分することによって得られる。ここで、 u^* と q^* は境界条件値について独立な関数なので、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}(Q) &= \dot{a}^T u^* \\ \dot{q}(Q) &= \dot{a}^T q^* \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

ここで $(\dot{\cdot})$ は境界条件値についての微分を示す。 $\dot{a}$ は式(14)より次のようにして求められる。式(14)の両辺を微分すると、次式を得る。

$$K\dot{a} + K\dot{a} = \dot{f}$$

ここで、 K は境界条件値について独立な関数なので、 $K\dot{a} = 0$ となり、次式を得る。

$$K\dot{a} = \dot{f} \quad (26)$$

選点法では、境界条件値を直接微分することによって $\dot{f}$ を求める。これに対して、Galerkin法では式(16)を微分することによって求められる。

$$\dot{f}_i = \int_{\Gamma_1} q_i^* \dot{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} u_i^* \dot{q} d\Gamma \quad (27)$$

式(26)を $\dot{a}$ について解いて式(25)に代入すれば、感度を求めることができる。

4. 解析例

ここでは、解析例として厚肉円筒の熱伝導問題を考える。解析例としては比較的単純であるが、定式化の理論的妥当性を検討するには十分と考えられる。厚肉円筒の内径と外径は、それぞれ r_1 と $r_2 (=3r_1)$ である。対称性を考えて1/8領域を解析対象とする。境界条件は次式のように与えられる(図1)。

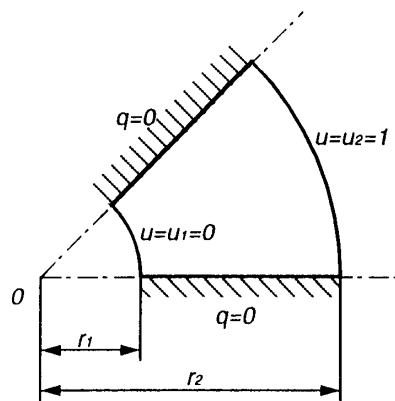


図1 厚肉円筒

$$u = u_2 = 1 \quad (\text{外壁上})$$

$$u = u_1 = 0 \quad (\text{内壁上})$$

$$q = 0 \quad (\text{対称軸上})$$

この解析例について、まず選点法、Galerkin法によって解析を行い、解の収束の様子を比較する。続いて、Galerkin法による形状感度解析と境界条件感度解析の結果を示す。

4.1 選点法とGalerkin法の比較

選点法Trefftz法で解析を行う場合、50個の選点が入境界について均等に配置される。ただし、かど点には2つの選点が配置され、これらの1つ1つが別の法線ベクトルを持つようにデータが作成されている。解析に用いるT-complete関数の総数は50個なので、連立方程式は最小二乗法を用いないで解かれる。Galerkin法Trefftz法で解析を行う場合、解析対象の境界は50個のほぼ等しい長さの直線要素によって表され、各直線要素上での境界積分は8点Gauss-Legendre積分公式によって行われる。T-complete関数の総数は4個から52個まで増加し、誤差の収束状況を検討する。

全体誤差を評価するためには、誤差指標IとIIを用いる。

誤差指標I：

$$E_u^I = \sum_{i=1}^M \|u(P_i) - u^\alpha(P_i)\|$$

$$E_q^I = \sum_{i=1}^M \|q(P_i) - q^\alpha(P_i)\|$$

誤差指標II：

$$E_u^{II} = \int_{\Gamma} \|u(P_i) - u^\alpha(P_i)\| d\Gamma$$

$$E_q^{II} = \int_{\Gamma} \|q(P_i) - q^\alpha(P_i)\| d\Gamma$$

ここで $\|\cdot\|$ は二乗ノルムを示し、 u^α と q^α は、それぞれポテンシャルとフラックスの理論解を示す。誤差指標Iは選点法Trefftz法について、選点ごとの誤差を評価するのに用いられる。これに対して、誤差指標IIは選点法とGalerkin法の両方に対して、境界全体での誤差を評価するのに用いられる。これらの誤差は、グラフでは次のように称される。

選点法での誤差指標I CM-I

選点法での誤差指標II CM-II

Galerkin法での誤差指標II GM

誤差指標の比較を図2に示す。選点法について比較すると、CM-I誤差は小さいにも関わらずCM-II誤差はかなり大きいことがわかる。特にCM-IIのフラックス誤差は非常に大きく、グラフでは1/10の値が示

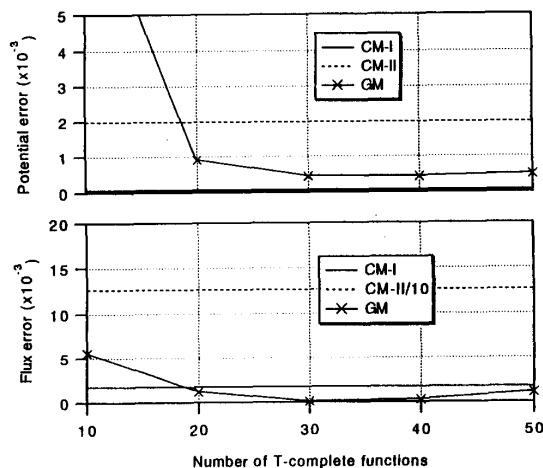


図2 全体誤差の収束特性

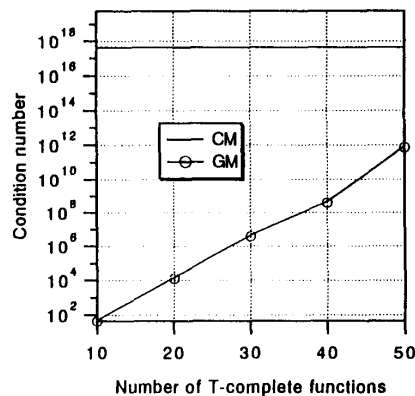


図3 係数マトリックスの条件数

されている。これに対して、GM 誤差は T-complete 関数の増加につれて十分小さくなっている。これらのことから、選点法と Galerkin 法による数値解について次のような結論を得ることができる。まず、選点法を用いた場合、選点ごとの数値解はかなり精度良く求められるのに対して、選点からずれた点での精度はかなり悪い。従って、境界全体での精度について比較した場合、Galerkin 法は選点法よりも優れていると考えられる。

選点法と Galerkin 法による場合の係数マトリックスの条件数の増加を図 3 に示す。この図から分かるように、Galerkin 法による結果は選点法による結果に比べて小さくなっている。従って、条件数の点からみても Galerkin 法は選点法に比べて高精度であると考えられる。

以上の議論から、Galerkin 法は選点法に比べて全境界で高精度と考えられる。したがって、以下の感度解

析の例では、Galerkin 法による感度解析法の結果についてのみ述べることにする。

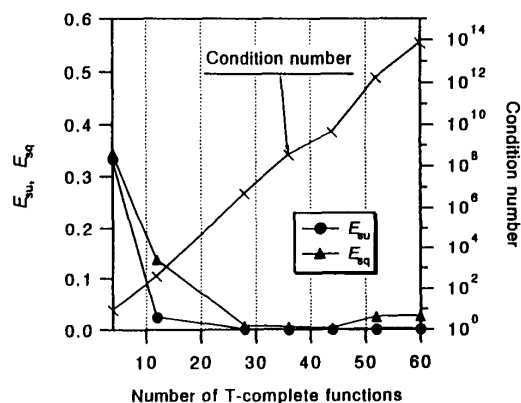
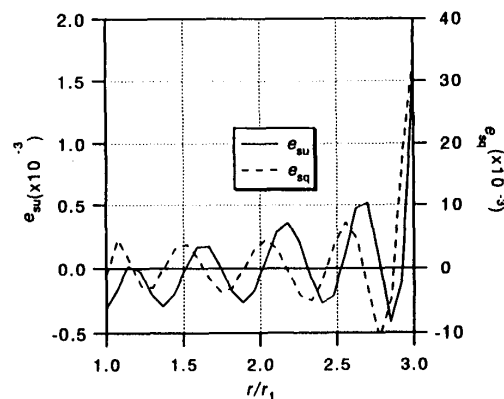
4.2 形状感度解析

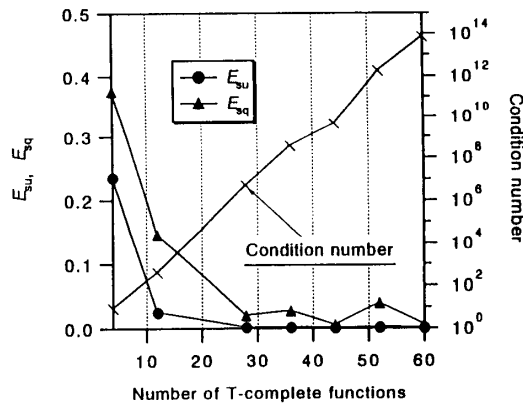
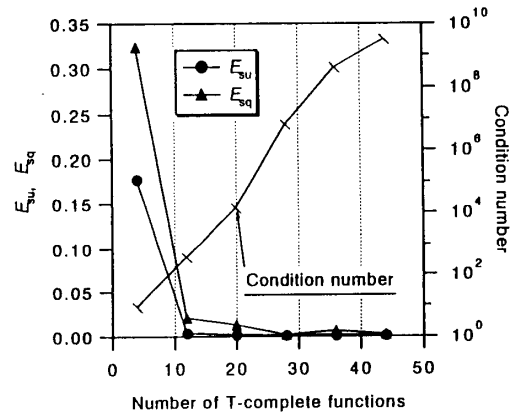
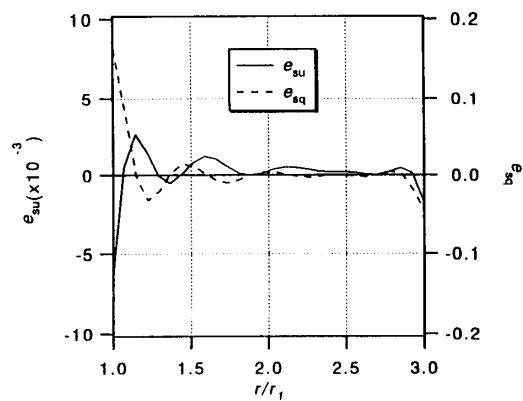
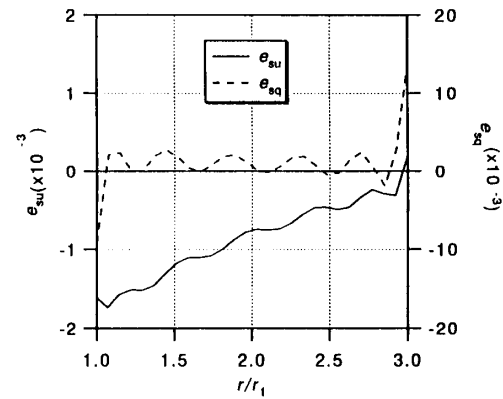
まず、外径 r_2 に対するポテンシャルとフラックスの感度解析の結果を示す。図 4 は全体誤差の収束を示す。横軸には解析に用いた T-complete 関数の総数を示し、縦軸には全体誤差指標を示す。全体誤差の評価には次式を用いる。

$$E_{su} = \int_{\Gamma} \|\dot{u}(P_i) - \dot{u}^{ex}(P_i)\| d\Gamma$$

$$E_{sq} = \int_{\Gamma} \|\dot{q}(P_i) - \dot{q}^{ex}(P_i)\| d\Gamma$$

ここで、 $\dot{u}^{ex}$ と $\dot{q}^{ex}$ はポテンシャル感度とフラックス感度の厳密解を示す。誤差は T-complete 関数の増加につれて減少しており、T-complete 関数が 30 個以上では実用上問題ない程度にまで減少している。T-complete 関数が 44 個の場合の感度の誤差の分布を図 5 に示す。縦軸には誤差を、横軸には原点からの距離 r を

図4 r_2 に関する形状感度の誤差収束特性図5 r_2 に関する形状感度の誤差分布

図6 r_1 に関する形状感度の誤差収束特性図8 u_2 に関する境界条件感度の誤差収束特性図7 r_1 に関する形状感度の誤差数分布図9 u_2 に関する境界条件感度の誤差分布

内径 r_1 で無次元化した値を示す。誤差分布は次式から評価する。

$$e_{su} = u - u^{ex}$$

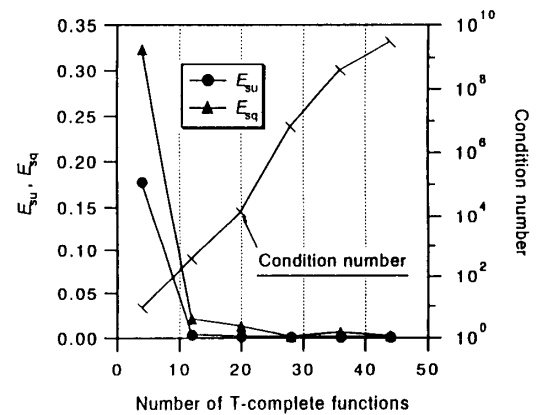
$$e_{sq} = q - q^{ex}$$

図5から、数値解が理論解と良く一致していることがわかる。

次に内径 r_1 に対する感度解析結果を示す。全体誤差の収束を図6に、T-complete関数が44個の場合の誤差の分布を図7に示す。図より、この場合も先の場合と同様の結果を得ていることが分かる。

4.3 境界条件感度解析

円筒外壁上での境界条件値 u_2 に対する感度解析を考える。図8は全体誤差の収束を示す。縦軸には全体誤差を、横軸にはT-complete関数の総数を示す。全体誤差はT-complete関数の増加につれて減少し、T-complete関数が28個以上では十分小さくなっている。図9は、T-complete関数が44個の場合の誤差の分布を示す。これらの図より、数値解は理論解と良く一致

図10 u_1 に関する境界条件感度の誤差収束特性

していることが分かる。

次に、内壁上的での境界条件値 u_1 に対する感度解析を考える。図10は全体誤差の収束を示し、図11はT-complete関数が44個の場合の誤差の分布を示す。図

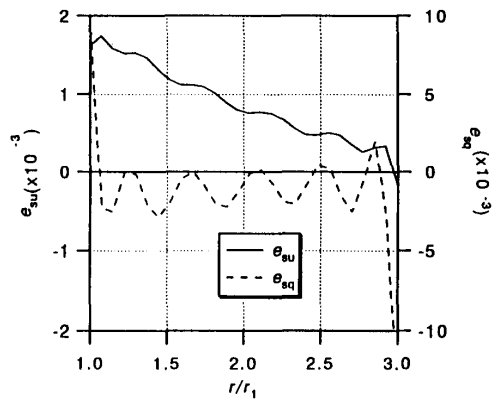


図11 u_1 に関する境界条件感度の誤差分布

より、この場合も先の場合と同様の結果を得ていることが分かる。

5. 結 論

本論文では、間接型 Trefftz 法に基づく新しい感度解析手法を提案し、閉領域における2次元ポテンシャル問題に適用した。

Trefftz 法は境界型数値解析法なので、入力データ作成は有限要素法などの領域型解法よりも容易である。その上、ポテンシャルやフラックスは正則な定式化によって表されるので、それを微分して得られる感度についての式も正則となり、特異な基本解を用いる境界要素法に比べて定式化ははるかに容易となる。我々のこれまでの研究では、定式化に選点法を用いてきたのに対して、本論文では Galerkin 法を用いた。この結果、計算効率は選点法に比べて幾分低下するが、計算精度は選点法よりもかなり改善されている。その上、選点法でしばしば問題となるかど点の問題を取り除くことができる。

提案された方法は厚肉円筒の熱伝導問題に適用され、理論的妥当性が検討された。数値解を理論解と比較した結果、両者は良く一致したので、提案した手法の理論的妥当性は確認できたと考えられる。けれども、これをさらに一般的な問題に拡張して行くには、解決すべき点もある。それは、係数マトリックスの条件数の問題である。先に述べたように、T-complete 関数は r^N の関数である。従って、 r と N の増加にともなって係数マトリックスの条件数は増大する。この問題を解決するために、本論文では座標変換法を用いた。しかし、より細長い形状などについてはこの方法でも十分とはいえない。そこで、領域の部分分割手法が提案されている^{30),31)}が、多くの部分領域に分ける

ことは、Trefftz 法の境界型解法としての利点を失わせる結果となるので望ましくない。従って、今後は細長い解析対象に対して部分領域分割を用いないで解析する方法を開発する必要がある。

参 考 文 献

- 1) J. B. Cardoso and J. S. Arora. Variational method for design sensitivity analysis in nonlinear structural mechanics. *AIAA J.*, 26(5): 595/603, 1988
- 2) J. S. Arora and J. B. Cardoso. A design sensitivity analysis principle and its implementation into ADINA. *Comp. Struct.*, 32(3/4): 691/705, 1989
- 3) J. J. Tsay and J. S. Arora. Nonlinear structural design sensitivity analysis for path dependent problems. Part 1: General theory. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 81: 183/208, 1990
- 4) M. R. Barone and R. J. Yang. A boundary element approach for recovery of shape sensitivities in three-dimensional elastic solids. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 74: 69/82, 1989
- 5) M. R. Barone and R. J. Yang. Boundary integral equations for recovery of design sensitivities in shape optimization. *AIAA J.*, 26(5): 589/594, 1989
- 6) T. M. Yao and K. K. Choi. 3-D shape optimal design and automatic finite element regriding. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 28: 369/384, 1989
- 7) J. H. Choi and B. M. Kwak. Boundary integral equation method for shape optimization of elastic structures. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 26: 1579/1595, 1988
- 8) M. Defouney. Boundary element method and design optimization. In C. A. Brebbia, W. L. Wendland, and G. Kuhn, editors, *Proc. Boundary Elements IX*, 463/472, Comp. Mech. Pub./Springer Verlag, 1987
- 9) J. H. Kane. *Optimization of Continuum Structures Using a Boundary Element Formulation*. PhD thesis, The University of Connecticut, 1986
- 10) J. H. Kane and S. Saigal. Design sensitivity analysis of solids using BEM. *J. Eng. Mech.*, 114: 1703/1722, 1988
- 11) M. Kleiber. Shape and non-shape structural sensitivity analysis for problems with any material and kinematic nonlinearity. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 108: 73/97, 1993
- 12) B. M. Kwak and B. Y. Lee. Shape design sensitivity analysis of thermoelasticity problem using the boundary integral equation formulation. In M. Tanaka, C. A. Brebbia, and T. Honma, editors, *Boundary Elements XII (Proc. 12th Int. Conf. on BEM, Sapporo, Japan, 1990)*, 215/224, Comp. Mech. Pub./Springer Verlag, 1990
- 13) N. Kikuchi, K. Y. Chung, T. Torigaki, and J. E. Taylor. Adaptive finite element methods for shape optimization of linearly elastic structures. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 57(2): 67/89, 1986
- 14) T. Matsumoto, M. Tanaka, and H. Hirata. Design sensitivity formulation of boundary stresses using boundary integral equation for displacement gradients. In M. Tanaka, C. A. Brebbia, and T. Honma, editors, *Boundary Elements XII (Proc. 12th Int. Conf. on BEM, Sapporo, Japan, 1990)*, 205/214, Comp. Mech. Pub./Springer Verlag, 1990

- 15) R. A. Meric. Shape design sensitivity analysis for non-linear anisotropic heat conducting solids and shape optimization by the BEM. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 26: 109/120, 1988
- 16) S. Mukherjee and A. Chandra. A boundary element formulation for design sensitivities in materially nonlinear problems. *Acta Mechanica*, 78: 243/253, 1989
- 17) Z. Zhao. *Shape Design Sensitivity Analysis and Optimization Using the Boundary Element Method (Lecture Notes in Engineering 62)*. Springer Verlag, 1991
- 18) E. Trefftz. Ein Gegenstück zum ritzschen Verfahren. *Proc. 2nd Int. Cong. Appl. Mech.*, Zurich, 131/137, 1926
- 19) Y. K. Cheung, W. G. Jin, and O. C. Zienkiewicz. Direct solution procedure for solution of harmonic problems using complete, non-singular, Trefftz functions. *Comm. Appl. Num. Meth.*, 5: 159/169, 1989
- 20) E. Kita, N. Kamiya, and Y. Ikeda. Sensitivity analysis of two-dimensional potential problem by Trefftz method. In Q. Du, M. Tanaka, and X. Ji, editors, *Theory and Applications of Boundary Element Methods (Proc. 6th China/Japan Symposium on BEMs, 1994)*, 79/88, Int. Academic Pub., 1994
- 21) E. Kita, N. Kamiya, and Y. Ikeda. An application of Trefftz method to the sensitivity analysis of two-dimensional potential problem. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 38: 2209/2224, 1995
- 22) E. Kita, N. Kamiya, and Y. Ikeda. Sensitivity analysis of potential problem by regular and singular-function Trefftz method. In S. N. Atluri, G. Yagawa and T. A. Cruse, editors, *Computational Mechanics '95*, 2: 3043/3048, Springer Ver., 1995
- 23) I. Herrera. Theory of connectivity: a systematic formulation of boundary element methods. In C. A. Brebbia, editor, *New Developments in Boundary Element Methods (Proc. 2nd Int. Seminar on Recent Advances in BEM, Southampton, England, 1980)*, 45/58, Pentech Press, 1980
- 24) I. Herrera. Boundary methods for fluids. In R. H. Gallagher, D. H. Norrie, J. T. Oden, and O. C. Zienkiewicz, editors, *Finite Elements in Fluids*, chapter 19, 403/432, John Wiley & Sons, 1982
- 25) I. Herrera. Boundary methods: development, of complete systems of solutions. In T. Kawai, editor, *Finite Elements Flow Analysis (Proc. 4th Int. Symp. on Finite Element Methods in Flow Problems)*, chapter 19, 897/906, Univ. of Tokyo Press, 1982
- 26) W. G. Jin, Y. K. Cheung, and O. C. Zienkiewicz. Application of the Trefftz method in plane elasticity problems. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 30: 1147/1161, 1990
- 27) Y. K. Cheung, W. G. Jin, and O. C. Zienkiewicz. Solution of Helmholtz equation by Trefftz method. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 32: 63/78, 1991
- 28) W. G. Jin, Y. K. Cheung, and O. C. Zienkiewicz. Trefftz method for Kirchhoff plate bending problems. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 36: 765/781, 1993
- 29) J. Jirousek and A. Venkatesh. Hybrid-Trefftz plane elasticity elements with p-method capabilities. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 35: 1443/1472, 1992
- 30) A. P. Zielinski and O. C. Zienkiewicz. Generalized finite element analysis with T-complete boundary solution function. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 21: 509/528, 1985
- 31) A. P. Zielinski and I. Herrera. Trefftz method: fitting boundary conditions. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 24: 871/891, 1987