

《講 座》

半正定値計画法 (SDP)

—SDP による数値最適化—

原 辰 次*

ABSTRACT This article is an introduction to the Semidefinite Program (SDP): minimization of a linear function of variables subject to LMI (Linear Matrix Inequality) constraints. The SDP is a convex optimization problem which contains the Linear Program (LP) and Quadratic Program (QP) as the special cases. We show that many mathematical and engineering problems such as control can be reformulated as SDPs.

1. はじめに

多くの工学の問題（解析問題および設計問題）は、制約条約付きの最適化問題として定式化できることが知られており、数値計画法の分野だけではなく、様々な分野で数値最適化に関する研究が活発に行われている。特に、近年発達 of 著しい計算機パワーを最大限生かして、複雑かつ大規模な問題に対しても、効率的により良い解を得ようとする動きが盛んである。

たとえば、制御系設計理論の分野ではこの十年の間、 H_∞ 制御を中心としたロバスト制御理論が大きく展開し、実用的な設計法として様々な分野で高性能な制御の実現に効果を挙げてきている。しかし、さらに実用的な制御系の実現を目指そうとすると、解析的なアプローチだけでは限界があり、複数の設計仕様を同時に満足させる多目的制御問題など、一般には解析的に解くことができない問題を数値解法によって解こうという研究が注目を浴びている^{1)~7)}。このような動きを支えているのは、ロバスト制御系設計問題の中には解析的には解が得られないが、線形行列不等式：LMI (Linear Matrix Inequality) 表現を用いて凸計画問題として定式化できる問題が少なからずあるという事実である。すなわち、制約条件を LMI 条件で表した最適化問題を数値解法で解くことによって、大域最適解を得ることができる点である。

このように LMI 条件を制約条件とする変数に対す

る線形関数の最適化問題は、半正定値計画法：SDP (Semidefinite Program) と呼ばれ、通常の線形計画問題の一つの拡張問題として、近年数値計画の分野で活発に研究がなされてきている^{8)~10)}。その主な理由は、以下の2点である。

1. Karmarkar によって線形計画問題に対して提案された内点法が SDP の解法に拡張可能で、興味ある研究課題が数多くある。
2. 先に述べたように制御系設計問題など多くの問題がこの範疇の問題として定式化可能であり、さらに一部の組合せ最適化問題も SDP を用いることにより効率的に探索ができる。

本講義の目的は、最初の2回で SDP とそのアルゴリズムを紹介し、後の2回で制御系の解析・設計問題への適用に関しての最近の研究成果と残された課題を説明することである。まず第1回目の今回は、SDP による数値最適化とは何かということを例題を中心として紹介していく。第2節で、LMI 表現とその特徴について説明した後、SDP とは何かを第3節で簡単に述べる。第4, 5, 6 節では、それぞれ数値計画問題、ある種の数学の問題、制御系の解析・設計問題と SDP との関連について例題を用いて説明する。

2. 線形行列不等式 (LMI) とは

本節では、線形行列不等式表現とその特徴（凸性など）について、例題を用いて説明しよう。

$F(x)$ を m 次元ベクトル $x = [x_1, \dots, x_m]^T$ の線形あるいはアフィン関数で、 n 次対称行列、すなわち $F(x) = F^T(x) \in \mathcal{R}^{n \times n}$ が成立するとする。このとき、対称行列の正定性の意味での不等式

Semidefinite Program (SDP)—Numerical Optimization by SDP—By Shinji Hara (Dept. of Computational Intelligence and Systems Science, Tokyo Inst. of Technology).

*東京工業大学知能システム科学専攻

$$F(x) > 0 \quad (2.1)$$

は、線形行列不等式と呼ばれ、その一般形の一つは以下のように書ける。

$$F(x) := F_0 + x_1 F_1 + x_2 F_2 + \cdots + x_m F_m > 0 \quad (2.2)$$

ここで、 $F_i (i=0, 1, \dots, m)$ は、 n 次実対称行列である。

このような関数 $F(x)$ は、 $F(x) > 0, F(\bar{x}) > 0$ を満たす任意の x と $\bar{x}$ に対して、

$$F(\alpha x + (1-\alpha)\bar{x}) > 0; \forall \alpha \in [0, 1] \quad (2.3)$$

が成立することが、以下のように簡単に示せる。

$$\begin{aligned} F(\alpha x + (1-\alpha)\bar{x}) &= F_0 + \sum (\alpha x_i + (1-\alpha)\bar{x}_i) F_i \\ &= \alpha (F_0 + \sum x_i F_i) + (1-\alpha) (F_0 + \sum \bar{x}_i F_i) \\ &= \alpha F(x) + (1-\alpha) F(\bar{x}) > 0 \end{aligned}$$

したがって、 m 次元ベクトル空間で(2.1)を満たす集合

$$\mathcal{F} := \{x \in R^m | F(x) > 0\} \quad (2.4)$$

は、明らかに凸集合となる。例えば、 x - y 平面のある一つの直線の下（あるいは上）の領域は、明らかに凸集合であるが、このことは、この領域が3つの適当な実数 a, b, c を用いた LMI 条件

$$ax + by + c > 0 \quad (2.5)$$

で書き表せることから容易に確認できる。

このように、LMI 条件を満たす集合が凸集合となることが、LMI 条件に着目する大きな理由であり、解析的には解けなかった問題を数値最適化の手法で解く可能性を与えている。

つぎに、 x - y 平面の第1象限で双曲線の上側の領域

$$xy > 1, x > 0, y > 0 \quad (2.6)$$

を満たす領域について考えてみよう。この領域は図の上からは明らかに凸であることが分る。しかし、最初の不等式は、 x, y に関し線形ではないので、この不等式から凸性をすぐに判定することはできない。

いま、(2.6)の3つの不等式条件が1つの LMI 条件：

$$\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{bmatrix} > 0 \quad (2.7)$$

と等価であることに注目すると、この領域の凸性は以下のように容易に示せる。

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \alpha x + (1-\alpha)\bar{x} & 1 \\ 1 & \alpha y + (1-\alpha)\bar{y} \end{bmatrix} \\ &= \alpha \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{bmatrix} + (1-\alpha) \begin{bmatrix} \bar{x} & 1 \\ 1 & \bar{y} \end{bmatrix} > 0 \end{aligned}$$

この例でわかるように、行列の正定性（あるいは負

定性）を基本とした不等式表現を行うことにより、式の上からは一見凸とは判定できない凸領域の凸性を容易に判定することが可能となる。これが LMI 表現のもう一つの特徴であり、上記の例のように、変数に関して1次式だけでなく、2次式も LMI 表現できる場合がある。

では、上記の事実を行列に拡張してみよう。このとき重要となるのは、Schur complement と呼ばれる次の補題である。

補題2.1 (Schur Complement):

$$\begin{bmatrix} P & S \\ S^T & Q \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow Q > 0, P - SQ^{-1}S^T > 0 \quad (2.8)$$

(証明) 等価性は、以下の関係式から明らかである。

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} I & -SQ^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & S \\ S^T & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -Q^{-1}S^T & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P - SQ^{-1}S^T & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

この関係を用いると、(2.6), (2.7)の関係は、以下のように行列の場合に拡張できる。

$$\begin{aligned} Y^{1/2}XY^{1/2} > I_n, X > 0, Y > 0 \\ \Leftrightarrow X > Y^{-1}, X > 0, Y > 0 \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} X & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

また、制御系の設計でよくでてくる Riccati 不等式 (ただし、 $R > 0$)

$$A^T X + XA + (XB + S)R^{-1}(B^T X + S^T) + Q < 0 \quad (2.10)$$

は、行列のサイズを拡大した以下のような LMI で表現できる。

$$\begin{bmatrix} -A^T X - XA - Q & XB + S \\ B^T X + S^T & R \end{bmatrix} > 0 \quad (2.11)$$

このことが制御系の解析・設計に LMI 表現が有効であることの理由となっている。

また、複数の LMI 条件 $F^{(j)}(x) < 0; j=1, \dots, k$ は、それらをブロック対角に並べた行列に対する1つの LMI 条件

$$F(x) := \text{block diag} [F^{(1)}(x), \dots, F^{(k)}(x)] > 0$$

で表現できることも LMI 表現の特徴の一つであり、複数の設計仕様を満足する多目的制御系設計への適用など、複数の制約条件を同時に満たさせるような最適化問題に適している。

3. 半正定値計画法 (SDP)

本節では、LMI 条件(2.1)を制約とする凸計画問題について概説する(その数値解法については、第2回に詳しく述べる予定である)。この種の問題は大きく分けると、以下の2つになる。

1) 可解問題 (Feasibility Problem: FP)

find $x \in \mathcal{R}^m$ such that $F(x) > 0$

2) 最適化問題 (Optimization Problem: OP)

min $c^T x$ sub. to $F(x) > 0$
 $x \in \mathcal{R}^m$

ただし、 $c \in \mathcal{R}^m$ は与えられているものとする。

なお、可解問題は以下のような最適化問題を解く問題に変換することができる。

min σ sub. to $F(x) + \sigma I > 0$
 $x \in \mathcal{R}^m, \sigma$

この問題で、最小値が負になれば可解となり、そうでなければ解けないことになる。

例えば、スケーリングされた行列ノルム条件 $\|WMW^{-1}\| < \gamma$ は

$$\begin{aligned} \|WMW^{-1}\| < \gamma \\ \Leftrightarrow W^{-T}M^TW^TWMW^{-1} < \gamma^2 I \\ \Leftrightarrow M^TW^TWM < \gamma^2 W^TW \\ \Leftrightarrow \gamma^2 V - M^TVM > 0; V := W^TW > 0 \end{aligned}$$

と変形できるので、以下の FP と OP を得る。

1) **FP** : 行列 M とレベル $\gamma > 0$ が与えられたとき、スケーリング行列 W (実際には V) を求める問題、すなわち

$\exists V := W^TW > 0$
such that $\gamma^2 V - M^TVM > 0$

2) **OP** : 行列 M とスケーリング行列 W が与えられたとき、 $\gamma > 0$ を最小化 ($\gamma^2 > 0$ を最小化) する問題、すなわち

min $\gamma > 0$
sub. to $\gamma^2 V - M^TVM > 0$

このような可解問題や最適化問題を解く方法は、従来楕円体法が用いられ、その収束速度に問題があり、実用的ではなかった。しかし最近、内点法に基づく効率の良い数値計算アルゴリズムが幾つか提案され、実用的なレベルになってきた。

内点法は線形計画問題に対して *Karmarkar* が提案した方法で、拘束条件を満たす内点を維持しながら最適点を見付ける方法である。この方法は、現在線形計画問題の解法では主流をなしている^{11,12)}。また最近、LMI 拘束条件の場合への拡張が盛んに行われており、PDP (Positive Definite Program) あるいは SDP (Semi-

definite Program) と呼ばれている^{8)~10)}。

さらに、Boyd らは、最適化問題をもう少し一般化した一般化固有値の最小化問題

3) 一般化固有値の最小化問題 (Generalized Eigenvalue Minimization Problem)

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathcal{R}^m, \lambda > 0} \lambda \\ \text{sub. to } \begin{cases} \lambda A(x) > B(x) \\ A(x) > 0, C(x) > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

を提案している¹³⁾。この問題は準凸計画最適化問題 (Quasi-Convex Optimization Problem: QOP) として解くことができ、内点法に基づく有効な数値計算アルゴリズムも提案されている¹³⁾(この問題は $\lambda A(x)$ という変数 λ と x に関する積の項があるので、線形拘束条件とはなっていない点に注意しておく)。このクラスに入る問題としては、先のスケーリングされた行列ノルムを求める問題で、

3) **QOP** : 行列 M だけが与えられたとき、スケーリングされた行列ノルムを最小にするようなスケーリング行列 W (実際には V) を求める問題、すなわち

find $V := W^TW > 0$
min $\gamma > 0$
sub. to $\gamma^2 V - M^TVM > 0$

がそれに当たる。これは、

$$\lambda \rightarrow \gamma^2, A(x) \rightarrow V, B(x) \rightarrow M^TVM, C(x) \rightarrow V$$

の対応を考えれば確認できる。

4. 数値計画問題と SDP

本節では、線形計画法など数値計画問題と SDP との関係について述べることにする。

まず最初に、線形計画問題 (LP) が SDP として定式化できることを示そう。すなわち、SDP が LP のある種の拡張となっていることを示す。

$$A = [a_1, \dots, a_m] \in \mathcal{R}^{n \times m}; b \in \mathcal{R}^n; c \in \mathcal{R}^m$$

が与えられたとき、以下の最適化問題が、線形計画問題 (LP) の一つの一般形である。

(LP)

min $c^T x$
sub. to $(Ax)_i > (b)_i; i = 1 \sim n$

ここで、 $(\xi)_i$ は、ベクトル ξ の i 番目の要素を表す。

いま、 $\xi \in \mathcal{R}^n$ に対して、 $\text{diag}(\xi)$ を

$$\text{diag}(\xi) := \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \xi_2 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \xi_n \end{bmatrix}$$

と定義すると, 上記の LP は

$$F(x) = \text{diag}(Ax - b)$$

と置いた SDP となることが容易に確認できる. すなわち

$$F_0 = -\text{diag}(b)$$

$$F_i = \text{diag}(a_i); i=1 \sim m$$

である.

さらに, 前節で示した Schur Complement の補題を用いると, 2 次計画法 (QP) も SDP に帰着できることが分かる.

$$A \in \mathcal{R}^{n \times m}; b \in \mathcal{R}^n; c \in \mathcal{R}^m; d \in \mathcal{R}$$

に対して

$$(Ax + b)^T(Ax + b) - c^T x - d < 0$$

で表される $x \in \mathcal{R}^m$ に関する 2 次不等式を考える. この不等式は, Schur Complement の補題を適用すると,

$$\begin{bmatrix} I & Ax + b \\ (Ax + b)^T & c^T x + d \end{bmatrix} > 0$$

と変形でき, x に関する 1 次行列不等式と等価であることが分かる. したがって, (QP)

$$\min f_0(x)$$

$$\text{sub. to } -f_i(x) > 0; i=1 \sim L$$

ただし,

$$f_i(x) := (Ax + b)^T(Ax + b) - c_i^T x - d_i$$

で表される 2 次計画問題 (QP) は, 以下のように SDP として定式化できる.

$$\begin{aligned} \min \quad & \lambda \\ \text{sub. to} \quad & \begin{bmatrix} I & A_0 x + b_0 \\ (A_0 x + b_0)^T & c_0^T x + d_0 + \lambda \end{bmatrix} > 0 \\ & \begin{bmatrix} I & A_i x + b_i \\ (A_i x + b_i)^T & c_i^T x + d_i \end{bmatrix} > 0; i=1 \sim L \end{aligned}$$

この他, QP に入らない非線形最適化問題で, SDP で書けるものもある. 例えば,

$$A \in \mathcal{R}^{n \times m}; b \in \mathcal{R}^n; c \in \mathcal{R}^m; d \in \mathcal{R}$$

に対して, 以下のような最適化問題を考える.

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{(c^T x)^2}{d^T x} \\ \text{sub. to} \quad & (Ax)_i > (b)_i; i=1 \sim n \\ & d^T x > 0 \end{aligned}$$

この問題は,

$$\begin{aligned} \min \quad & \lambda \\ \text{sub. to} \quad & (Ax)_i > (b)_i; i=1 \sim n \\ & \lambda > \frac{(c^T x)^2}{d^T x}, d^T x > 0 \end{aligned}$$

と等価変形できる. さらに, これに Schur Complement の補題を適用すると, 以下の SDP を得る.

$$\min \lambda$$

$$\text{sub. to } \begin{bmatrix} \text{diag}(Ax - b) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & c^T x \\ 0 & c^T x & d^T x \end{bmatrix}$$

以上示した例のように, 代表的な数理計画問題の幾つかは, SDP に帰着させることができる.

5. ある種の数学の問題と SDP

本節では, 解析的には解を得ることが困難なある種の数学の問題が SDP として定式化できることを示す.

5.1 行列問題

$x = [x_1, \dots, x_m]^T \in \mathcal{R}^m$ の 1 次関数で表される行列

$$A(x) := A_0 + x_1 A_1 + \dots + x_m A_m \quad (5.1)$$

を考える.

まず最初は, $A(x)$ が正方対称行列と仮定し, その最大固有値の最小化問題, すなわち

$$\min \lambda_{\max}(A(x))$$

を考えよう. この問題は,

$$\lambda_{\max}(A(x)) < \lambda \Leftrightarrow \lambda I - A(x) > 0$$

の関係をを用いると, 以下のような SDP で書けることが容易に分かる.

$$\begin{aligned} \min \quad & \lambda \\ \text{sub. to} \quad & \lambda I - A(x) > 0 \end{aligned}$$

つぎに, $A(x)$ の最大特異値の最小化, すなわち

$$\min \|A(x)\|$$

を考えてみよう. ここで,

$$\begin{aligned} \|A(x)\| < \lambda & \Leftrightarrow A(x)^T A(x) < \lambda^2 I \\ & \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda I & A(x) \\ A(x)^T & \lambda I \end{bmatrix} > 0 \end{aligned}$$

の関係をを用いると, 以下の SDP を得る.

$$\begin{aligned} \min \quad & \lambda \\ \text{sub. to} \quad & \begin{bmatrix} \lambda I & A(x) \\ A(x)^T & \lambda I \end{bmatrix} > 0 \end{aligned}$$

5.2 幾何の問題

n 次元ベクトル空間に 2 種類の点, $\bigcirc$ と $\times$ とがそれぞれ

$$\alpha^i \in \mathcal{R}^n; i=1 \sim L_\alpha$$

$$\beta^j \in \mathcal{R}^n; j=1 \sim L_\beta$$

に存在したとする. このとき, 2 次曲線

$$x^T A x + b^T x + c = 0 \quad (5.2)$$

ただし,

$$A = A^T \in \mathcal{R}^{n \times n}; b \in \mathcal{R}^n; c \in \mathcal{R}$$

で, $\{\alpha_i\}$ と $\{\beta_j\}$ とを分離することを考える. すなわち,

$$(\alpha^i)^T A \alpha^i + b^T \alpha^i + c < 0 \quad \forall i=1 \sim L_\alpha$$

$$(\beta^j)^T A \beta^j + b^T \beta^j + c > 0 \quad \forall j=1 \sim L_\beta$$

を満たす A, b, c が存在するかどうかという問題である。上記の不等式は、 A, b, c に関して線形であるので、SDP の可解性の問題になっていることが分かる。ここで、 $A=0$ という制約を付けると 1 次関数で分離する問題となり、 $A=I$ とすると n 次球面で分離する問題となる。さらに、 $A=A^T>0$ という制約を課すと楕円面での分離問題となり、 $A=A^T>0, I \leq A \leq \gamma I$ の制約下で、 γ を最小可する問題は、可能な限り球面に近い楕円面で分離する問題となる。

つぎに、 n 次元空間内の L 個の楕円体 $\mathcal{E}_i$:

$$x^T A_i x + 2b_i^T x + c_i < 0; i=1 \sim L \quad (5.3)$$

を最小半径の球 $\mathcal{S}$:

$$x^T x - 2p^T x + \delta < 0 \quad (5.4)$$

で被り問題を考えてみよう。

$\mathcal{S}$ の半径の 2 乗は、 $p^T p - \delta$ で与えられるので、 $\mathcal{S}$ の半径の 2 乗が λ 未満であるための条件は、

$$\begin{bmatrix} I & -p \\ -p^T & \lambda + \delta \end{bmatrix} > 0 \quad (5.5)$$

で表される。一方、 $\mathcal{E}_i$ が $\mathcal{S}$ で被われるための必要十分条件は、

$$\begin{bmatrix} I & -p \\ -p^T & \delta \end{bmatrix} < \xi_i \begin{bmatrix} A_i & b_i \\ b_i^T & c_i \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

を満たす $\xi_i \geq 0$ が存在することである。

したがって、最小半径の球 $\mathcal{S}$ で L 個の楕円体 $\mathcal{E}_i$ を被り問題は、以下のような SDP となる。

$$\begin{aligned} \min \quad & \lambda \\ \text{sub. to} \quad & (5.5), (5.6), \xi_i \geq 0 \end{aligned}$$

6. 制御系解析・設計と LMI 条件

本節では、制御系解析・設計条件と LMI との関係について紹介する。具体的には、制御系の最も基本である安定性と安定化可能性の条件、および重要な制御系設計仕様の一つである定数スケーリング H_∞ ノルム条件が LMI 条件で表せることを示す。

6.1 安定性の LMI 条件

まず、 n 次線形自由系

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (6.1)$$

の安定性の判別について考えてみよう。すなわち、 $n \times n$ 行列 A のすべての固有値が複素開左半平面に存在するかのチェックである。これには、Lyapunov の安定判別に基づく方法と行列 A の固有値の計算に基づく方法 (A の固有値がすべて複素平面の開左半平面に存在することをチェックする方法) の 2 つがある

が、ここでは前者の方法を用いる。

Lyapunov の安定判別とは、任意の正定対称行列 Q に対して、Lyapunov 方程式

$$A^T P + PA + Q = 0 \quad (6.2)$$

を満たす正定対称行列 P が存在することが系 (6.1) が安定であるための必要十分条件であることをいう。これは、Lyapunov 関数として

$$V(t) := x^T(t) P x(t); P = P^T > 0 \quad (6.3)$$

を定め、その解軌道上の時間微分が

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t)) &= x(t)^T (A^T P + PA) x(t) \\ &= -x(t)^T Q x(t) < 0 \end{aligned}$$

のように負となる条件から導かれる。

(6.2) 式は、Lyapunov 不等式

$$A^T P + PA = -Q < 0 \quad (6.4)$$

と変形できることに注目すると、Lyapunov の安定判別は LMI 条件

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & -A^T P - PA \end{bmatrix} > 0$$

を満たす $n \times n$ 対称行列 P の存在と等価となる。いま、(6.4) 式の左右から P^{-1} をかけ、 $X := P^{-1}$ とおくと、

$$P^{-1} A^T + A P^{-1} = AX + XA^T < 0 \quad (6.5)$$

を得る。これは、双対の Lyapunov 不等式であり、 A^T に対する (6.4) 式と理解することができる。

この LMI 条件による安定条件は、以下のようにシステムの A 行列が、 $\{A_1, \dots, A_L\}$ の凸包からなるとき、すなわち、

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad (6.6)$$

ただし

$$A(t) = \sum_{i=1}^L \alpha_i(t) A_i x(t); \sum_{i=1}^L \alpha_i(t) = 1$$

で与えられる場合の安定条件に拡張できる。もし、

$$A_i^T P + P A_i < 0; i=1 \sim L \quad (6.7)$$

を満たす正定対称行列 P が存在するならば、先と同様にして、Lyapunov 関数として (6.3) を選べば、

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = x(t)^T (A(t)^T P + P A(t)) x(t) < 0$$

が成立することが分る。よって、(6.7) を満たす正定対称行列 P の存在が安定性の十分条件となる。

6.2 安定化可能性の LMI 条件

つぎに、状態フィードバックによる安定化可能性について検討してみよう。すなわち、 n 次線形時不変系

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); x(t) \in \mathcal{R}^n, u(t) \in \mathcal{R}^m \quad (6.8)$$

に対して、状態フィードバック則

$$u(t) = Kx(t); K \in \mathcal{R}^{m \times n} \quad (6.9)$$

を施し、閉ループ系

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) \quad (6.10)$$

が安定化できるかについて考えてみる。双対の LMI 安定条件(6.5)式より、安定化可能条件は

$$(A + BK)X + X(A + BK)^T < 0, X > 0 \quad (6.11)$$

を満たす $X = X^T > 0$ と K が存在することとなる。この条件は X と K との積の項を含むので、一見 LMI 条件ではないように見えるが、 $M := KX$ 、すなわち $K = MX^{-1}$ とおくと

$$AX + XA^T + BM + M^T B^T < 0, X > 0 \quad (6.12)$$

のように変数 X と M の LMI 形式に書き直すことができる。したがって、 A と B が与えられたときの可安定性のチェックは

$$\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & -AX - XA^T - BM - M^T B^T \end{bmatrix} > 0$$

の LMI 条件と等価となる。

また、 $B^\perp$ を $B^\perp B = 0$ を満たす行フルランク行列と定義し、(6.12)の左右から $B^\perp$ と $B^{\perp T}$ をかけると、

$$B^\perp (AX + XA^T) B^{\perp T} < 0, X > 0 \quad (6.13)$$

を得る。これは(6.12)とは別表現の LMI 条件で変数は X だけである。上記の議論は、可安定性の必要条件を示したに過ぎないが、この条件は実は、十分条件にもなっている。なぜならば、上記 LMI 条件を満たす X が存在したとすると、十分大きな $\mu > 0$ に対して

$$K = -\mu B^T X^{-1}$$

と置くことにより、(6.12)の条件を満たすことが知られているからである。これは、一般性を失うことなく $B^T = [0, I]$ と置けば容易に証明できる。

6.3 定数スケーリング H_∞ ノルムの LMI 条件

ここでは、構造的な変動に対するロバスト安定条件を与えるという意味で、制御系の重要な設計仕様の一つである定数スケーリング H_∞ ノルム制約条件が LMI 条件で表せることを示そう。

安定な伝達関数行列

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (6.14)$$

の定数スケーリング H_∞ ノルムは

$$\|V^{-1}G(s)V\|_\infty := \sup_\omega \|V^{-1}G(j\omega)V\|$$

と定義され、その LMI 条件は以下の命題で与えられる。

命題6.1 (定数スケーリング H_∞ ノルム) :

(6.14)で与えられる $G(s)$ において、 A を安定、 V を正則行列とする。このとき、

$$\|V^{-1}G(s)V\|_\infty < \gamma \quad (6.15)$$

と以下の各条件は等価である。ただし、

$$W := VV^T$$

$$1) \quad R := \gamma^2 W - DWD^T > 0, {}^3X = X^T > 0:$$

$$(XC^T + BWD^T)R^{-1}(XC^T + BWD^T)^T + AX + XA^T + BWB^T < 0 \quad (6.16)$$

$$2) \quad {}^3X = X^T > 0:$$

$$\begin{bmatrix} AX + XA^T + BWB^T & XC^T + BWD^T \\ CX + DWB^T & DWD^T - \gamma^2 W \end{bmatrix} < 0 \quad (6.17)$$

$$3) \quad {}^3X = X^T > 0:$$

$$\begin{bmatrix} AX + XA^T & XC^T & BW \\ CX & -\gamma W & DW \\ WB^T & WD^T & -\gamma W \end{bmatrix} < 0 \quad (6.18)$$

注意: 上記の条件 1) と 2) の等価性および条件 2) と 3) の等価性は、Schur Complement の補題から容易に示せる。

注意: 上記条件は、 γ を固定すると変数 X と W に関して LMI 表現となっており、 γ 反復の手法（上記 LMI 条件を満たす解があれば γ を小さくし、なければ γ を大きくして収束させる方法）を用いることにより、最適なスケーリングを求めることが可能である¹⁾。これは、Riccati 方程式をベースとした理論では得られない結果であり、LMI 表現を用いる一つのメリットである。

7. おわりに

まず第 1 回目の今回は、SDP による数値最適化とは何かということ为例題を中心として紹介した。以降、第 2 回では、SDP のアルゴリズムを、第 3 回と第 4 回では制御系の解析・設計問題への適用について、それぞれ「LMI に基づく制御系設計」、「BMI に基づく制御系設計」を紹介する予定である。

参考文献

- 1) 小原, 杉江: 凸最適化を用いた制御系設計, システム/制御/情報, 38-3, 139/146 (1994)
- 2) 小原: 線形行列不等式 (LMI) とシステム制御理論, 制御理論部会第16回講義会資料 (1994)
- 3) S. Boyd et al.: Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory, SIAM (1994)
- 4) L. Vandenberghe and S. Boyd: Positive Definite Programming, SIAM Review, 38, 49/95 (1996)
- 5) T. Iwasaki: Control System Design via LMIs, 計測と制御, 34-3 (1995)
- 6) T. Iwasaki and R. E. Skelton: All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas, Automatica, 30-8, 1307/1317 (1994)

¹⁾実際には、 γ も変数と考え、一般化固有値問題の形をした準凸最適化問題を解く方が効率的である。

- 7) P. Gahinet and P. Apkarian: A linear matrix inequality approach to H_∞ control, *Int. J. Robust Nonlin. Contr.*, **4**, 421/448 (1994)
 - 8) L. Vandenberghe and S. Boyd: Primal-dual potential reduction method for problems involving matrix inequalities, to be published in *Math. Programming* (1994)
 - 9) K. Kojima, S. Shindoh, and S. Hara: Interiorpoint methods for the monotone linear complementarity problem in symmetric matrices, *Tech. Rep., Dept. Info. Sci., Tokyo Inst. Tech.* (1994)
 - 10) P. Gahinet, A. Nemirovskii, A. J. Laub, and M. Chilali: LMI control toolbox, *The Math-Works Inc.* (1994)
 - 11) 吉瀬: 凸計画問題に対する最適化手法—内点法と解析的中心, システム/制御/情報, **38**-3, 155/160 (1994)
 - 12) J. E. Nesterov and A. S. Nemirovsky: Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming, SIAM (1994)
 - 13) S. Boyd and L. El. Ghaoui: Method of centers for minimizing generalized eigenvalues, *Linear Algebra and Its Applications*, **188**, 63/111 (1993)
-