

《講座》

半正定値計画法 (SDP) —LMI に基づく制御系設計—

岩 崎 徹 也*・原 辰 次**

ABSTRACT In this article, we show that a variety of important control synthesis problems can be reduced to computationally tractable optimization problems involving linear matrix inequalities. In particular, the stabilization problem and the H_∞ control problems are considered and simple derivations of their solutions are given.

1. はじめに

線形行列不等式 (LMI: Linear Matrix Inequality) で記述される数値最適化問題は、内点法に基づく凸計画法により効率良く解くことができることが前回示された¹³⁾。したがって、種々の工学上の問題を解くには、それらを LMI 問題に帰着させれば良いが、LMI 問題に帰着可能な工学問題とそうでないものがある。そこで、LMI を工学上のツールとして役立てるために重要なことは、どのようなクラスの工学問題が LMI で取り扱えるのかを見極め、どのようにして LMI 問題に帰着させることができるかを明らかにすることである。

今回は、特に制御工学の分野における LMI の応用について考える。すでに、第 1 回の講座⁶⁾で制御系の解析問題の多くが LMI 問題に帰着できることを示した (Boyd らによる文献²⁾も参照されたい)。そこでここでは、LMI の概念をどのように制御系設計に応用するかについて説明することにする。まず、最も簡単な安定化問題を、状態フィードバックと動的出力フィードバックの場合に分けて詳しく取り扱う。次に、より複雑な設計仕様をもつ H_∞ 制御問題の解法について解説し、最後に、ゲインスケジューリングコントローラ的设计条件について触れる。

以降本稿では、次のような記法を用いる。行列 A

の転置を A' で表す。また、対称行列 A に対して $A > 0$ は正定性を意味する。すなわち A の最小固有値は正である。与えられた行列 $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ に対して、 $B^\perp$ は次の条件を満たす行列である。

$$B^\perp \in \mathbb{R}^{(n-r) \times n}, B^\perp B = 0, B^\perp B^{\perp'} > 0$$

ここで、 r は B のランクである。行列 A と B の線形分数変換 (LFT: Linear Fractional Transformation) は

$$A \star B := B_{22} + B_{21}A(I - B_{11}A)^{-1}B_{12}$$

で定義される。ただし、 B_{ij} ($i=1, 2; j=1, 2$) は行列 B を適当なサイズで分割して得られるブロック行列であり、 B_{11} の次元は A' のそれと同一である。信号 x の L_2 ノルムは

$$\|x\|_{L_2} := \sqrt{\int_0^\infty x(t)'x(t) dt}$$

で定義される。また、 L_2 ノルムが有限となる信号の集合を L_2 で表す。

2. 安定化コントローラ的设计

2.1 状態フィードバック

連続時間線形時不変系のプラント

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

に定数ゲインによる状態フィードバック制御

$$u = Kx$$

を施した閉ループ系

$$\dot{x} = (A + BK)x \quad (2.1)$$

を考える。ここでの目標は、この閉ループ系が安定となる状態フィードバックゲイン K を求めることである。

リアプノフの安定条件⁶⁾より、閉ループ系が安定となるための必要十分条件は、

$$X > 0, (A + BK)X + X(A + BK)' < 0 \quad (2.2)$$

Semidefinite Program (SDP)—LMI Approach to Control System Design—. By Tetsuya Iwasaki (Dept. of Control and Systems Engineering, Tokyo Inst. of Technology) and Shinji Hara (Dept. of Computational Intelligence and Systems Science, Tokyo Inst. of Technology).

*東京工業大学制御システム工学科

**東京工業大学知能システム科学専攻

を満たす対称行列 X が存在することである。したがって、安定化ゲインを求めるには (2.2) を満たす X と K を計算すれば良いことになる。しかし、この安定化問題を、(2.2) を用いて直接解くことは困難である。なぜなら、(2.2) は X と K を変数とする行列不等式であるが、特に数値計算上都合の良い性質（線形性、凸性など）を持たないからである。

LMI に基づく制御系設計法では、不等式 (2.2) にある操作を施すことにより線形な行列不等式を解く問題（LMI 可解問題）に帰着させる。ここで、“ある操作” には大まかに分けて 2 通りある一すなわち、変数変換と変数消去である。

変数変換による方法は、特にここで考える状態フィードバック問題の場合には、非常に単純である^{1),5)}。新しい変数 $G := KX$ を定義すると、(2.2) は等価的に

$$X > 0, AX + XA' + BG + G'B' < 0 \quad (2.3)$$

のように書ける。ここで、(2.2) における変数 X と K は新しい変数 X と G に置き換えられていることに注意する。明らかに不等式 (2.3) はこれらの新しい変数 X と G に関して線形であり、LMI となっている。したがって、(2.3) を満たす X と G は LMI 可解問題を解くことにより求められる。さらに、安定化ゲインは $K = GX^{-1}$ から計算できる。この変数変換が有効であるのは X の正則性が条件 $X > 0$ により保証されているからである。

変数消去による方法^{7),10)} は、リアプノフ不等式 (2.2) からフィードバックゲイン K を消去し、 X に関する LMI を導出する方法である。ここで、次の Finsler の定理が有用である^{7),10),11)}。

定理 1 (Finsler の定理) ある行列 B と対称行列 Φ が与えられたとする。このとき、以下の 3 つの条件は等価である。

- (i) $\exists G: BG + G'B' + \Phi < 0$
- (ii) $B^\perp \Phi B^\perp < 0$
- (iii) $\exists \mu > 0: \Phi < \mu BB'$

これらの条件が成り立つとき、(i) を満たす G の一つは (iii) を満たす任意の μ を用いて

$$G = -\frac{1}{2}\mu B'$$

で与えられる（証明は文献 7) を参照）。

さて、固定された X に対して、不等式 (2.2) を K について解く行列代数問題を考える。このとき、(2.2) を満たす K の存在条件が (2.3) を満たす G の存在条件と等価であることに着目し、 $\Phi = AX + XA'$ と置き、Finsler の定理 ((i) $\Leftrightarrow$ (ii)) を用いると、

$$\exists X > 0, B^\perp (AX + XA') B^\perp < 0 \quad (2.4)$$

が K が存在するための必要十分条件であることがわかる。このとき、(2.2) を満たす安定化ゲイン K は、

$$K = -\alpha \mu_* B' X^{-1}; \alpha > 1/2 \quad (2.5)$$

により与えられる。ただし

$$\mu_* := \inf \{ \mu > 0 \mid AX + XA' < \mu BB' \} \quad (2.6)$$

したがって、安定化コントローラの設計手順は、次のようになる。まず LMI (2.4) を解いて X を求める。これは LMI 可解問題であり、凸計画アルゴリズムにより計算できる。このようにして求めた X と十分大きな $\alpha (> 1/2)$ とを用いて公式 (2.5) により状態フィードバックゲイン K を計算する。この場合、変数変換法と比較して変数パラメータの数が少ないので、変数消去法の方が計算効率の面で優れていると考えられる。

上記の導出より、(2.4) を満たす X が存在することは、 (A, B) が可安定であるための必要十分条件となっていることがわかる。条件 (2.4) における $B^\perp$ には、 A のモードのうち B から可制御なものをリアプノフの安定性条件から除外する働きがあり、結果として (2.4) は不可制御モードが安定、すなわち (A, B) が可安定であるための条件となっている。

最後に、2 次形式評価関数

$$J = \int_0^\infty [x'(t) Q x(t) + u'(t) u(t)] dt \quad (2.7)$$

を最小にする LQ (Linear Quadratic) 最適制御問題と条件 (2.4) との関係について考察しよう。Finsler の定理 ((ii) $\Leftrightarrow$ (iii)) より、条件 (2.4) は

$$X > 0, AX + XA' < \mu BB' \quad (2.8)$$

を満たす $\mu > 0$ が存在することと等価である。すなわち、ある X に対して、(2.4) が成り立つならば (2.8) を満たす $\mu > 0$ が存在し、またその逆も真である。

いま、(2.8) を満たす X, μ に対して、状態変数に対する重み行列 $Q > 0$ を

$$Q := \mu X^{-1} (\mu BB' - AX - XA') X^{-1}$$

と置くと、(2.8) の条件は

$$X > 0, -Q = \mu X^{-1} (AX + XA' - \mu BB') X^{-1} < 0$$

と書ける。ここで、新しい変数 $P := \mu X^{-1}$ を定義し、上記条件を変形すると

$$P > 0, PA + A'P - PBB'P + Q = 0$$

を得る。これは、2 次形式評価関数 (2.7) に対する Riccati 方程式であり、最適状態フィードバックゲイン K_{opt} は

$$K_{opt} = -B'P$$

で与えられることが知られている。この K_{opt} は、

(2.5)式において $\alpha=1$ と置いた場合に相当し、 μ は $\mu>\mu_*$ と選ばれているので、この最適フィードバック系は $(1/2, \infty)$ のゲイン変動に対してロバスト安定であることがわかる。

2.2 動的出力フィードバック

ここでは、連続時間線形時不変系のプラント

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}^n$$

と動的コントローラ

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_c \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ y \end{pmatrix}, x_c \in \mathbb{R}^{n_c}$$

からなる閉ループ系

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A+BD_cC & BC_c \\ B_cC & A_c \end{pmatrix}}_{A_d} \begin{pmatrix} x \\ x_c \end{pmatrix}$$

に対して、安定化コントローラを設計する問題を考えよう。以下では、簡単のためコントローラはフルオーダー ($n=n_c$) で厳密にプロパー ($D_c=0$) と仮定する。

閉ループ系が安定となるための必要十分条件は、リアプノフの安定条件より

$$X_d > 0, A_d X_d + X_d A_d' < 0 \quad (2.9)$$

を満たす対称行列 X_d が存在することである。ここで、コントローラとプラントの次数が等しいと仮定しているため、コントローラの状態変数を適当に選ぶことにより、一般性を失うことなく X_d の形を

$$X_d = \begin{pmatrix} X & Z \\ Z & Y \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

に限定することができる。なぜならば、(2.9)式を満たす X_d が

$$X_d = \begin{pmatrix} X_p & X_{pc} \\ X_{pc}' & X_c \end{pmatrix}$$

の形をしていたとき、コントローラの状態 x_c に対する座標変数 $T_c := X_{pc} X_c^{-1}$ を施すと、

$$\begin{aligned} \bar{X}_d &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & T_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_p & X_{pc} \\ X_{pc}' & X_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & T_c' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X_p & X_{pc} X_c^{-1} X_{pc}' \\ X_{pc} X_c^{-1} X_{pc}' & X_{pc} X_c^{-1} X_{pc}' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とできるからである。したがって、安定化コントローラ設計問題は(2.9)を満たす X, Z, A_o, B_c および C_c を求める問題と等価となる。

状態フィードバックの場合と同様に、変数変換または変数消去を行うことにより、この問題が LMI 可解問題に帰着できることを以下に示そう。

変数変換に基づく方法は、リアプノフ不等式(2.9)

に合同変換を行った後、新しい変数を適当に選ぶことにより LMI を得る方法である^{8),12)}。まず、 $X_d > 0$ であるので Schur Complement⁶⁾ より $X > Z > 0$ となることに着目すると、 Z を置き換える新しい行列変数 $Y > 0$ が

$$Y := (X - Z)^{-1} \quad (2.11)$$

により定義できる。これを用いて

$$T := \begin{pmatrix} I & 0 \\ Y & -Y \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

を定義すると、 T は正則であり、(2.9)より

$$TX_d T' = \begin{pmatrix} X & I \\ I & Y \end{pmatrix} > 0 \quad (2.13)$$

が成り立つ。次に、 T による合同変換

$$T(A_d X_d + X_d A_d') T' < 0$$

を考えると、簡単な計算より

$$\begin{pmatrix} AX + XA' + BG + G'B' & \Gamma \\ \Gamma' & YA + A'Y + LC + C'L' \end{pmatrix} < 0 \quad (2.14)$$

を得る。ここで

$$\begin{aligned} \Gamma &:= Y(AX + BC_c Z - B_c CX - A_c Z) + A' \\ L &:= -YB_o, \quad G := C_c Z \end{aligned} \quad (2.15)$$

は A_o, B_c および C_c を置き換える新しい行列変数である。

明らかに不等式(2.13)と(2.14)は変数 X, Y, Γ, L および G に関して LMI となっており、これらの LMI 条件を満たす変数は効率良く計算できる。さらに、この LMI 問題の解を用いて $Z = X - Y^{-1}$ を計算し、(2.15)を A_o, B_c および C_c について解けば、コントローラが求まる。

一方、変数消去法は、リアプノフ不等式(2.9)からコントローラパラメータ A_o, B_o, C_c を全て消去し、上で定義された X と Y のみを変数とする LMI 問題に制御問題を帰着させる方法である^{4),7)}。もし(2.14)が成り立つならば、明らかに

$$\begin{aligned} AX + XA' + BG + G'B' &< 0 \\ XA + A'Y + LC + C'L' &< 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

が成り立つ。逆に、もしこれらの不等式が成り立てば、(2.14)を満たす Γ が存在する (例えば $\Gamma=0$)。したがって、リアプノフ不等式(2.9)と LMI(2.16)とは等価である。ここで、式(2.16)において変数 A_c (または等価的に Γ) が消去されており、それによって2つの独立した問題に帰着されていることに注意する。このことは、 (A, B, C) が可安定かつ可検出であることと安定化コントローラが存在が等価であることを示

している。

式(2.16)の最初の LMI は(2.3)と同一であり、状態フィードバック問題となっているので、前節の手法により G を消去することができる。また、(2.16)の1番目の LMI は(2.3)の双対となっており、同様の手法により L が消去できる。その結果、

$$\begin{aligned} B^{\perp}(AX+XA')B^{\perp} &< 0 \\ C^{\perp}(YA+A'Y)C^{\perp} &< 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

および(2.13)を満たす X と Y が存在することが、安定化コントローラの存在条件となる。このとき、一つの安定化コントローラは、十分大きいスカラー $\mu > 0$ を用いて

$$\begin{aligned} A_c &= A + BC_c - B_cC + \Theta \\ B_c &= \mu Y^{-1}C' \\ C_c &= -\mu B'Z^{-1} \end{aligned} \quad (2.18)$$

により与えられる。ここで

$$\Theta := Y^{-1}(YA + A'Y - \mu C'C)Y^{-1}Z^{-1}$$

である。このようにして得られるコントローラ(2.18)は、

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + Bu + B_c(y - Cx_c) + \Theta x_c \\ u &= C_c x_c \end{aligned}$$

のような構造を持っている。すなわち、コントローラの状態 x_c がある意味で制御対象の状態 x の推定値となっており、オブザーバを基盤とした制御器構造であると解釈することができる。

ここでは、変数変換法の結果(2.14)に基づいて変数消去法を説明したが、直接リアプノフ不等式(2.9)からコントローラパラメータをワンステップで消去することもできる^{4),7)}。この方法を用いると、コントローラの次数を低次元 ($n_c < n$) に固定した場合も取り扱うことができる。

なお、変数消去法の利点は変数変換法に比べて LMI 問題のパラメータの数が少なく計算効率が良いことや、従来の Riccati 方程式などに基づいた制御理論との関係など理論的な考察が可能であること等である。一方、変数変換法は全てのコントローラを凸なパラメータ空間と対応させているので、多くの設計仕様を考慮しやすく、多目的制御に適している。

3. H_{∞} 制御

与えられた安定な伝達関数 $T(s)$ の H_{∞} ノルムは

$$\|T\|_{\infty} := \sup_{s \in C_+} \|T(s)\| = \sup_{\omega \in R} \|T(j\omega)\|$$

で定義され、制御系の性能指標の一つとして重要である。ここで、 C_+ は複素平面上の閉右半平面であり、 $\|T(s)\|$ は $T(s)$ の最大特異値を表す。

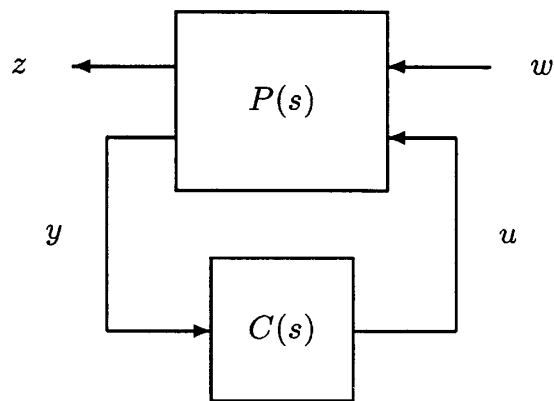


図1 フィードバックシステム

H_{∞} 制御問題は、与えられた制御対象 $P(s)$ に対し、コントローラ $C(s)$ を、閉ループ系が内部安定かつ $\|T_{zw}\|_{\infty} < 1$ が満たされるように設計するものである。ここで $T_{zw}(s)$ は信号 w から z への閉ループ系伝達関数である (図1参照)。

3.1 解析 (H_{∞} ノルム条件)

まず、内部安定性と H_{∞} ノルム条件からなる設計仕様が満たされるための必要十分条件を示す。閉ループ系伝達関数 $T_{zw}(s)$ がその状態空間実現

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_d \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_d & B_d \\ C_d & D_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_d \\ z \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

を用いて

$$T_{zw}(s) = C_d(sI - A_d)^{-1}B_d + D_d \quad (3.2)$$

で表されるとすると、以下の補題が成り立つ¹⁴⁾。

補題 3.1 (有界実補題) (3.1) 式の伝達関数 T_{zw} とあるスカラー γ が与えられたとする。このとき、以下の3つの命題は等価である。

- (i) A_d 安定かつ $\|T_{zw}\|_{\infty} < \gamma$
- (ii) $\|D_d\| < \gamma$ で、Riccati 不等式
$$A_d X_d + X_d A_d' + (X_d C_d' + B_d D_d')(\gamma^2 I - D_d D_d')^{-1}(X_d C_d' + B_d D_d')' + B_d B_d' < 0$$

を満たす正定対称行列 $X_d > 0$ が存在する。

- (iii) 線形行列不等式

$$\begin{pmatrix} A_d X_d + X_d A_d' & X_d C_d' & B_d \\ C_d X_d & -\gamma I & D_d \\ B_d' & D_d' & -\gamma I \end{pmatrix} < 0$$

を満たす正定対称行列 $X_d > 0$ が存在する。 $\square$

命題(ii)の Riccati 不等式と(iii)の LMI とは Schur Complement により関係している。

3.2 状態フィードバック

まず、状態フィードバックの場合について考えよ

う. 連続時間線形時不変系のプラント

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \\ u \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

に対して, 状態フィードバック $u=Kx$ を施した閉ループ系

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B_2K & B_1 \\ C_1+D_{12}K & D_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

が設計仕様 (安定性と H_∞ ノルム条件) を満たすように状態フィードバックゲイン K を求める問題である. 簡単のため,

$$D_{11}=0, D_{12}(C_1 \ D_{12})=(0 \ I) \quad (3.5)$$

を仮定する.

定理 2 式(3.3)で与えられる一般化プラントを考える. ここで, (3.5)が満たされると仮定する. このとき, 以下の3つの命題は等価である.

- (i) 閉ループ系が内部安定でかつ $\|T_{zw}\|_\infty < 1$ となる状態フィードバック制御則 $u=Kx$ が存在する.
- (ii) 次の Riccati 不等式を満たす正定対称行列 $X > 0$ が存在する.

$$AX+XA'+XC_1'C_1X+B_1B_1'-B_2B_2'<0 \quad (3.6)$$

- (iii) 次の LMI 条件を満たす正定対称行列 $X > 0$ が存在する.

$$\begin{pmatrix} AX+XA'+B_1B_1'-B_2B_2' & XC_1' \\ C_1X & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (3.7)$$

また, 条件(ii)あるいは(iii)が成り立つとき, (i)の条件を満たすフィードバックゲインの一つは

$$K=-B_2'X^{-1} \quad (3.8)$$

で与えられる. $\square$

証明 (i)が成立するための必要十分条件は, 有界実補題より,

$$\begin{aligned} & (A+B_2K)X+X(A+B_2K)'+B_1B_1' \\ & +X(C_1+D_{12}K)'(C_1+D_{12}K)X < 0 \end{aligned}$$

を満たす正定対称行列 $X > 0$ が存在することである.

仮定(3.5)より, 上記の Riccati 不等式は

$$\begin{aligned} & AX+XA'+XC_1'C_1X+B_1B_1'-B_2B_2' \\ & +(XK'+B_2)(KX+B_2') < 0 \end{aligned}$$

と書き直せる. したがって, (3.6)を満たす $X > 0$ の存在が, H_∞ 状態フィードバックゲインの存在のための必要条件となる. 逆に, そのような X が存在すれば, 状態フィードバックゲイン $K=-B_2'X^{-1}$ により設計仕様が達成されることがわかる. このように, 式(3.6)が H_∞ 制御問題の可解性の必要十分条件となる. また, Riccati 不等式(3.6)は Schur Complement を用いて LMI 条件(3.7)に等価変換できる.

3.3 出力フィードバック

次に, 出力フィードバックの場合について説明しよう.

う. 連続時間線形時不変系のプラント

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \\ u \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}^n \quad (3.9)$$

と動的コントローラ

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_c \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_c & B_c \\ C_c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ y \end{pmatrix}, x_c \in \mathbb{R}^n \quad (3.10)$$

からなる閉ループ系(3.1)を考える. 簡単のため, コントローラはフルオーダーかつ厳密にプロパーとしている. さらに, プラントは標準仮定(3.5)および

$$D_{21}(B_1' \ D_{21}')=(0 \ I) \quad (3.11)$$

を満たすとする. このとき,

$$A_d = \begin{pmatrix} A & B_2C_c \\ B_cC_2 & A_c \end{pmatrix}, B_d = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_cD_{21} \end{pmatrix}$$

$$C_d = (C_1 \ D_{12}C_c), D_d = 0$$

となり, 以下の定理が成立する.

定理 3 式(3.9)で与えられる一般化プラントを考える. ここで, (3.5)および(3.11)が満たされると仮定する. このとき, 以下の3つの命題は等価である.

- (i) 閉ループ系が内部安定でかつ $\|T_{zw}\|_\infty < 1$ となる (厳密にプロパーかつフルオーダーの) コントローラ(3.10)が存在する.
- (ii) 次の3つの不等式を満たす (正定) 対称行列 X および Y が存在する.

$$P := AX+XA'+XC_1'C_1X+B_1B_1'-B_2B_2' < 0 \quad (3.12)$$

$$Q := YA+A'Y+YB_1B_1'Y+C_1'C_1-C_2'C_2 < 0 \quad (3.13)$$

$$\begin{pmatrix} X & I \\ I & Y \end{pmatrix} > 0 \quad (3.14)$$

- (iii) 次の3つの LMI を満たす (正定) 対称行列 X および Y が存在する.

$$\begin{pmatrix} AX+XA'+B_1B_1'-B_2B_2' & XC_1' \\ C_1X & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (3.15)$$

$$\begin{pmatrix} YA+A'Y+C_1'C_1-C_2'C_2 & YB_1 \\ B_1'Y & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (3.16)$$

$$\begin{pmatrix} X & I \\ I & Y \end{pmatrix} > 0$$

条件(ii)あるいは(iii)が成り立つとき, (i)の条件を満たすコントローラの一つは

$$A_c = A+B_2C_c-B_cC_2+Y^{-1}C_1'C_1-Y^{-1}Q(I-XY)^{-1} \quad (3.17)$$

$$B_c = Y^{-1}C_2, C_c = B_2'Y(I-XY)^{-1} \quad (3.18)$$

により与えられる. ここで, Q は(3.13)で定義されている. $\square$

証明 設計仕様が満たされる (すなわち, (i)が成立する) ための必要十分条件は, 有界実補題より,

$$\Theta := A_d X_d + X_d A_d' + X_d C_d' C_d X_d + B_d B_d' < 0 \quad (3.19)$$

を満たす正定対称行列 $X_d > 0$ が存在することである. ここで, コントローラとプラントの次数が等しいと仮定しているので, コントローラの状態変数を適当に選ぶことにより, 一般性を失うことなく X_d の形を (2.10) に限定することができる. また, 正定行列 Y を (2.11) で定義し, (2.12) で与えられる正則行列 T を用いて Riccati 不等式 (3.19) に合同変換を行うと,

$$\Psi := T \Theta T' < 0 \quad (3.20)$$

を得る. ここで,

$$\begin{aligned} \Psi_{11} &:= A_K X + X A_K' + X C_K' C_K X + B_1 B_1' \\ \Psi_{22} &:= Y A_F + A_F' Y + Y B_F B_F' Y + C_1' C_1 \\ \Psi_{21} &:= Y(A - B_2 C_2)X + A' + Y B_1 B_1' \\ &\quad + C_1' C_1 X + Y(B_2 C_2 - A_c)Z \\ A_K &:= A + B_2 K, \quad K := C_2 Z X^{-1} \\ A_F &:= A + F C_2, \quad F := -B_c \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$(3.22)$$

である. 式 (3.20) より明らかに, $\Psi_{11} < 0$ および $\Psi_{22} < 0$ は H_∞ 補償器が存在するための必要条件である. ここで, $\Psi_{11} < 0$ が状態フィードバック H_∞ 制御問題であることに気付くと, $\Psi_{11} < 0$ を満たす K は (3.12) が成り立つとき存在し, そのような K の一つは

$$K = -B_2' X^{-1} \quad (3.23)$$

で与えられることがわかる. また, $\Psi_{22} < 0$ は $\Psi_{11} < 0$ の双対問題なので, 同様にして (3.13) および

$$F = -Y^{-1} C_2' \quad (3.24)$$

を得る. また, $X_d > 0$ より $T X_d T' > 0$ であり, (3.14) を得る. 以上より, Riccati 不等式 (3.12), (3.13) および LMI (3.14) を満たす X と Y が存在することが, H_∞ 問題の可解性の必要条件であることがわかる. 逆に, もしそのような X と Y が存在すれば, (3.21), (3.23) より C_c , (3.22), (3.24) より B_c を (3.18) のように求めることにより, $\Psi_{11} < 0$, $\Psi_{22} < 0$ が満たされる. さらに, A_c を (3.17) のように選べば, $\Psi_{21} = 0$ となり (3.20) が満たされ, H_∞ 補償器を得る. 条件 (iii) は Schur Complement より明らかである.

最後に, 良く知られた Riccati 方程式に基づく H_∞ 制御問題の解³⁾と比較するために, Riccati 不等式 (3.12), (3.13) および LMI (3.14) を

$$\chi A + A' \chi + \chi (B_1 B_1' - B_2 B_2') \chi + C_1' C_1 < 0$$

$$A \gamma + \gamma A' + \gamma (C_1' C_1 - C_2' C_2) \gamma + B_1 B_1' < 0$$

$$\chi > 0, \gamma > 0, \rho(\chi \gamma) < 1$$

と書き直してみる. ここで, $\chi := X^{-1}$, $\gamma := Y^{-1}$ であり, $\rho(\cdot)$ はスペクトラル半径である. 文献 3) の解

は上記 Riccati 不等式の不等号を等号に置き換えたものであることが確かめられる. また, 式 (3.12) および (3.13) を等号として解いた場合に, (3.17) および (3.18) により得られる H_∞ 補償器は 3) の中心解 (の双対) と一致する.

ここでは, 有界実 Riccati 不等式に現れるコントローラ変数 A_c , B_c および C_c を順に消去していくことにより, 可解性条件を LMI に帰着させるとともにコントローラの具体的表現を導出した. 他の方法として, 変数変換によるもの^{8),12)}や, ワンステップ変数消去法^{4),7)}などがある.

3.4 数値例題 (状態フィードバック H_∞ 制御)

1 次の不安定系 $1/(s-a)$; $a > 0$ に対して, 一般化プラントが

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1/\gamma & 1 \\ q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \\ u \end{pmatrix}$$

で与えられる場合の状態フィードバック H_∞ 制御問題を考える.

$u = kx$ と置くと, 簡単な計算により, 閉ループ系 $T_{zw}(s)$ は

$$T_{zw}(s) = \frac{\begin{pmatrix} q \\ k \end{pmatrix} / \gamma}{s - (a+k)}$$

と書け, その H_∞ ノルムは

$$\|T_{zw}\|_\infty^2 = \|T_{zw}(0)\|^2 = \frac{q^2 + k^2}{\gamma^2 (a+k)^2}$$

となる. しかるに, 閉ループ系の安定条件 $a+k < 0$ より, $(a+k)^2 < k^2$ が成立するので, 上記 H_∞ ノルムが 1 未満となるためには,

$$\lambda := \gamma^2 > 1$$

が必要となる.

以下ではこの仮定のもとで, Riccati 方程式

$$\chi A + A' \chi + \chi (B_1 B_1' - B_2 B_2') \chi + C_1' C_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a\chi + (1/\lambda - 1)\chi^2 + q^2 = 0$$

の正定解に基づく状態フィードバックゲイン

$$k_{Ric} = -\chi = -\frac{a\lambda + \sqrt{a^2 \lambda^2 + q^2 \lambda (\lambda - 1)}}{\lambda - 1}$$

と, (3.7) 式の LMI 条件

$$\begin{pmatrix} 2aX + (1/\lambda - 1) qX & 0 \\ qX & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} < 0$$

に基づくフィードバックゲイン k_{lmi} との関係について調べてみよう.

上記 LMI 条件は, Riccati 不等式

$$2aX + (1/\lambda - 1) + q^2 X^2 < 0$$

と等価である。よって、 $X > 0$ の条件と併せると、

$$0 < X < X_u := \frac{-a + \sqrt{a^2 + q^2(1-1/\lambda)}}{q^2}$$

を得る。また、これを(3.8)に代入すると、状態フィードバックゲイン k_{limi} に関する不等式

$$k_{limi} < -X_u^{-1} = k_{Ric}$$

が求まる。

以上のことから、Riccati 解と LMI 解を比較すると、以下ようになる。

- 唯一解を持つ Riccati 解は、領域解を与える LMI 解の境界上の一つの解となっている。
- LMI 解は領域解となっているので、他の設計仕様と組み合わせることが数値最適化の枠組で可能であり、多目的制御系設計に適している。

4. ゲインスケジューリング制御

本節では、ロバスト制御の一つであるゲインスケジューリング制御問題の可解性が LMI 条件として定式化できることを示す。

状態方程式(3.9)および

$$w(t) = \Delta(t)z(t) \quad (4.1)$$

で表されるシステムを考える。ここで x は状態、 u および y はそれぞれ制御入力とセンサ出力、 w および z は時変パラメータ $\Delta(t)$ がこのシステムに及ぼす影響を考慮するために導入された信号である。また、 $\Delta(t)$ は各時刻において次の集合に属すると仮定する。

$$\Delta := \{\Delta \in \mathbb{R}^{m \times m} \mid \Delta = \text{diag}(\delta_1 I_{h_1}, \dots, \delta_r I_{h_r}), \|\Delta\| \leq 1\} \quad (4.2)$$

このようなプラントは時変パラメータ $\Delta(t)$ と線形時不変系 $P(s)$ の LFT $\Delta \star P$ で表すことができ(ただし $P(s)$ は(3.9)で与えられるシステムの伝達関数)、LPV (Linear Parameter-Varying) システムと呼ばれる。

このプラントに対してコントローラを設計し、すべての起こり得る $\Delta(t) \in \Delta$ に対して、閉ループ系が安定となるようにしたい。この問題は、もし $\Delta(t) \in \Delta$ 以外には $\Delta(t)$ の値に関する情報が知られていないとすると次回に紹介する予定のロバスト制御問題となるが、ここでは $\Delta(t)$ をオンラインで測定可能である場合について考える。この場合、コントローラが制御入力 u を決める際にセンサ出力 y だけでなく時変パラメータ $\Delta(t)$ の情報も使用できることになる。ただし、設計の段階で $\Delta(t)$ の値がすべての t においてわかっ

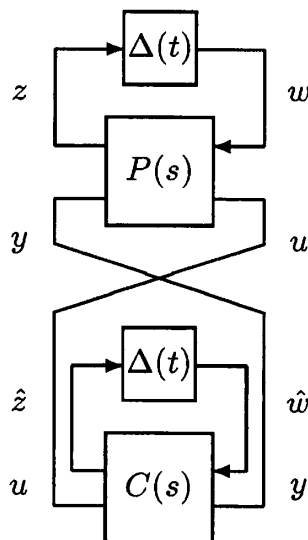


図2 ゲインスケジューリングされた制御系

ているわけではないことに注意する。

このような状況に適したコントローラの構造の一つとして次のようなものが考えられる。

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{z}} \\ \hat{z} \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B}_1 & \hat{B}_2 \\ \hat{C}_1 & \hat{D}_{11} & \hat{D}_{12} \\ \hat{C}_2 & \hat{D}_{21} & \hat{D}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{z} \\ \hat{w} \\ y \end{pmatrix},$$

$$\hat{w}(t) = \Delta(t)\hat{z}(t) \quad (4.3)$$

つまり、コントローラにプラントと同様の LPV 構造 $\Delta \star C$ (ただし $C(s)$ は上の第1式で与えられる線形系の伝達関数)を持たせることを考えるわけである。これは、プラントパラメータ $\Delta(t)$ の変化に応じてコントローラのパラメータ(ゲイン)を調整(スケジューリング)することに対応する。以上のようなプラントとコントローラから構成されるフィードバック系のブロック線図を図2に示す。

さて、ここで正確に問題を掲げてみよう。

ゲインスケジューリング問題: 式(4.2)で定義される集合 Δ に対して $\Delta(t) \in \Delta$ となる時変パラメータ $\Delta(t)$ を含む LPV システムが(3.9)と(4.1)で記述されるとする。このとき、(4.3)のような LPV コントローラを設計し、図2に示される閉ループ系がすべての $\Delta(t) \in \Delta$ に対して安定となるようにせよ。

この問題はスケールド H_∞ 制御問題の一つとして定式化でき、その解は次の定理で与えられる(離散時間系に対する結果が文献9)で与えられており、以下の定理は本質的にはそれと同じである)。

定理4 ゲインスケジューリング問題が可解であるための十分条件は、

$$\begin{pmatrix} X & I \\ I & Y \end{pmatrix} \geq 0, \begin{pmatrix} V & I \\ I & W \end{pmatrix} \geq 0 \quad (4.4)$$

$$\begin{pmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{pmatrix}^\perp \left[\begin{pmatrix} AX + XA' & XC_1' \\ C_1X & -V \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ D_{11} \end{pmatrix} V \begin{pmatrix} B_1 \\ D_{11} \end{pmatrix}' \right] \begin{pmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{pmatrix}^{\perp'} < 0 \quad (4.5)$$

$$\begin{pmatrix} C_2' \\ D_{21}' \end{pmatrix}^\perp \left[\begin{pmatrix} YA + A'Y & YB_1 \\ B_1'Y & -W \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1' \\ D_{11}' \end{pmatrix} W \begin{pmatrix} C_1' \\ D_{11}' \end{pmatrix}' \right] \begin{pmatrix} C_2' \\ D_{21}' \end{pmatrix}^{\perp'} < 0 \quad (4.6)$$

を満たす実対称行列 $X, Y, V \in D$ および $W \in D$ が存在することである。ただし D は Δ と可換なスケーリング行列の集合

$$D := \{\text{diag}(D_1, \dots, D_r) : D_i > 0\}$$

である。 $\square$

この定理の条件は LMI で記述されており、それを満たす行列 X, Y, V および W は SDP アルゴリズムを用いて求めることができる。また、これらの行列を用いて、ゲインスケジューリング問題を解くコントローラを計算することが可能である。

5. おわりに

本稿では、制御工学上重要である安定化問題と H_∞ 制御問題を例にとり、LMI に基づく制御系設計法について解説した。特に、これらの制御問題が LMI 可解問題に帰着できることを述べ、具体的にどのようにそれを行うことができるかについて説明した。次回は、スケールド H_∞ 制御問題および次数を固定した制御系設計問題に焦点を当て、LMI 条件に帰着できる問題のクラスとできない問題のクラスを分類する。また、後者に属する問題の中で、行列のランク拘束条件（非凸拘束条件）付きの最適化問題に帰着できる設計問題のクラスを明らかにし、その解法を幾つか紹介する。

参考文献

- 1) J. Bernussou, P. L. D. Peres, and J. C. Geromel: A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems, *Sys. Contr. Lett.*, **13**, 65/72 (1989)
- 2) S. P. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan: *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia (1994)
- 3) J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, and B. A. Francis: State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, **34**-8, 831/847, August 1989.
- 4) P. Gahinet and P. Apkarian: A linear matrix inequality approach to H_∞ control, *Int. J. Robust Nonlin. Contr.*, **4**, 421/448 (1994)
- 5) J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and J. Bernussou: On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems, *SIAM J. Contr. Opt.*, **29**-2, 381/402, March 1991
- 6) 原 辰次: 半正定値計画法 (SDP)-SDP による数値最適化, シミュレーション, **15**-4, 258/264 (1996)
- 7) T. Iwasaki and R. E. Skelton: All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas, *Automatica*, **30**-8, 1307/1317 (1994)
- 8) I. Masubuchi, A. Ohara, and N. Suda: LMI-based output feedback controller design, *Proc. American Contr. Conf.*, 3473/3477, June 1995
- 9) A. Packard: Gain scheduling via linear fractional transformations, *Sys. Contr. Lett.*, **22**, 79/92 (1994)
- 10) A. Packard, K. Zhou, P. Pandey, J. Leonhardson, and G. Balas: Optimal, constant I/O similarity scaling for full-information and state-feedback control problems, *Sys. Contr. Lett.*, **19**, 271/280 (1992)
- 11) I. R. Petersen and C. V. Hollot: A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems, *Automatica*, **22**-4, 397/411 (1986)
- 12) C. Scherer: Mixed H_2/H_∞ control for linear parametrically varying systems, *IEEE Conf. Decision Contr.*, 3182/3187 (1995)
- 13) 進藤 晋: 半正定値計画法 (SDP)-主双対内点法アルゴリズム, シミュレーション, **16**-1, 46/52 (1997)
- 14) K. Zhou and P. P. Khargonekar: An Algebraic Riccati Equation Approach to H_∞ Optimization, *Sys. Contr. Lett.*, **11**, 85/92 (1988)