

遺伝的アルゴリズムによる連続体形状 最適化法について†

北 栄 輔*・谷 江 尚 史*

ABSTRACT This paper presents a new scheme for the shape optimization of a continuum by using genetic algorithms (GAs) with boundary element methods (BEMs). The profile of the object is represented by the Free-Form Deformation (FFD) technique which is often employed in the field of computer graphic. The chromosome related to the profile is constructed by the position vectors of the FFD control points, which are modified by the genetic operations; selection, crossover and mutation, in order to optimize the profile. The object function is estimated by the BEMs. When the object under consideration is governed by the linear and homogeneous differential equation, the BEM requires the boundary discretization alone and therefore, the distortion of the profile during successive shape modification is not so terrible that the computational accuracy becomes worse. A cantilever beam under uniformly distributed load is considered as a numerical example in order to confirm the validity of the present scheme.

1. 緒 論

これまで、複雑な構造物や機械装置の設計においては全体をいくつかの部分に分け、部分ごとの設計を個々に最適化する事で最終的に全体の性能を高めるといふ手法が一般に用いられている。しかし、この方法は、設計要求が複雑化するにつれて必ずしも効果的とはいえなくなっている。これは、部分構造物や機械要素ごとに最適な設計を決定し、それらを組み合わせることで構造物全体としての最終形状を決定する場合、部分相互の関連を考慮せずに最適化されているために、各部分ごとには最適であっても全体として考えた場合にまだ改善されるべき部分が残されていたり、ある一部を最適化した結果他の部分の性能を低下させたりする場合がありますからである。このように構造物や機械要素の設計は、本質的には複雑な制約条件を含む多目的最適化問題となるため、これまで一般的に用いられている設計感度を用いた勾配法による最適化手法では解析が困難な場合が考えられる。このような最適化問題に対して効果的な最適化手法として、遺伝的

アルゴリズム (GAs) が注目を集めている。本研究では、複雑な設計目的下における連続体構造物の形状最適化問題に遺伝的アルゴリズム^{1)~4)}を用いるための基礎的研究として、連続体構造物の形状最適化問題を遺伝的アルゴリズムで扱う方法について提案する。

遺伝的アルゴリズムは、生物の進化のプロセスをシミュレートした最適化法である。探索点は染色体によって表され、これに選択、交叉、突然変異などの遺伝的操作を行うことで、最適解を求める。遺伝的アルゴリズムを最適設計問題に適用する方法については、これまでいくつか提案されている^{5)~19)}。しかし、この多くはトラス構造物の部材配置最適化問題を扱っている。この問題では、解析対象を含む空間にいくつかの節点をあらかじめ配置し、これらの節点間に部材を配置するかどうかを0または1として表現することで組み合わせ最適化問題として容易に表現できるので、遺伝的アルゴリズムで扱うのが容易だからである。これに対して、連続体構造物への適用は Watabe ら¹⁷⁾や高橋ら¹⁸⁾が行っている。しかし、彼らの研究では数値解析法として有限要素法を用いているので、形状変更によってメッシュが歪んでしまう欠点がある。そこで、本研究では数値解析法として境界要素法を用いる。境界要素法は、境界をメッシュ分割するだけで問題を解析することができるので、形状変更によってメッシュが歪む可能性が小さくなり、有限要素法よりも高精度

Shape Optimization of Continuum by using Genetic Algorithm. By Eisuke Kita and Hisashi Tanie (Graduate School of Engineering, Nagoya Univ.).

*名古屋大学大学院工学研究科

†1995年11月2日受付 1996年2月5日再受付

を期待できる。

また解析対象の形状表現方法として、本研究ではコンピュータグラフィックで用いられる Free Form Deformation (FFD) を用いる。FFD では解析対象を含む空間内に格子状に制御点を配置し、制御点を移動させることによって解析対象の全体形状を変化させる。そこで、FFD の制御点の位置ベクトルを遺伝子と考え、全ての制御点の位置ベクトルの列で一つの形状に対応する染色体を構成する。そして、この染色体からなる集団に選択・交叉・突然変異などの遺伝的操作を行うことで最適な形状を決定する。FFD を用いれば比較的少ない制御点数で全体形状を表現できるので、染色体長さを短くできる利点がある。しかし、この方法では計算効率の改善が重要となるので、効率改善のための3つの方法を提案する。解析対象として等分布荷重を受ける片持ちはりを考え、提案した方法の有効性を検討する。

2. 遺伝的アルゴリズムによる最適設計法

これまでに、構造物の最適設計に遺伝的アルゴリズムを適用した例がいくつか報告されている^{5)~18)}。ここでは、これまでに提案された方法を示し、その問題を明らかにするとともに、提案する方法の特徴を示す。

2.1 トラス構造物の最適化

Haftka ら^{7),8)}, Lin ら⁹⁾, 坂本ら¹⁰⁾, 尾田ら^{11)~13)}, 富田ら¹⁶⁾はトラス構造物の部材配置最適化に遺伝的アルゴリズムを適用している。この問題では空間にいくつかの節点をあらかじめ配置し、これらの節点間に部材を配置するかどうかを0または1で表現する。そして、これを遺伝子として染色体を構成する。このような染色体からなる集団に対して遺伝的操作を行うことで部材の配置を変更し、設計目的を満足する最適な部材配置を決定する。この問題は組み合わせ最適化問題として扱うことができるので、遺伝的アルゴリズムへのコーディングが容易で比較的研究が進んでいる。

2.2 セル分割を用いた連続体構造物の最適化

遺伝的アルゴリズムを連続体構造物の形状最適化に適用する研究は Sandgren ら^{5),6)}, Watabe ら¹⁷⁾, Chapman ら¹⁴⁾, 川面ら¹⁵⁾, 富田ら¹⁶⁾, 高橋ら¹⁸⁾によって行われている。Sandgren ら^{5),6)}や Chapman ら¹⁴⁾は解析対象全体を小さな正方形セルの集合体として表現し、セルが存在するかしないかを0と1で表現する方法を用いている。しかし、この方法では対象全体を詳細に表現するために多くのセルを用いると、染色体が長くなる

欠点がある。これに対して、長谷川ら¹⁵⁾は次のような方法を提案している。まず、Sandgren ら^{5),6)}や Chapman ら¹⁴⁾と同様に解析対象全体を小さな正方形セルの集合体として表現する。そして、各セルごとに評価された注目している物理量（応力など）の大きさがしきい値に比べて大きい小さいかによってセルが存在するかどうかを決定し、全体形状を表すようになっていく。この場合、しきい値を2進数化して染色体表現するので、染色体長さはセルの総数と無関係になり、各セルを染色体表現するよりも染色体の長さはかなり短くなる。これらのように解析対象全体を小さなセルで表現する方法は、2進数表現が容易で有限要素法での解析にも比較的適している。しかし、得られる最終形状と注目している物理量の計算精度はセルの大きさに依存することになる。また、得られた最終形状を実際の設計や製造に用いるためには、小さなセルの集合体として表現された最適形状を連続な曲線で表現された形状に変換する操作が必要になる。従って、解析対象の形状を曲線表示して最適化する方法が必要となる。

2.3 自由曲面表示を用いた連続体構造物の最適化

解析対象の形状を連続曲線で表示し、遺伝的アルゴリズムによって最適化する方法は Watabe ら¹⁷⁾や高橋ら¹⁸⁾によって提案されている。これらの方法では解析対象の形状を関数曲線近似し、近似曲線の制御点の位置ベクトルの列で形状を表現する染色体を構成する。このような染色体を集めて集団を構成し、これに遺伝的操作を行うことで最適形状を決定する。しかし、彼らの研究では数値解析法として有限要素法を用いているため、大規模な形状変更を伴う場合形状変更によってメッシュの歪みが生じて計算精度が低下する欠点がある。これを改善するには解析対象の形状変更毎にメッシュを作成し直せばよいが、自動メッシュ生成システムはまだ完全とはいえないうえ、かなりの計算コストを必要とする。

2.4 提案する方法

本論文で提案する方法は、基本的には Watabe ら¹⁷⁾や高橋ら¹⁸⁾の方法と同じである。つまり、解析対象の境界形状を Free Form Deformation (FFD) によって近似する。そして、FFD の制御点の位置ベクトルを遺伝子として全ての制御点の位置ベクトルの列を用いて形状に対する染色体を定義する。しかし、この場合も適応度関数の評価に有限要素法を用いれば、大規模な形状変更を伴う場合にメッシュに歪みが生じて計算精度を低下させる可能性がある。そこで、本研究では数値解析法として境界要素法を用いる。解析対象が線形

で均質な微分方程式に支配される場合、境界要素法は解析対象の境界を要素分割するだけで解析することができるので、有限要素法に比べてメッシュの歪みが生じる可能性は小さくなる。また、大変形を生じて形状変更毎にメッシュを再構成する必要がある場合でも、メッシュ再構成にかかるコストは有限要素法に比べてはるかに小さい。これらのことから、境界要素法を用いれば、有限要素法を用いる場合に比べて計算コストをかなり改善することができる。

3. アルゴリズム

3.1 FFD による形状表現

解析対象の形状表現には、コンピュータグラフィックスで用いられる Free Form Deformation (FFD)²⁰⁾を用いる。3次元物体を例にとって FFD について説明することにする。

解析対象を含む3次元直交座標系 $s-t-u$ を図1のようにとる。この空間内にある任意点 X の座標は次式で与えられる。

$$X = X_0 + sS + tT + uU \quad (1)$$

ここで、 X_0 は座標原点であり、 S, T, U は基底ベクトルを示す。 s, t, u は次式より決定される。

$$s = \frac{T \times U \cdot (X - X_0)}{T \times U \cdot S} \quad (2)$$

$$t = \frac{S \times U \cdot (X - X_0)}{S \times U \cdot T} \quad (3)$$

$$u = \frac{S \times T \cdot (X - X_0)}{S \times T \cdot U} \quad (4)$$

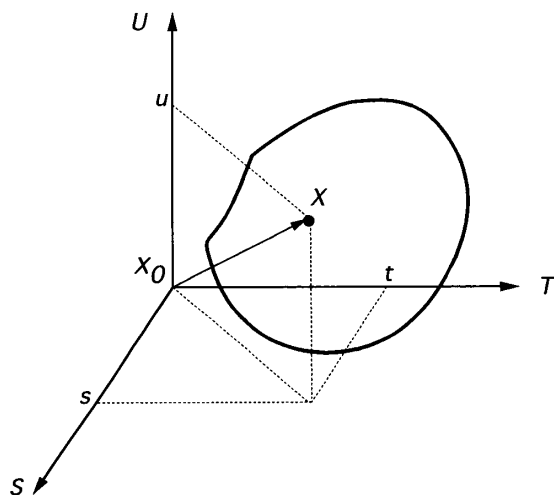


図1 stu-座標系

制御点を s, t, u 座標方向にそれぞれ $l+1, m+1, n+1$ 列づつ配置し、合計 $(l+1) \times (m+1) \times (n+1)$ 個の制御点によって形状を操作することにする。この時、任意の制御点の位置ベクトル P_{ijk} は次式で与えられる。

$$P_{ijk} = X_0 + \frac{i}{l} S + \frac{j}{m} T + \frac{k}{n} U \quad (5)$$

ここで、 i, j, k は $0 < i < l, 0 < j < m, 0 < k < n$ の範囲の整数値を取る。

形状の変形は P_{ijk} の移動によって行われるが、このとき任意点 X が X_{fd} に移動したとすると、 X_{fd} の座標は次式で与えられる。

$$X_{fd} = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n B_{i,l}(s) B_{j,m}(t) B_{k,n}(u) P_{ijk} \quad (6)$$

ここで

$$B_{i,n}(t) = {}_nC_i (1-t)^{n-i} t^i \quad (7)$$

であり、 ${}_nC_i$ は組み合わせを示す。

$${}_nC_i = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad (8)$$

FFD を用いれば比較的少ない制御点で全体形状を表現できるので、染色体の長さを短くすることができる。

3.2 染色体と遺伝的操作

3.2.1 染色体

本研究では、FFD で用いる制御点の位置ベクトル P_{ijk} を一つ一つ遺伝子と考え、次式に示すように染色体を定義する。

$$P_{000} P_{001} P_{010} P_{011} P_{100} P_{101} P_{110} P_{111} \quad (9)$$

したがって染色体長さは $(l+1) \times (m+1) \times (n+1)$ であり、これは進化の過程で変化しないものとする。

3.2.2 交叉

制御点の位置ベクトル遺伝子と考えているので、交叉を行う場合位置ベクトルの部分で分割して交叉を行う。例として、次のような2つの個体に1点交叉を作用する場合を考える。

$$P_{000} P_{001} P_{010} P_{011} P_{100} P_{101} P_{110} P_{111}$$

$$P'_{000} P'_{001} P'_{010} P'_{011} P'_{100} P'_{101} P'_{110} P'_{111}$$

第3番目と第4番目の遺伝子の間で分割して交叉を行うとすると、次式のような2つの個体を得る。

$$P_{0000} P_{001} P'_{010} P'_{011} P'_{100} P'_{101} P'_{110} P'_{111}$$

$$P'_{000} P'_{001} P_{010} P_{011} P_{100} P_{101} P_{110} P_{111}$$

本研究では、1点交叉と2点交叉、一様交叉を比較する。

3.2.3 突然変異

本研究では、突然変異の方法として、通常の突然変

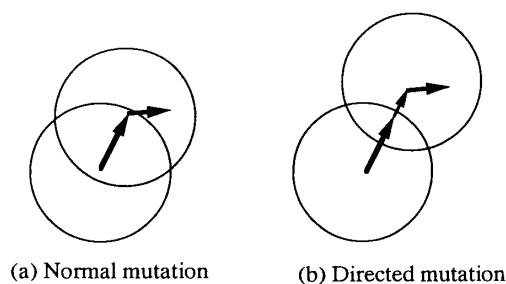


図2 突然変異

異と方向付け突然変異の2つを提案する(図2)。通常の突然変異では、ランダムに選ばれた制御点の座標を任意の点に移動させることで行う。このとき、制御点の移動量が大きすぎると形状を破壊してしまうので、移動がある一定の半径内にとどまるようにする。これに対して、方向付け突然変異では、前の世代で突然変異によって適応度が改善された場合は移動方向を記憶しておき、次の世代での突然変異のときにその方向へ片寄った突然変異を起こさせる。

3.2.4 選択

選択方法としては、各個体の適応度に比例した選択確率を取るルーレット戦略を用いることが多い。しかし、各固体の適応度の差が大きいと、この方法では淘汰圧が大きい適応度の個体に有利に作用し過ぎる場合があり、集団の多様性がすぐに失われてしまうことになる。そこで、本研究では各個体の適応度の順位に比例した選択確率をとるランキング戦略を用いる。つまり、各個体の適応度の大きさで個体の順位付けを行い、最も高い順位の個体に最も高い選択確率を与える一方で、最も低い順位の個体にも最低1つの子孫を残すように選択確率を与える。そして、これら以外の個体の選択確率は、線形内挿により決定する。この方法を用いれば、最適化の課程で負の適応度を持つ個体が生じても問題なく最適化を行うことができる。そして、これにエリート保存戦略を組み合わせることで、最良の個体が失われるのを防いでいる。

3.3 境界要素法

3.3.1 定式化

2次元弾性問題の境界要素法解析について簡単に説明する^{21),22)}。

物体力が作用しない場合、2次元弾性問題の支配方程式と境界条件は次式となる。

$$\sigma_{ij,j}=0 \quad (\text{in } \Omega) \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i & (\text{on } \Gamma_u) \\ t_i &= \bar{t}_i & (\text{on } \Gamma_t) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ここで u_i , t_i , σ_{ij} は2次元における変位成分、表面力成分、応力成分を示す。また、 $(,)_j$ は j 方向偏微分を示す。重み関数として2次元弾性問題の基本解(いわゆる Kelvin 解)をとって重みつき残差式を導き、それを变形すると次の境界積分方程式を得る。

$$Cu_i = \int_{\Gamma} (u_{ij}^* t_j - t_{ij}^* u_j) d\Gamma \quad (12)$$

ここで、 C はソース点が置かれる位置によって異なる値を取る定数であり、 u_{ij}^* , t_{ij}^* は変位と表面力に関する基本解である。式(12)を境界要素で離散化してマトリックス表示すると次式を得る。

$$Hu = Gt \quad (13)$$

ここで u , t は全節点での変位と表面力の値からなるベクトルであり、 H , G はそれらの係数マトリックスである。この式に境界条件を代入して解くことにより、境界での関数分布を決定する。

3.3.2 境界要素法と有限要素法の比較

有限要素法では解析対象の領域を有限要素に分けて解析を行う。従って、これを形状最適化問題に適用する場合、大規模な形状変更によって有限要素が歪んだり、ひどい場合には要素がひっくり返る場合が考えられるので、その結果計算精度が大きく悪化することになる。このような問題を解決するために、形状変更を行う毎にメッシュを自動的に再構成することが考えられる。確かに、有限要素法のメッシュジェネレータの近年の進歩は、このような要求にある程度答えるものである。しかし、まだ完全なものとはいえない上に、メッシュ再構成の計算コストはまだかなり高い。

この欠点を補うために、本研究では境界要素法を用いる。式(12)から分かるように、解析対象が線形で均質な微分方程式に支配されるとき、境界要素法は解析対象の境界を要素分割するだけで解析を行うことができる。従って、形状変更によってメッシュが歪む可能性は有限要素法に比べてかなり小さい。また、メッシュが大きく歪んだとしても、メッシュを再構成するための計算コストは有限要素法に比べて非常に小さい。これらのことから、境界要素法は有限要素法に比べて形状最適化問題に適した数値解析法であるといえる。

4. 解析例

4.1 解析対象

解析対象として、等分布荷重を受ける片持ちはりを考える(図3)。はりの下面形状を変更することによって、はり側面積 A を最小化することを設計目的とする。制約条件としてはりに生じる最大応力 $\sigma_{\max}$ が

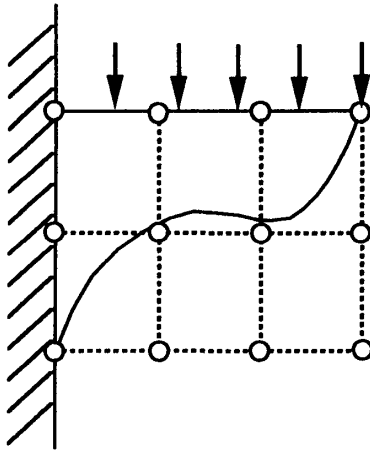


図3 解析対象

材料の許容応力 σ_c を越えないことを考える。また、最適化の過程で境界が交差した最適形状が生じる可能性があるため、このような形状が生じないことも制約条件として考慮する。これを数学的に表現すると、目的関数と制約条件は次のようになる。

$$\min f = \frac{A}{A_0} \quad (14)$$

subject to

$$h_1 = \sigma_{\max} - \sigma_c \leq 0 \quad (15)$$

$$h_2 = \text{cross} \leq 0 \quad (16)$$

ここで A_0 は初期形状である。また、 cross は形状境界の交差を示す変数であり、形状境界が交差しているとき 1、そうでないとき 0 となる。

解析対象の形状表現のために、 x 軸方向に 4 列 y 軸方向に 3 列の制御点を均等に配置して用いる。図中で、格子点は FFD の制御点を示す。はりの左端が壁と接している部分と上面の部分は形状変更されないため、ここに配置された制御点は固定する。したがって、実際に移動する制御点の数は 6 個である。なお、以下でのシミュレーションの結果は、別々の集団を用いたシミュレーションを 5 回繰り返して得られた結果の平均である。

4.2 基本スキーム

遺伝的アルゴリズムでは、制約条件つき問題をペナルティ関数法によって定式化するのが一般的である。そこで、上記の問題の適応度関数を次式で定義する。

$$\text{fitness} = 1 - \left\{ \frac{A}{A_0} + \alpha [H(\sigma_{\max}, \sigma_c) + H(\text{cross}, 0)] \right\} \quad (17)$$

ここで H はステップ関数であり、 α はペナルティ関

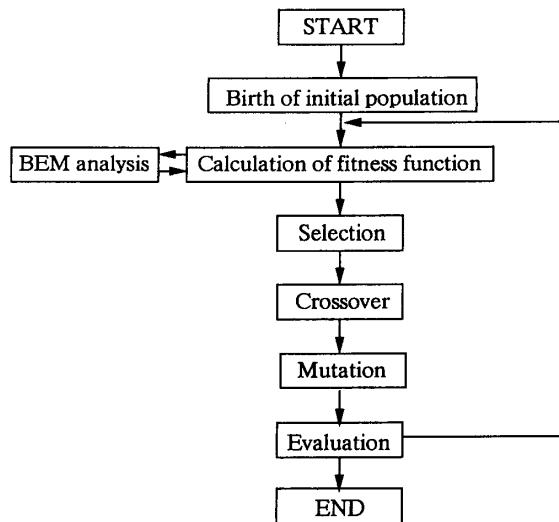


図4 スキーム 1

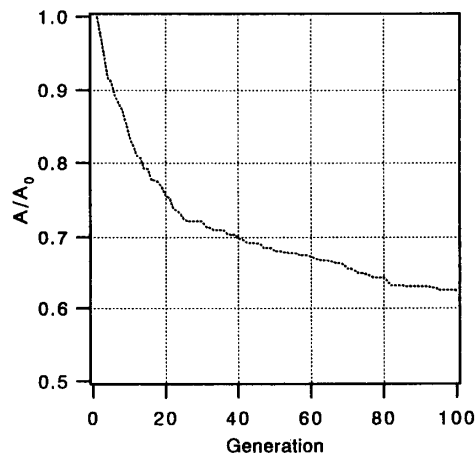


図5 スキーム 1 による結果

数である。この適応度関数を用いて図 4 に示すアルゴリズムで解析する場合を基本スキームとする。基本スキームではルーレット選択と 1 点交叉を用いるとともに、エリート保存戦略を採用する。個体数を 50、交叉率を 1、突然変異率を 0.02 として解析を行う。図 5 に各世代で最も性能の良い個体の目的関数値を示す。この図より、世代が進むにつれて最良の個体の性能が改善されている様子が分かる。そこで、以下では基本スキームを Scheme 1 とし、これをもとに計算効率を改善する方法を検討する。

4.3 集団生成法の変更による効率改善

Scheme 1 では制約条件が適応度関数の式に含まれているため、制約条件を満足しない個体も親となる可能性がある。ペナルティ関数により、制約条件を満足

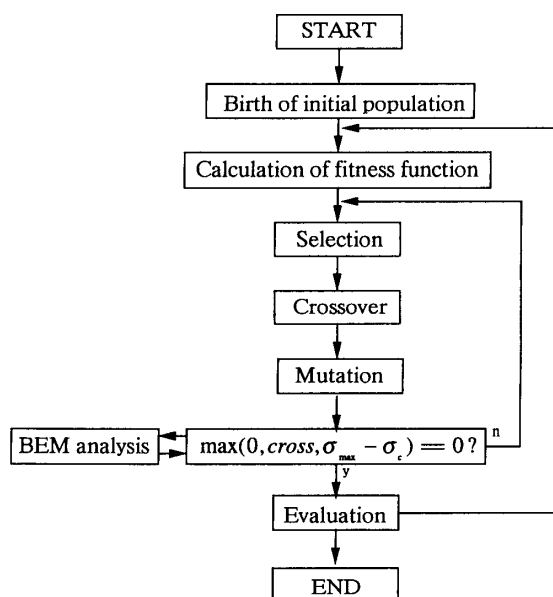


図6 スキーム2

しない個体が親となる確率は制約条件を満足する個体が親となる確率に比べて極めて小さく抑えられているので、結果として親の世代の個体数は制約条件を満足しない個体数だけ少なくなったようになり、親個体の多様性が狭められたことになる。そこで、基本的スキームを修正し、図6のようなスキーム Scheme 2を考える。この場合、次の世代の個体を生成するときに制約条件の判定を行い、制約条件を満足しない個体を除去して別の個体を生成する。そして、制約条件を満足する個体の総数が親世代の個体総数と同じになるまで、この操作を繰り返す。この場合、適応度関数として制約条件を含まないものを用いる。

$$fitness = 1 - \frac{A}{A_0} \quad (18)$$

個体数を50、交叉率を1、突然変異率を0.02として解析を行う。各世代で最も性能の良い個体の目的関数値を図7に示す。図より、各世代において Scheme 2は Scheme 1よりも性能の高い個体を生成していることが分かる。また、BEM解析の回数は Scheme 2のほうが多くなっているが、これは Scheme 2では制約条件を満足する個体だけで集団を形成するまで、繰り返し個体を生成するためである。

4.4 交叉方法による効率改善

Scheme 2を基本として交叉方法を変更することで効率の改善を検討する。Scheme 1および Scheme 2では1点交叉を用いたが、ここでは1点交叉、2点交叉、一様交叉を比較する。個体数を50、交叉率を1、

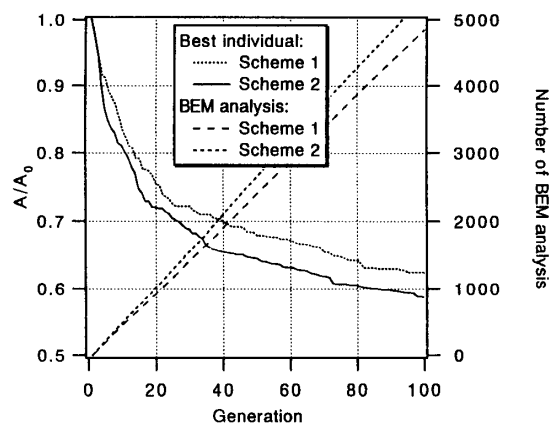


図7 スキーム2による結果

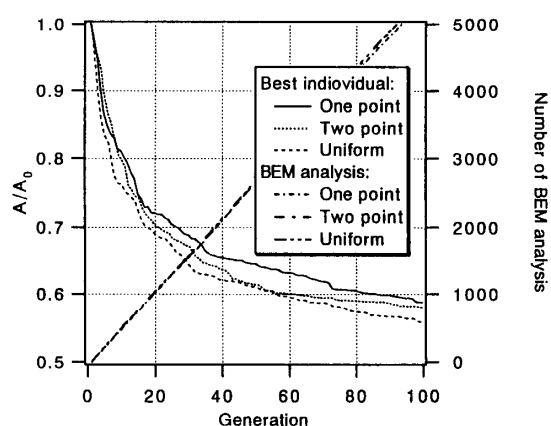


図8 交叉方法の比較

突然変異率を0.02として、Scheme 2によって解析を行う。各世代で最も性能の良い個体の目的関数値を図8に示す。この図より、一様交叉を用いる場合が最も性能の高い個体を探索していることが分かる。

4.5 方向付け突然変異による効率改善

Scheme 2に一様交叉を組み合わせた方法を Scheme 3とする。そして、これをもとに突然変異の方法を変更することで効率の改善を検討する。Scheme 1から3では突然変異の方法として通常の突然変異を用いた。そこで、先に述べた方向付け突然変異を用いて効率の改善を検討する。個体数を50、交叉率を1、突然変異率を0.02として、Scheme 3によって解析を行う。各世代で最も性能の良い個体の目的関数値を図9に示す。この図より、方向付け突然変異を用いたほうが大体において性能の良い個体を生成していることが分かる。Scheme 1に方向付け突然変異を組み合わせた方法を Scheme 4とする。

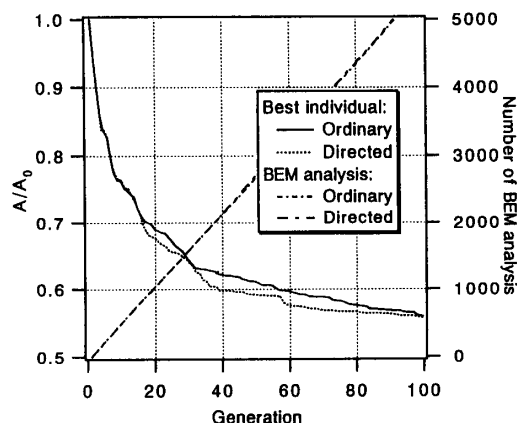


図9 突然変異方法の比較

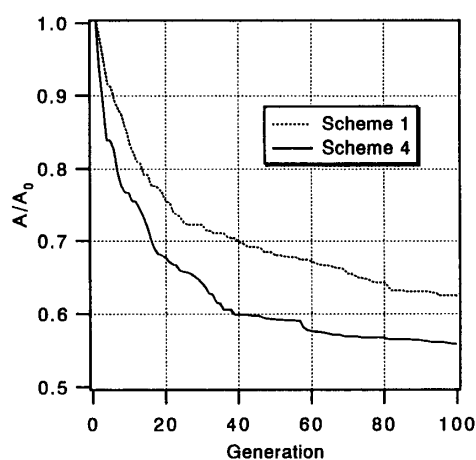


図10 スキーム1と4の比較

4.6 Scheme 1 と 4 の比較

基本スキームである Scheme 1 と最終的に得られた Scheme 4 の結果を比較すると図10のようになる。この図よりかなりの効率改善が達成されていることが分かる。Scheme 4 を用いた場合の各世代での最良の個体の形状を図11に示す。

5. 結 論

構造物や機械装置に対する設計要求はますます多様化しているので、このような問題を扱うことのできる最適設計システムが必要となっている。本研究では、そのような目的に適した最適設計システムの開発の基礎として、遺伝的アルゴリズムを用いた連続体構造物の形状最適化法を提案した。提案した方法では、解析対象を Free Form Deformation (FFD) によって表現し、FFD の制御点の位置ベクトルを遺伝子として個体の

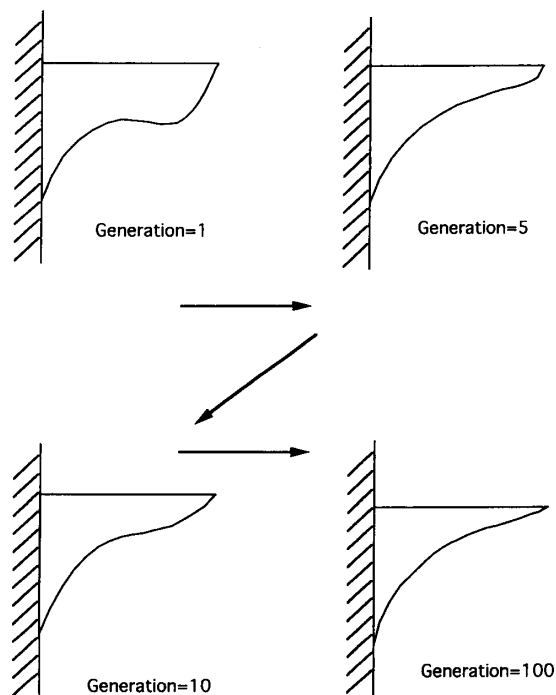


図11 スキーム4による結果

染色体を構成する。そして、このような個体からなる集団に遺伝的操作を行うことで、設計目的に適した最適形状を決定する。この方法では、FFD を用いることで比較的短い染色体長さで形状を表現することができる。また、適応度の評価に境界要素法を用いたので、有限要素法に比べて形状変化による計算精度の低下を防ぐことができる。この方法では、計算効率の改善が重要となるので、次のような方法を提案した。

- 集団生成法を変更し、制約条件を満足しない個体をあらかじめ除去するようにした。
- 1点交叉、2点交叉、一様交叉を比較し、一様交叉が最も優れているとの結論を得た。
- 方向付け突然変異を提案した。

これらの方法を用いることで、基本的スキームに比べてかなりの計算効率を達成することができたが、まだ十分とはいえない。これは、遺伝的アルゴリズムでは最適解の近傍には比較的速く収束するが、そこから最適解に収束する効率が低いためと考えられる。そこで、今後は最適解への収束を速めるようにアルゴリズムの改良を行っていく予定である。

参 考 文 献

- 1) D. E. Goldberg. *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. Addison Wesley, 1 edition, 1989
- 2) L. ディヴィス (著), 嘉数侑昇, 三上貞芳, 皆川雅章

- (共訳). 遺伝的アルゴリズムハンドブック. 森北出版, 第1版, 1994
- 3) H.-P. Schwefel. *Numerical Optimization of Computer Models*. Wiley, 1981
 - 4) D. B. Fogel and J. W. Atmar. *Proc. 1st annual Conference on Evolutionary Programming*. Evolutionary Programming Society, 1992
 - 5) E. Sandgren, E. Jensen, and J. Welton. Topological design of structural components using genetic optimization methods. In *Sensitivity Analysis and Optimization with Numerical Methods (Proc. Winter Annual Meeting ASME, Dallas, TX, 1990)*, 31/43, 1990
 - 6) E. Sandgren and E. Jensen. Automotive structural design employing a genetic optimization algorithm. In *SAE Technical Paper No. 920772 (Proc. SAE Int. Cong. Exp., Detroit, MI, 1992)*, 1992
 - 7) S. Nagendra, R. T. Haftka, and Z. Gurdal. Design of a blade stiffened composite panel by a genetic algorithm. In *Proc. 34th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Lajolla, CA, 1993*, 2418/2436, 1993
 - 8) E. Ponslet, R. T. Haftka, and H. H. Cudney. Optimal Placement of tuning masses on truss structures by genetic algorithm. In *Proc. 34th AIAA/ASME/ASCE/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Lajolla, CA, 1993*, 2448/2457, 1993
 - 9) C.-Y. Lin and P. Hajela. Genetic search strategies in large optimization. In *Proc. 34th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Dallas, TX, 1992*, 2437/2447, 1993
 - 10) 坂本二郎, 尾田十八. 遺伝的アルゴリズムを利用した最適トラス形態決定法. 日本機械学会論文集, A59 (562): 1568/1573, 1993
 - 11) 尾田十八. GA とその構造最適設計問題への応用. 日本機械学会第70期通常総会講演会講演論文集, 99/102, 1993
 - 12) 尾田十八, 王 安麟, 松本徳之. GA によるホモロガス構造の創生法. 日本機械学会論文集, A59 (568): 3056/3061, 1993
 - 13) 尾田十八, 劉 江林, 岡田裕康. 遺伝的アルゴリズムを利用したホモロガス構造の位相決定法. 日本機械学会論文集, A61 (582): 460/465, 1995
 - 14) C. D. Chapman, K. Saitou, and M. J. Jakiela. Genetic algorithms as an approach to configuration and topology design. *J. Mech. Des.*, 116: 1005/1012, 1994
 - 15) 長谷川浩志, 川面恵司. GA 利用による機械構造物の位相最適化の一方法 (有限要素の除去および負荷パラメータを染色体とする位相最適化法). 日本機械学会論文集, A61 (581): 183/190, 1995
 - 16) 富田啓一, 登坂宣好. 可変突然変異率を有する遺伝的アルゴリズムによるトラス構造物の最適設計問題. *Trans. of JSME*, 61 (585): 1096/1101, 1995
 - 17) H. Watabe and N. Okino. A study on genetic shape design. In S. Forrest, editor, *Proc. 5th Int. Conf. Genetic Algorithm*, 445/450, Morgan Kaufmann Pub., 1993
 - 18) 高橋健一, 大谷芳輝, 渡辺克彦. 遺伝的アルゴリズムの2次元形状最適化問題への適用. 第50回情報処理学会全国大会講演論文集, 259/260, 1995
 - 19) 古川知成, 矢川元基. 連続探索空間のための遺伝的アルゴリズムとその非線形逆問題への応用. *Trans. of JSME*, A61 (586): 1409/1415, 1995
 - 20) T. W. Sederberg and S. R. Parry. Free-form deformation of solid geometric models. In D. C. Evans and R. J. Athay, editors, *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH '86)*, 151/160, ACM SIGGRAPH, 1986
 - 21) P. K. Banerjee and R. Butterfield. *Boundary Element Method in Engineering Science*. McGraw-Hill Ltd., 1981
 - 22) C. A. Brebbia. *The Boundary Element Method for Engineers*. Pentech Press, 1978