

《講座》

半正定値計画法 (SDP)

—非凸最適化に基づく制御系設計—

岩崎 徹也*・原 辰次**

ABSTRACT General nonconvex problems are extremely difficult, while a restricted class of nonconvex problems need not be. In this article, we show that certain design problems arising in control engineering can be reduced to optimization problems involving linear matrix inequalities and a special nonconvex constraint. Several algorithms to address these nonconvex problems are introduced, and their characteristics are illustrated by numerical examples.

1. はじめに

様々な制御系解析・設計問題が線形行列不等式 (LMI: Linear Matrix Inequality) で記述される数値最適化問題に帰着できることを前回までに示した^{9,10)}。また、そのような LMI 最適化問題を効率良く解くための内点法について第 2 回の講座¹⁶⁾で解説している。このように、現場での問題を定式化したものが LMI 最適化に帰着可能な制御問題のクラスに含まれていれば、前回までの制御理論を用いて解析・設計が行えるわけである。しかしながら、そのような制御問題のクラスは限られており、また現場での実際問題はバラエティに富んでいる。例えば、コントローラの複雑さや制御対象の変動を考慮した低次元・ロバスト制御問題は実用上重要であるが、これらを LMI 問題に帰着させる方法は知られていない。

今回は、前回までに扱った LMI 問題を拡張し、取り扱うことのできる制御問題のクラスを広げる方法について解説する。具体的には、LMI による制約条件の他に非凸な制約条件あるいは目標関数を持つ最適化問題のクラスを考え、前述の低次元・ロバスト制御問題がそのようなクラスの最適化問題に帰着できることを示す。残念ながらこのような非凸最適化問題の大域的最適解を効率良く計算することは非常に困難である。本稿では、大域的収束の保証はないが少ない計算

量で近似解を得るアルゴリズムを幾つか示し、さらに大域的収束を保証するアルゴリズムについて簡単に紹介する。

以降、次のような記法を用いる。行列 A の転置を A' で表す。 $\rho(A)$ は行列 A のスペクトル半径を表す。また $\lambda_{\max}(A)$ および $\lambda_{\min}(A)$ はそれぞれ最大および最小固有値である。ただし $\lambda(\cdot)$ の定義域は全ての固有値が実数となる行列の集合とする。 $n \times n$ の実対称行列の集合を S_n で表す。また、対称行列 A に対して $A > 0$ ($A \geq 0$) は (半) 正定性を意味する、すなわち A の最小固有値は正 (非負) である。与えられた行列 $B \in R^{n \times p}$ に対して、 B^\perp は次の条件を満たす行列である。

$$B^\perp \in R^{(n-r) \times n}, B^\perp B = 0, B^\perp B^\perp{}' > 0$$

ここで、 r は B のランクである。行列 A と B の線形分数変換 (LFT: Linear Fractional Transformation) は

$$A \star B := B_{22} + B_{21}A(I - B_{11}A)^{-1}B_{12}$$

で定義される。ただし、 B_{ij} ($i=1,2; j=1,2$) は行列 B を適当なサイズで分割して得られるブロック行列であり、 B_{11} の次元は A' のそれと同一である。

2. 非凸最適化と制御系設計

2.1 低次元コントローラによる安定化

状態方程式

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

で与えられる n_p 次の線形時不変系のプラントと

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_c \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ y \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

で表される n_c 次のコントローラに対して次の制御系設計問題を考える。

Semidefinite Program (SDP)—Control System Synthesis via Nonconvex Optimization—. By *Tetsuya Iwasaki* (Dept. of Control and Systems Engineering, Tokyo Institute of Technology) and *Shinji Hara* (Dept. of Computational Intelligence and Systems Science, Tokyo Institute of Technology).

*東京工業大学制御システム工学科

**東京工業大学知能システム科学専攻

低次元安定化問題： n_p 次のプラントが(2.1)式で与えられたとき，閉ループ系を安定化する n_c 次のコントローラ(2.2)を設計せよ。ただし n_c は $n_c < n_p$ を満たす固定された整数である。

この問題の可解条件は次の定理で与えられる。

定理 1¹²⁾ 低次元安定化問題が可解であるための必要十分条件は，次の不等式を満たす実対称行列 X と Y が存在することである。

$$\begin{aligned} B^+ (AX + XA') B^+ &< 0 \\ C'^+ (YA + A'Y) C'^+ &< 0 \\ \begin{pmatrix} X & I \\ I & Y \end{pmatrix} &\geq 0 \\ \text{rank} \begin{pmatrix} X & I \\ I & Y \end{pmatrix} &\leq n_p + n_c \end{aligned} \quad (2.3)$$

定理 1 を用いて低次元の安定化コントローラを設計する際，定理 1 の不等式条件を満たす X と Y を計算する必要がある。その計算方法について考えてみよう。まず，定理 1 に与えられている X と Y に関する条件のうち，ランク条件以外はすべて LMI で記述されており計算上都合が良くなっている。しかしこのランク条件は凸の制約を与えるものではなく，計算上非常に厄介である。このような非凸問題を解くためのアルゴリズムの幾つかを後で紹介する。

特に，コントローラの次数をプラントの次数と等しくすると ($n_c = n_p$)，このランク条件は自動的に満たされ (サイズ $2n_p$ の行列のランクは常に $\leq 2n_p$ である)，前回¹⁰⁾示した安定化コントローラの存在条件を得る。この場合， X と Y はランク条件を無視して残りの LMI を満たすように選ばれたいが，これは LMI 可解問題であり効率良く計算できる。

なお，後で示す補題 2.1 を用いると，コントローラの次数が零 ($n_c = 0$)，すなわち定数ゲイン出力フィードバックの場合には，定理 1 における条件(2.3)を

$$X = Y^{-1} > 0 \quad (2.4)$$

で置き換えることができる。この置き換えによって問題自体の難しさが変わるわけではないが，異なった条件式を使うことによって異なった数値計算アルゴリズムを構築することができ，計算効率を改善するのに役立つ可能性はある。このタイプの問題に対するアルゴリズムもまた第 3 節で紹介する。

さて，条件(2.3)と(2.4)の等価性は次の補題¹⁴⁾を用いれば簡単に確認できる。

補題 2.1 整数 $m > 0$ ， $k \geq 0$ および $m \times m$ 実対称行列 X および Y に対して，以下の条件は等価である。

(i) 次の性質を満たす実対称正定行列 $P \in$

$\mathbf{R}^{(m+k) \times (m+k)}$ が存在する。

$$P = \begin{pmatrix} X & * \\ * & * \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} Y & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

(ii) 次の条件が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} X & I \\ I & Y \end{pmatrix} \geq 0, \quad \text{rank} \begin{pmatrix} X & I \\ I & Y \end{pmatrix} \leq m + k$$

証明 まず(i)が成り立つとする。 $k > 0$ の場合に行列 P を

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}' & P_{22} \end{pmatrix}$$

と分割すると，

$$X = P_{11}, \quad Y = (P_{11} - P_{12} P_{22}^{-1} P_{12}')^{-1}$$

であることがわかる。ここで， P は正定なので $P_{22} > 0$ および $Y > 0$ である。また

$$X - Y^{-1} = P_{12} P_{22}^{-1} P_{12}' \geq 0$$

となるが， $P_{22} \in \mathbf{R}^{k \times k}$ なので

$$\text{rank}(X - Y^{-1}) \leq k$$

を得る。 $k = 0$ の場合にも， $X = Y^{-1}$ なので上記の不等式が成り立つ。以上を用いて

$$\begin{pmatrix} X & I \\ I & Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & Y^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X - Y^{-1} & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & Y^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}'$$

に着目すると(ii)が成り立つことがわかる。なお，(ii) \Rightarrow (i)は， P を適切に選ぶことにより確認できる。すなわち， $k = 0$ の場合には $P = X$ ， $k > 0$ の場合には

$$P = \begin{pmatrix} X & F \\ F' & I \end{pmatrix}$$

とすればよい。ただし $F \in \mathbf{R}^{m \times k}$ は $X - Y^{-1} = FF'$ を満たす行列である。 ■

2.2 ロバスト制御

不確実性を含むプラントが $LFT \Delta \star P(s)$ で与えられたとする²²⁾。ただし Δ は既知の集合

$$\begin{aligned} \Delta := \{ \Delta = \text{diag}(\delta_1 I_{l_1}, \dots, \delta_f I_{l_f}, \Delta_1, \dots, \Delta_f) : \\ \delta_i \in \mathbf{C}, \Delta_i \in \mathbf{C}^{l_i \times l_i}, \|\Delta\| \leq 1/\gamma \} \end{aligned} \quad (2.5)$$

に属する不確定要素 ($\gamma > 0$ は与えられた実数) であり，そのサイズは

$$\Delta \in \mathbf{C}^{l \times l}, \quad l := \sum_{k=1}^{i+f} l_k$$

である。また， $P(s)$ は次の状態空間実現で与えられる n_p 次の線形時不変系の伝達関数である。

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \\ u \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

ここで， $\Delta \star P(s)$ は上記の状態空間システムにおいて $w = \Delta z$ としてフィードバックループを付け加えたときの， u から y への伝達関数を表すことに注意する

(図1参照).

さて、このプラントに対して(2.2)で与えられる n_c 次のコントローラ $C(s)$ を設計して、図1の閉ループ系を安定化したい。つまり、次の問題を考える。

ロバスト制御問題：(2.5)の変動集合 Δ と(2.6)の一般化プラント $P(s)$ のLFTで記述される不確定系 $\Delta \star P(s)$ が与えられたとする。このとき、図1の閉ループ系がすべての $\Delta \in \Delta$ に対して安定となるように、(2.2)のコントローラ $C(s)$ を設計せよ。

この問題はロバスト安定性を設計仕様とするが、 Δ の中に性能ブロックを含ませておけばロバスト性能の仕様となる²²⁾。

定理2^{3,4,11)} ロバスト制御問題が可解であるための十分条件は、次の不等式を満たす実対称行列 X, Y, L および R が存在することである。

$$\begin{pmatrix} B_2 \\ D_{12} \\ 0 \end{pmatrix}^\perp \begin{pmatrix} AX+XA' & XC_1' & B_1 \\ C_1X & -\gamma L & D_{11} \\ B_1' & D_{11}' & -\gamma R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_2 \\ D_{12} \\ 0 \end{pmatrix} < 0$$

$$\begin{pmatrix} C_2' \\ D_{21}' \\ 0 \end{pmatrix}^\perp \begin{pmatrix} YA+A'Y & YB_1 & C_1' \\ B_1'Y & -\gamma R & D_{11}' \\ C_1 & D_{11} & -\gamma L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2' \\ D_{21}' \\ 0 \end{pmatrix} < 0$$

$$\begin{pmatrix} X & I \\ I & Y \end{pmatrix} \geq 0, \quad \text{rank} \begin{pmatrix} X & I \\ I & Y \end{pmatrix} \leq n_p + n_c$$

$$L=R^{-1} \in \mathcal{D} \tag{2.7}$$

ここで \mathcal{D} は Δ と可換なスケーリング行列の集合

$$\mathcal{D} := \{\text{diag}(D_1, \dots, D_n, d_1 I_{l_{n+1}}, \dots, d_n I_{l_{n+l}}) : d_i \in \mathbf{R}, D_i \in \mathbf{R}^{l_i \times l_i}, D_i > 0, d_i > 0\}$$

である。

定理2で与えられる可解条件は、 X, Y に関するランク条件と(2.7)の制約条件 $L=R^{-1}$ 以外はすべてLMIで記述されている。前節で説明したように、コントローラの次数をフルオーダ ($n_c=n_p$) とするとこ

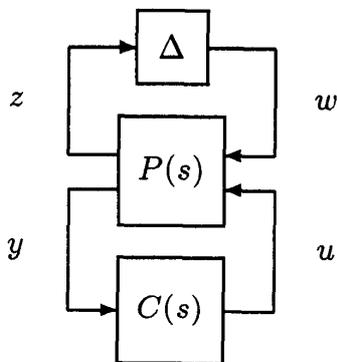


図1 ロバスト制御系

の X, Y に関するランク条件は自動的に満たされる。しかし、条件 $L=R^{-1}$ は非凸であるため、このためにフルオーダの場合でも可解条件をチェックする(すなわち X, Y, L および R を求める)ことが非常に困難となっている。

さて、次節で示すように、非凸条件である(2.7)を等価的に異なる方法で表すことにより、それに対応して種々のアルゴリズムを考えることができる。以下では、(2.7)と置き換えることのできる2つの条件を示す。

一つ目の条件は、 $L, R \in \mathcal{D}$ および

$$\begin{pmatrix} L & I \\ I & R \end{pmatrix} \geq 0, \quad \text{rank} \begin{pmatrix} L & I \\ I & R \end{pmatrix} \leq l$$

である。すなわち、スケーリング行列 L および R に対する非凸条件(2.7)を、低次元コントローラ的设计問題で現れるようなランク条件で表すことができるのである。このことは、補題2.1を用いて確認できる。

もう一つの条件は $L, R \in \mathcal{D}$ および

$$\rho(LR) \leq 1$$

である¹⁵⁾。この条件と(2.7)とは等価ではないが、一般性を失うことなく条件(2.7)をこの条件で置き換えることができる。このことは次の補題を用いて証明できる。

補題2.2 対称行列を値域とする行列関数 $\Phi(\cdot, \cdot, \cdot)$ について考える。この関数が次の性質を持つとする。すなわち、もし行列 M および対称行列 L, R, \hat{L}, \hat{R} に対して

$$\Phi(L, R, M) < 0, \quad L \leq \hat{L}, \quad R \leq \hat{R}$$

ならば、

$$\Phi(\hat{L}, \hat{R}, M) < 0$$

が成り立つ。

このとき、次の条件は等価である。

(i) $L, R \in \mathcal{D}$ および M が存在して次式を満たす。

$$\Phi(L, R, M) < 0, \quad L=R^{-1}$$

(ii) $L, R \in \mathcal{D}$ および M が存在して次式を満たす。

$$\Phi(L, R, M) < 0, \quad \rho(LR) \leq 1$$

証明 (i) \Rightarrow (ii)は、 $L=R^{-1}$ ならば $\rho(LR)=1$ なので自明である。逆を示すために、 $\hat{L}:=R^{-1}, \hat{R}:=R$ とおく。すると、 $\hat{L}=\hat{R}^{-1} \in \mathcal{D}$ であり、また $L > 0, R > 0$ に対して

$$\begin{aligned} \rho(LR) \leq 1 &\Leftrightarrow \lambda_{\max}(LR) \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \lambda_{\max}(R^{1/2}(LR)R^{-1/2}) \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \lambda_{\max}(R^{1/2}LR^{1/2}) \leq 1 \\ &\Leftrightarrow R^{1/2}LR^{1/2} \leq I \\ &\Leftrightarrow L \leq R^{-1} \end{aligned}$$

であるので、 $L \leq \hat{L}, R \leq \hat{R}$ が成り立ち、 $\Phi(\hat{L}, \hat{R}, M) < 0$ を得る。したがって(ii) \Rightarrow (i)である。 ■

2.3 数値計算問題としての定式化

前節までに、低次元コントローラやロバスト制御系の設計問題がある種の非凸問題に帰着されることを示した。ここでは、そのような非凸問題のクラスを明らかにし、次節でそれらに対する数値計算アルゴリズムを紹介する。

次の問題は、LMIによる凸な制約条件と非凸なランク条件からなるものである。

問題 1 次の条件を満たす行列 $X \in \mathcal{D}$, $Y \in \mathcal{D}$ および Z を求めよ。

$$\Phi(X, Y, Z) > 0$$

$$\begin{pmatrix} X & I \\ I & Y \end{pmatrix} \geq 0, \quad \text{rank} \begin{pmatrix} X & I \\ I & Y \end{pmatrix} \leq r$$

ただし、 $\Phi: S_n \times S_n \times R^{m \times k} \rightarrow S_l$ は与えられたアフィン関数である。

問題 1 における最初の 2 つの条件は LMI で与えられ凸であるが、最後のランク条件は非凸である。このランク条件が問題を難しくしているのである。ただし、もし $r \geq 2n$ ならばランク条件は自動的に満たされ、問題 1 は LMI 問題となり容易に解くことができる。

さて、もし問題 1 において $r=n$ ならば、補題 2.1 より最後の 2 つの条件は $X=Y^{-1} > 0$ と等価となる。次の問題はこの場合に対応する。

問題 2 次の条件を満たす行列 $X \in \mathcal{D}$, $Y \in \mathcal{D}$ および Z を求めよ。

$$\Omega(X, Y, Z) > 0$$

$$X > 0, Y > 0, XY = I$$

ただし、 $\Omega: S_n \times S_n \times R^{m \times k} \rightarrow S_l$ は与えられたアフィン関数である。

前述のように、この問題が問題 1 の特別な場合 ($r=n$) であることは明らかである。実際には逆も成り立ち^{注1)}、問題 1 と問題 2 とは等価である。ただし、これらの問題を解くための数値計算アルゴリズムは異なるアイデアに基づくことになる。

最後に掲げる問題は、LMI 制約条件とスペクトル半径条件とにより定式化され、問題 2 と非常に似たものである。しかしながら、数値計算アルゴリズムを構築するうえで重要となる違いがある。すなわち、問題 2 の制約条件を満たす集合は $XY=I$ のために内点を持たないが、次の問題の制約条件を満たす集合は内点を持つ。

問題 3 次の条件を満たす行列 $X \in \mathcal{D}$, $Y \in \mathcal{D}$ および Z

を求めよ。

$$\Psi(X, Y, Z) > 0$$

$$X > 0, Y > 0, \rho(XY) \leq 1$$

ただし、 $\Psi: S_n \times S_n \times R^{m \times k} \rightarrow S_l$ は与えられたアフィン関数である。

この問題を難しくしているのは、最後のスペクトル半径条件である。この制約条件は非凸であり、他の制約条件はすべて凸 (LMI) である。前節で示したように、アフィン関数 Ω および Ψ が補題 2.2 で仮定した性質を満たすならば、問題 2 を問題 3 に帰着させることができ、またその逆も可能である。この意味においてこれらの問題は等価である。

3. 局所的最適化アルゴリズム

本節では、前節に掲げられた種々の数値計算問題を解くためのアルゴリズムを紹介する。前述のように、ここで考える問題は一般に非凸であり、少ない計算量で大域的な収束を保証することは非常に困難である。そこで、これまでに提案されているヒューリスティックな (つまり大域的収束の保証のない) 数値計算法の幾つかをまとめて示し、それらの特徴および問題点などを明らかにする^{注2)}。

3.1 座標降下法

ここでは問題 2 を解くためのヒューリスティックな方法¹³⁾について述べる。問題 2 に対するアプローチの一つとして次の最適化問題を考える。

$$\lambda_{\text{opt}} := \min_{(X, Y) \in \mathcal{G}} \lambda_{\text{max}}(XY) \quad (3.8)$$

$$\mathcal{G} := \left\{ (X, Y) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D} : \right.$$

$$\left. \Omega(X, Y, Z) > 0, \begin{pmatrix} X & I \\ I & Y \end{pmatrix} \geq 0 \right\}$$

この最適化問題と問題 2 との関連性は、以下の等価性を用いて説明できる。すなわち、正定対称行列 $X > 0$ および $Y > 0$ に対して

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X & I \\ I & Y \end{pmatrix} \geq 0 &\Leftrightarrow X \geq Y^{-1} \\ &\Leftrightarrow Y^{1/2} X Y^{1/2} \geq I \\ &\Leftrightarrow \lambda_{\min}(Y^{1/2} X Y^{1/2}) \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \lambda_{\min}(XY) \geq 1 \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、問題 2 が可解なときは必ず集合 \mathcal{G} は空集合とならない。さらに、問題 2 が可解であるための必要十分条件は最適値 $\lambda_{\text{opt}} = 1$ が集合 \mathcal{G}

注 1) 厳密には、逆も成立するためには問題 1 のランク条件をブロック対角行列 X および Y の各ブロック毎の条件に修正する必要がある。

注 2) 各節のアルゴリズムでの探索空間はすべて異なるが、すべて凸集合であるということと同じ記号 \mathcal{G} を用いるので、注意されたい。

の（境界上でなく）内部で達成されることである。残念ながらこの最適化問題は凸ではない。なぜなら、制約条件 \mathcal{C} は凸であるが目標関数 $\lambda_{\max}(XY)$ は非凸だからである。

この非凸問題を解く上で次の事実が有用である。固定された行列 $Y > 0$ に対して関数 $\phi(X) := \lambda_{\max}(XY)$ を定義すると、 $\phi(X)$ は凸関数である。同様に $X > 0$ を固定しても凸関数が定義できる。したがって、関数 $\lambda_{\max}(XY)$ を X と Y を交互に固定して最小化することを繰り返せば、各最小化問題は凸計画問題となりしかも目標関数の値は減少する（最悪の場合でも増加することはない）。ただし、大域的最適値に任意の初期値から収束する保証はないことに注意する。このような反復法を座標降下法という。

座標降下アルゴリズム

初期化: $k=1, (X_0, Y_1) \in \mathcal{C}$

$X_k := \operatorname{argmin} \{ \lambda_{\max}(XY_k) : (X, Y_k) \in \mathcal{C} \}$

$Y_{k+1} := \operatorname{argmin} \{ \lambda_{\max}(X_k Y) : (X_k, Y) \in \mathcal{C} \}$

このアルゴリズムにおいて、各凸最適化問題の最適値は実行領域 \mathcal{C} の内部では達成されない。すなわち、最適値を与える X_k および Y_{k+1} は \mathcal{C} の境界上に存在する。したがって、すべての k に対して $(X_k, Y_k) \in \mathcal{C}$ を保証するためには、十分小さなスカラー $\varepsilon > 0$ を用いて集合 \mathcal{C} を近似することが必要である。また、初期値を $(X_0, Y_1) \in \mathcal{C}$ と選ぶことにより各凸最適化問題の実行領域が常に空集合とならないことが保証できる。さらに、目標関数の値は各ステップで増加することはない。すなわち

$$\lambda_{\max}(X_k Y_k) \geq \lambda_{\max}(X_{k+1} Y_{k+1})$$

が成立する。制約条件より $\lambda_{\max}(X_k Y_k)$ の値は1以上であるので、この目標関数値の数列は必ず収束する。

この単純なアルゴリズムを用いて問題2の解が求まる場合もあるが、収束が遅い、収束値と λ_{opt} とのギャップが大きいなどの問題が生じる場合が多い。

次に示すアルゴリズムは、上記の座標降下アルゴリズムの各凸最適化問題を解析中心の計算で置き換える修正を施したもので、より最適値に近い解がより少ない計算量で得られる場合が多い。なお、LMI $\mathbf{u}(X) > 0$ の解析中心を次のように表記・定義する (e.g.[1]).

$$\begin{aligned} \operatorname{ac} \{ \mathbf{u}(X) > 0 \} \\ := \operatorname{argmin} \{ \log \det \mathbf{u}(X)^{-1} : \mathbf{u}(X) > 0 \} \end{aligned}$$

中心化反復アルゴリズム

1. パラメータ θ を $0 < \theta < 1$ の範囲から選ぶ。
2. $k=1$ として Y_1 および β_1 を $(\hat{X}, \hat{Y}) \in \mathcal{C}$ を用いて次のように初期化する。

$$Y_1 := \hat{Y}, \quad \beta_1 > \lambda_{\max}(\hat{X}\hat{Y})$$

3. 解析中心 X_k を計算し、 α_k を更新する。

$$X_k := \operatorname{ac} \{ Y_k^{1/2} X Y_k^{1/2} < \beta_k I, (X, Y_k) \in \mathcal{C} \}$$

$$\alpha_k := (1-\theta)\lambda_{\max}(X_k Y_k) + \theta\beta_k$$

4. 解析中心 Y_k を計算し、 β_k を更新する。

$$Y_{k+1} := \operatorname{ac} \{ X_k^{1/2} Y X_k^{1/2} < \alpha_k I, (X_k, Y) \in \mathcal{C} \}$$

$$\beta_k := (1-\theta)\lambda_{\max}(X_k Y_{k+1}) + \theta\alpha_k$$

5. もし $(X_k, X_{k+1}) \in \mathcal{C}$ または $(Y_{k+1}, Y_{k+1}) \in \mathcal{C}$ ならばストップ。そうでなければ $k \leftarrow k+1$ としてステップ3へ。

このアルゴリズムにおいて、初期化パラメータ $(\hat{X}, \hat{Y}) \in \mathcal{C}$ は LMI 問題を解くことにより求められる。もしそのような行列が存在しなければ（つまり \mathcal{C} が空集合ならば）問題2は解を持たない。 \mathcal{C} が空集合でない場合には、ステップ3および4の $\operatorname{ac}\{\cdot\}$ の括弧の内部で定義される集合は空でなくかつ有界であり、すべての $k \geq 1$ に対して解析中心が存在する。さらに、 $\lambda_{\max}(X_k Y_k)$ に対する上界値 α_k および β_k は減少数列であり、かつ常に1以上である。

$$\beta_k > \alpha_k > \beta_{k+1} \geq 1, \quad \forall k \geq 1$$

したがってその収束は保証される。

例1 次の問題を考える。

$$\min_{(x,y) \in \mathcal{C}} xy$$

この問題の大域的最適解は1であり、それを与えるのは $x=y=1$ である。ここで中心化反復アルゴリズムを適用すると以下の結果が得られた。

$$\text{初期値: } y_0=2, \beta_0=5, \theta=0.2$$

$$\text{収束値: } (x, y) = (1.0230, 0.9886)$$

$$xy = 1.0112$$

点列 (x_k, y_k) を図2の x - y 平面上に示す。

図2において実行領域 \mathcal{C} は点 $(x, y) = (1, 1)$ で交

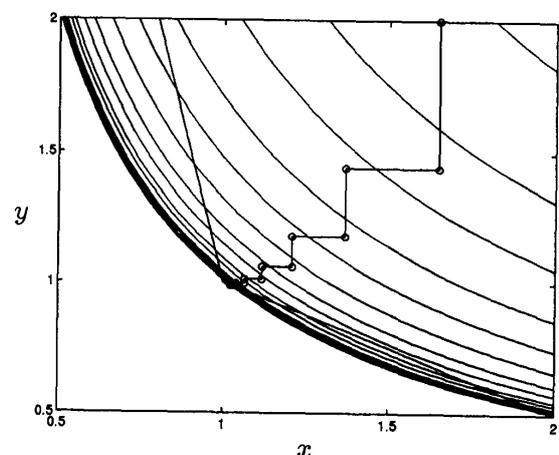


図2 中心化反復アルゴリズムの振る舞い

わっている2つの直線の上側の領域である。また、図中の曲線は $xy = \alpha_k$ および $xy = \beta_k (k=1, 2, \dots)$ で表される双曲線である。与えられた y_k に対して解析中心 x_k は次のように与えられる。すなわち、直線 $y = y_k$ 集合 \mathcal{C} 、および双曲線 $xy = \beta_k$ の下側の領域の交わりで定義される線分の midpoint の x 座標が x_k である。

もし座標降下アルゴリズムを同じ初期値を用いてこの問題に適用した場合、1回目の反復でアルゴリズムはストップしてしまい、収束値 $(x, y) = (0.8, 2)$ および $xy = 1.6$ を得ることになる。 ■

中心化反復アルゴリズムは座標降下アルゴリズムと異なり、問題2の解を得るために $\lambda_{\max}(X_k Y_k) = 1$ を必要としない。直観的には、このアルゴリズムは点 (X_k, Y_k) を集合 \mathcal{C} の内側奥深くに保ちながら X_k と Y_k^{-1} (あるいは等価的に X_k^{-1} と Y_k) との距離を小さくしようとするものである。したがって、点 (X_k, X_k^{-1}) および (Y_k^{-1}, Y_k) は集合 \mathcal{C} の内部へと移動して行くことになる。このことは次の例からも理解できる。

例2 問題2を考える。ただし

$$\Omega(X, Y, Z) := \begin{pmatrix} \Omega_x(X) & 0 \\ 0 & \Omega_y(Y) \end{pmatrix}$$

$$\Omega_x(X) := -B^{-1}(AX + XA')B^{-1}$$

$$\Omega_y(Y) := -C'^{-1}(YA + A'Y)C'^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & * \end{pmatrix} := \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & * & * \end{array} \right)$$

である。この問題は、定数ゲイン ($n_r=0$) による出力フィードバック安定化問題を定式化したものである。上記の (A, B, C) は制御対象が2次積分器 $j=u$ であることを意味する。このシステムを安定化する定数ゲインは存在しないことが知られている。つまり、問題2は解を持たない。

中心化反復アルゴリズムをこの問題に対して適用した。ここで、パラメータを $\theta=0.2$ と選んだ。初期値の選び方の詳細は文献13)を参照されたい。

図3に中心化反復アルゴリズムの振る舞いを示す。ただし α_k および β_k は $\lambda_{\max}(X_k Y_k)$ の上界であるが、収束状況を直観的に視覚化するために β_k の代わりに β_k^{-1} をプロットしてある。こうすることにより、 α_k および β_k^{-1} の2つの曲線間の距離で X_k と Y_k^{-1} との“距離”を視覚的に測ることができる。同様に、2つの曲線 $-\Omega_x(Y_k^{-1})$ および $-\Omega_y(X_k^{-1})$ と横軸との距離はそれぞれ (Y_k^{-1}, Y_k) と \mathcal{C} および (X_k, X_k^{-1}) と \mathcal{C} との“距離”を測る目安となる。例えば、 $(Y_k^{-1}, Y_k) \in \mathcal{C}$ であるための必要十分条件は $-\Omega_x(Y_k^{-1}) < 0$ である。

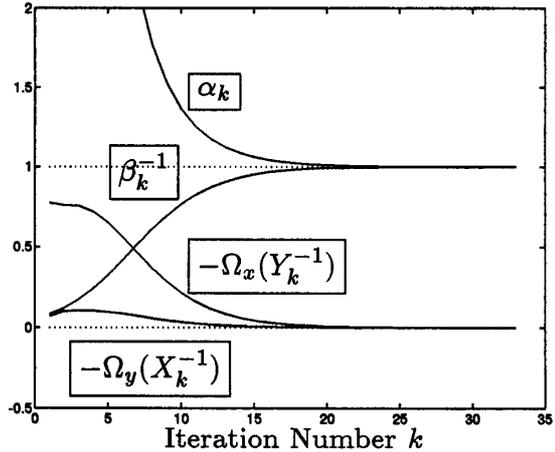


図3 中心化反復アルゴリズムの振る舞い (定数ゲイン出力フィードバック)

問題2が解を持たないにも関わらず、行列 $X_k Y_k$ は単位行列 I に近付いている (あるいは等価的に $\alpha_k \rightarrow 1$)。これは矛盾のようにも見えるが実はそうではなく、 (X_k, X_k^{-1}) および (Y_k^{-1}, Y_k) は確かに集合 \mathcal{C} に近付いているが \mathcal{C} の内部に入ることはない。つまりすべての k に対して $\Omega_y(X_k^{-1}) \leq 0$ および $\Omega_x(Y_k^{-1}) \leq 0$ となっているのである。実際、33回の反復の後

$$X = \begin{pmatrix} 1.5470 & -4.4991 \times 10^{-5} \\ -4.4991 \times 10^{-5} & 4.7298 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0.64646 & -5.1534 \times 10^{-6} \\ -5.1534 \times 10^{-6} & 0.21144 \end{pmatrix}$$

$$\Omega_x(X) = 9.00 \times 10^{-5}, \Omega_y(X^{-1}) = -1.23 \times 10^{-5}$$

$$\Omega_x(Y^{-1}) = -7.54 \times 10^{-5}, \Omega_y(Y) = 1.03 \times 10^{-5}$$

$$\lambda(XY) = 1.00008, 1.00002$$

が得られる。ここで、 $X \cong Y^{-1}$ ではあるが (X, X^{-1}) と (Y^{-1}, Y) のどちらも \mathcal{C} に属してはいない。この例が示すように、 $\alpha_k \rightarrow 1$ であっても必ずしも問題2が可解であるとは限らない。 ■

例3 例2の問題を以下のデータで考える。

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & * \end{pmatrix} := \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * \end{array} \right)$$

この問題は、1次の動的出力フィードバックにより2次積分器 $j=u$ を安定化することに対応している。この場合、そのような安定化コントローラが存在することがわかっている。つまり問題2は可解である。

この問題に再び中心化反復アルゴリズムを適用し

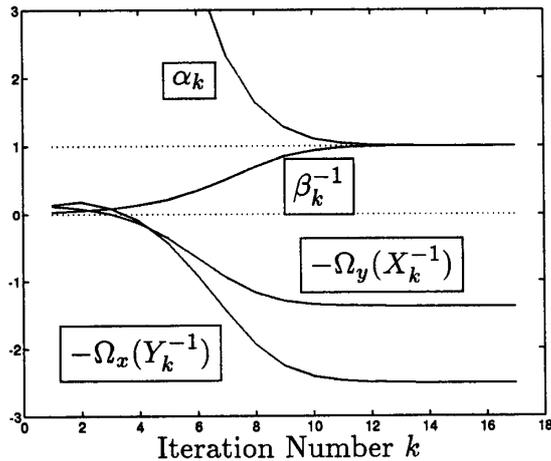


図4 中心化反復アルゴリズムの振る舞い (1次動的出力フィードバック)

た. パラメータは例2の場合と同様に $\theta=0.2$ と選んだ. 図4にアルゴリズムの振る舞いを示す. 安定化コントローラを設計するためには $k=4$ で $(X_k, X_k^{-1}) \in \mathcal{C}$ および $(Y_k^{-1}, Y_k) \in \mathcal{C}$ なので4回の反復で十分である. $k > 4$ でアルゴリズムを継続して実行すると, 点 (X_k, X_k^{-1}) および (Y_k^{-1}, Y_k) は集合 \mathcal{C} の内側深くへと移動して行く. これは中心化反復アルゴリズムの典型的な振る舞いである. 17回の反復の後

$$Y^{-1} \cong X = \begin{pmatrix} 1.1458 & -0.6910 & -1.6325 \\ -0.6910 & 1.7966 & 2.0712 \\ -1.6325 & 2.0712 & 3.6253 \end{pmatrix}$$

$$\lambda(XY) = \begin{cases} 1.000048 \\ 1.000048 \\ 1.000048 \end{cases}$$

を得た. したがって, 問題(3.8)の大域的最適解が許容誤差 $|\lambda_{\max}(XY) - \lambda_{\text{opt}}| \leq 5 \times 10^{-5}$ の範囲で求まったことになる. ■

3.2 線形化法

本節で述べる数値計算法は問題1に対するものであり, 文献5)の結果である. ここでは, 問題1の制約条件のもとでランクの上界 r を最小化することを考える. 問題1のランクは, 実行可能領域にある X と Y を2番目の不等式条件の境界上へと押しやることにより減少する. このための自然な方法の一つとして, 次の最適化問題を考える.

$$\phi_{\text{opt}} := \min_{(X, Y) \in \mathcal{C}} \phi(X, Y)$$

$$\mathcal{C} := \left\{ (X, Y) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D} : \right.$$

$$\left. \Phi(X, Y, Z) > 0, \begin{pmatrix} X & I \\ I & Y \end{pmatrix} \geq 0 \right\}$$

ただし $\phi: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ は以下の性質を持つ関数である.

- (a) $\phi(X, Y) \geq \phi_{\min}, \forall (X, Y) \in \mathcal{C}$
- (b) $\phi(X, Y) = \phi_{\min} \iff XY = I$
- (c) ϕ は \mathcal{C} で微分可能
- (d) ϕ は \mathcal{C} で準凹関数

最初の2つの性質は, (a)と(b)を満たすスカラー ϕ_{\min} が存在することである. 前に示したように, 問題1の2番目の不等式が成り立つための必要十分条件は, 行列 XY のすべての固有値が1以上であることである. もし X と Y がちょうどこの不等式の境界上であれば, $\lambda_i(XY) = 1$ が幾つかの i について成り立ち, その数だけ問題1に現れるランクが落ちることになる. 特に, すべての i について成り立てば $XY = I$ となり, ランクは最小となる. したがって, 性質(a)と(b)をもつ関数 ϕ を最小化することにより $XY = I$ に近付き, ランクの減少が期待できる. このことから, 関数 ϕ は “Attracting Function” と呼ばれる.

次のアルゴリズムは, 上記の最適化問題の局所解を求めるのに有効である.

線形化アルゴリズム

1. 初期化: $k=0, (X_0, Y_0) \in \mathcal{C}$
2. 行列 V_k と W_k を計算する.

$$V_k := \frac{\partial \phi}{\partial X}(X_k, Y_k), \quad W_k := \frac{\partial \phi}{\partial Y}(X_k, Y_k)$$

3. LMI 最適化問題を解く.

$$(X_{k+1}, Y_{k+1}) := \underset{(X, Y) \in \mathcal{C}}{\text{argmin}} \text{tr}(V_k X + W_k Y)$$

このアルゴリズムにおいて, 上記の性質(a)-(d)を持つ関数を具体的に指定する必要がある. そのひとつとして次のようなものが考えられる.

$$\phi(X, Y) = 2\text{tr}(XY)^{1/2}$$

ステップ2で必要なグラディエント V_k および W_k は, この関数に対しては

$$V = H^{-1}(HYH)^{1/2}H^{-1}, \quad H := X^{1/2}$$

$$W = V^{-1}$$

で与えられる.

さて, もし性質(a), (b)および(d)が満たされるならば数列 $\phi(X_k, Y_k)$ は下に有界でありしかも単調減少することを証明できるので, 線形化アルゴリズムの収束は保証される. この証明の鍵となるアイデアは, 凹関数とその線形近似関数の下側に常に位置する, ということである.

例4 問題1を以下のデータで考える.

$$\Phi(X, Y, Z) := \begin{pmatrix} \Phi_x(X) & 0 \\ 0 & \Phi_y(Y) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Phi_x(X) &:= -B^{-1}(AX+XA'+0.4X)B^{-1'} \\ \Phi_y(Y) &:= -C^{-1}(YA+A'Y+0.4Y)C^{-1'} \\ \begin{pmatrix} A & B \\ C & * \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \end{aligned}$$

この問題は、閉ループ系の極が $\{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Re}(\lambda) < -0.2\}$ の領域に入るようにコントローラを設計する問題に対応している。ただし、 $\text{Re}(\cdot)$ は複素数の実部を表す。この極領域制約条件は、初期値応答の収束の早さが一定のレベル以上になるように要求するものである。また、問題のデータ (A, B, C) は物理的な意味を持ち、2つの台車がバネで繋がれた機械系の状態空間実現となっている¹⁶⁾。この機械系は2次元のコントローラで安定化可能であるが、1次元のコントローラでは安定化できないことが知られている。したがって、問題1は $r \leq 5 (=4+1)$ のとき解を持たないことがわかる。

関数 ϕ を上記のように選び、線形化アルゴリズムをこの問題に適用した。図5に線形化アルゴリズムの振る舞いを示す。

5回の反復の後アルゴリズムは収束し、以下の結果を得た。

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 2.8745 & 2.0917 & -0.5749 & -1.3931 \\ 2.0917 & 4.3544 & 0.5564 & -0.8709 \\ -0.5749 & 0.5564 & 1.4962 & -0.2256 \\ -1.3931 & -0.8709 & -0.2256 & 2.6111 \end{pmatrix} \\ Y &= \begin{pmatrix} 2.6111 & -0.2256 & -0.8709 & -1.3931 \\ -0.2256 & 1.4962 & 0.5564 & -0.5749 \\ -0.8709 & 0.5564 & 4.3544 & 2.0917 \\ -1.3931 & -0.5749 & 2.0917 & 2.8745 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\lambda(XY) = 1.0000, 1.0000, 8.9248, 21.7285$$

行列 XY の固有値から、問題1に現れるランクが2減っていることがわかる。このようにして、 $r=6$ の場合の問題1の解が得られた。 $r \leq 5$ のときには解が存在しないことがわかっているのので、線形化アルゴリズムによりランクの大域的最小値が達成されたといえる。

3.3 射影法

本節では再び問題1を考える。ここで紹介する射影法は文献7),8)による。

この方法においては、問題1を以下のように定式化し直す。条件

$$Q_{\text{feas}} \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$$

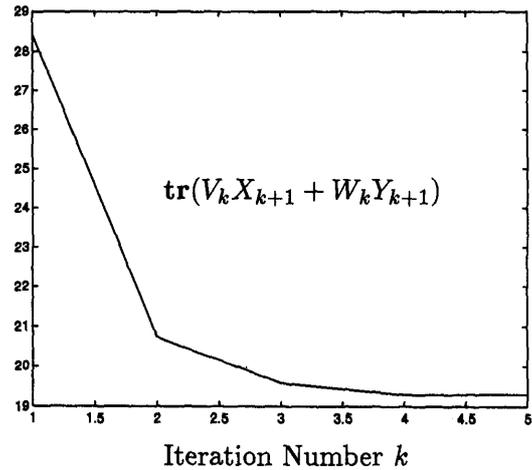


図5 線形化アルゴリズムの振る舞い

を満たす行列 Q_{fea} を計算せよ。ただし

$$\mathcal{C} := \left\{ Q = \begin{pmatrix} X & I \\ I & Y \end{pmatrix} : Q \geq 0 \right\}$$

$$\mathcal{D} := \{ Q : \text{rank}(Q) \leq r \}$$

ここで、 \mathcal{C} は閉じた凸集合であり、 \mathcal{D} は閉じた集合ではあるが凸ではない。これらの集合が閉集合であることは、射影法を適用するうえで重要である。問題1において、 $\Phi(X, Y, Z)$ に対する不等式は等号を含まないが、上記の定式化では $\Phi(X, Y, Z) \geq 0$ のように条件が弱められている。もしこの変更が不都合であれば、十分小さいスカラー $\epsilon > 0$ を用いて問題1の実行可能領域を閉集合で近似すれば良い。

以下に示すアルゴリズムは、2つの集合 \mathcal{C} and \mathcal{D} の交わりに局所的に収束する。

反復射影アルゴリズム

1. 初期化: $k=0, Q_0$
2. $\hat{Q}_{k+1} := \mathcal{P}_{\mathcal{C}} Q_k$
3. $Q_{k+1} := \mathcal{P}_{\mathcal{D}} \hat{Q}_{k+1}$

ここで $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}$ は集合 \mathcal{S} ($=\mathcal{C}$ または \mathcal{D}) への直交射影を表す。

$$\mathcal{P}_{\mathcal{S}} Q_0 := \text{argmin} \{ \|Q - Q_0\|_F : Q \in \mathcal{S} \} \quad (3.9)$$

ただし $\|\cdot\|_F$ は Frobenius ノルムである。

このアルゴリズムは、一つの集合内の点から別の集合への直交射影を繰り返すことにより行列の数列 Q_k を発生する(図6の直観的なスケッチを参照)。初期値 Q_0 は任意に選ぶことができることに注意する。

もし集合 \mathcal{S} が凸ならば、直交射影 $\mathcal{P}_{\mathcal{S}} Q_0$ は唯一に定まる。すなわち、式(3.9)で表される最適化問題は

唯一の最適解を持つ。実際、もし仮に集合 \mathcal{C} と \mathcal{D} の両方が凸であったならば、反復射影アルゴリズムの大域的収束が保証される。つまり、初期点 Q_0 に関わらず、集合 $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ が空でないときは必ず Q_{feas} に収束する。また、 $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ が空集合のときには平衡状態において \mathcal{C} と \mathcal{D} との最短距離を与える 2 つの点の間を往復し続けることになる。このように、凸性の仮定のもとでは、大域的収束が保証されるが、問題 1 では \mathcal{D} は凸集合ではないので局所的収束しか保証されない。

直交射影 $\mathcal{D} Q_k$ は LMI 問題を解くことにより求められる。また、直交射影 $\mathcal{D} \hat{Q}_{k+1}$ は唯一ではないが、そのうちの一つは \hat{Q}_{k+1} の $2n-r$ 個の小さい特異値を零で置き換えることにより得られる⁸⁾。

例 5 例 4 で扱った問題を考える。図 7 に反復射影アルゴリズムの振る舞いを示す。ここで $\lambda_1(XY)$ および $\lambda_2(XY)$ は行列 XY の最も小さい固有値と 2 番目に小さい固有値を表す。曲線はデータ $\hat{Q}_k \in \mathcal{C}$ を用い

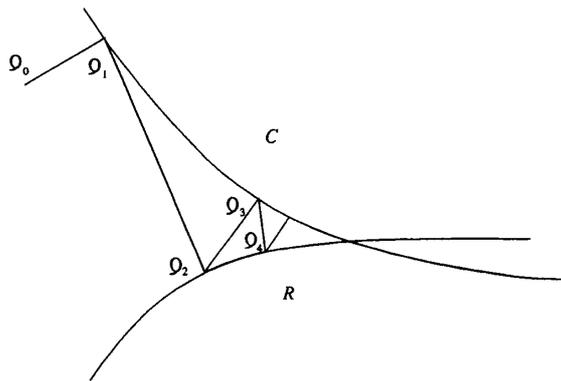


図 6 反復射影アルゴリズムの概念図

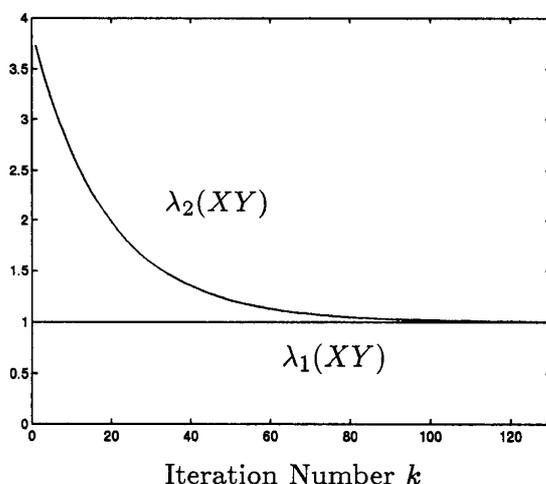


図 7 反復射影アルゴリズムの振る舞い

てプロットされている。最も小さい固有値 $\lambda_1(XY)$ は常に 1 であることに注意する。これは、直交射影 $\mathcal{D} Q_k$ が $Q_k \in \mathcal{C}$ のときは常に集合 \mathcal{C} の境界上にくることによる。この例題に対しては、反復射影アルゴリズムは線形化アルゴリズムよりも多くの反復回数を必要としたが、幾何学的な情報を活用することにより収束の速さを改善することも可能である¹⁷⁾。

130回の反復の後以下の値に収束した。

$$X = \begin{pmatrix} 2.8643 & 1.8096 & -0.7312 & -1.5714 \\ 1.8096 & 4.5226 & 0.8893 & -0.9077 \\ -0.7312 & 0.8893 & 1.8242 & -0.2438 \\ -1.5714 & -0.9077 & -0.2438 & 3.0529 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 3.0529 & -0.2438 & -0.9077 & -1.5714 \\ -0.2438 & 1.8242 & 0.8893 & -0.7312 \\ -0.9077 & 0.8893 & 4.5226 & 1.8096 \\ -1.5714 & -0.7312 & 1.8096 & 2.8643 \end{pmatrix}$$

$$\lambda(XY) = 0.9990, 1.0024, 13.7234, 25.6750$$

したがって、 $r=6$ の場合の問題 1 に対する解が得られたわけである。この $r=6$ は達成可能な最小ランクである。 ■

4. 大域的最適化アルゴリズム

前節では、局所最適解を与える 3 つのアルゴリズムを紹介した。しかし、当然のことであるが大域的な最適解を与えるアルゴリズムが望まれている。ここでは、その方向に沿った研究の 2 つを簡単に紹介しよう。

一つ目の方法は、問題 3 に関連するもので、LMI 制約条件のもとで 2 つの正定行列のスペクトル半径を最少化する問題：

$$\text{minimize } \rho(XY)$$

$$\text{sub. to } \Psi(X, Y, Z) > 0, X \in \mathcal{D}, Y \in \mathcal{D}$$

である。文献 20)、21) では \mathcal{D} が対角行列に限定される場合について、文献 19) では一般の場合について議論し、いずれの場合も最適値からの許容誤差 $\varepsilon > 0$ を指定したとき許容誤差範囲内の大域的な最適解を見付けるアルゴリズムを提案している。また、最悪ケースの計算量の解析を行うことにより、提案アルゴリズムが $1/\varepsilon$ に関して多項式オーダーの計算量で大域的収束を保証するアルゴリズムとなっていることを示している。

一方、Goh ら⁶⁾ は上記の問題をその特殊ケースとして含む BMI (Bilinear Matrix Inequality) 最適化と呼ばれる非凸最適化問題を定式化し、分枝限定法に基づく大域的最適化アルゴリズムを提案している。BMI

最適化問題の一つの一般形は

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \lambda \\ & \text{sub. to } \lambda I - F(x, y) > 0 \end{aligned}$$

で表される。ここで、 $F(x, y)$ は

$$F(x, y) := F_{00} + \sum_{i=1}^{n_x} x_i F_{i0} + \sum_{j=1}^{n_y} y_j F_{0j} + \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} x_i y_j F_{ij}$$

で定義される変数 x, y に関する双線形関数である。この方法は、問題のクラスが一般過ぎるため、最適解を得るまでの計算量を前もって見積もることはできないという欠点はあるものの、実用的な方法の一つとして幾つかの改良法が提案されている。詳しくは、解説記事 2) を参照されたい。

5. おわりに

本講座では、近年注目を浴びている半正定値計画法 (SDP) を紹介した。第 1 回目と第 3 回目とに示したように、制御系解析・設計問題を含む多くの工学の問題が SDP として定式化でき、第 2 回目の講座で紹介した内点法に基づく数値最適化アルゴリズムによって高速に解くことができる。しかし、今回制御系設計問題を例にとって示したように、少し一般的な問題を考えると、LMI で表現される凸制約条件に幾つかの非凸制約条件の加わった問題になることが多い。今回は、このような問題の特殊な問題に対する最適化アルゴリズムの幾つかを紹介したが、実用的な問題を含む適切な問題設定で、よい性質 (高速性、大域性など) を持つアルゴリズムの開発が望まれる。

参考文献

- 1) S. P. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan: *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics (1994)
- 2) 藤岡, 岩崎: BMI: 非凸行列不等式に基づく制御系設計への挑戦, 計測と制御, 36-11 (1997)
- 3) P. Gahinet and P. Apkarian: A linear matrix inequality approach to \mathcal{H}_∞ control, *Int. J. Robust Nonlin. Contr.*, 4: 421/448 (1994)
- 4) L. El Ghaoui and P. Gahinet: Rank minimization under LMI constraints: a framework for output feedback problems, *Proc. European Contr. Conf.*, 1176/1179 (1993)
- 5) L. El Ghaoui, F. Oustry, and M. AitRami: An LMI-based linearization algorithm for static output-feedback and related problems, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, 1997. (To appear).
- 6) K. C. Goh, M. G. Safonov and G. P. Papavassilopoulos: A Global Optimization Approach for the BMI Problem, in *Proc. of the 33rd Conf. Decision Control, 2009/2014* (1994)
- 7) K. M. Grigoriadis and R. E. Skelton: Alternating convex projection methods for covariance control design, *Proc. Allerton Conf.* (1992)
- 8) K. M. Grigoriadis and R. E. Skelton: Low order control design for LMI problems using alternating projection methods, *Proc. Allerton Conf.*, October 1993.
- 9) 原 辰次: 半正定値計画法 (SDP)—SDP による数値最適化—, シミュレーション, 15-4, 258/264 (1996)
- 10) 岩崎徹也, 原 辰次: 半正定値計画法 (SDP)—LMI に基づく制御系設計—, シミュレーション, 16-2, 122/129 (1997)
- 11) T. Iwasaki and R. E. Skelton: All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas, *Automatica*, 30-8, 1307/1317 (1994)
- 12) T. Iwasaki and R. E. Skelton: Parametrization of all stabilizing controllers via quadratic Lyapunov functions, *J. Optimiz. Theory Appl.*, 85: 291/307 (1995)
- 13) T. Iwasaki and R. E. Skelton: The XY-centering algorithm for the dual LMI problem: a new approach to fixed order control design, *Int. J. Contr.*, 62 (6): 1257/1272 (1995)
- 14) A. Packard and K. Zhou and P. Pandey and G. Becker: A Collection of robust control problems leading to LMIs, *Proc. IEEE Conf. Decision Contr.*, 1245/1250 (1991)
- 15) M. A. Rotea and T. Iwasaki: An alternative to the D - K iteration? *Proc. American Contr. Conf.*, 53/57 (1994)
- 16) 進藤 晋: 半正定値計画法 (SDP)—主双対内点法アルゴリズム—, シミュレーション, 16-1, 46/52 (1997)
- 17) R. E. Skelton, T. Iwasaki, and K. M. Grigoriadis: *A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design*, Taylor and Francis, 1997. (To appear).
- 18) B. Wie and D. S. Bernstein: A benchmark problem for robust control design, *Proc. American Contr. Conf.*, 961/962, May 1990.
- 19) Y. Yamada and S. Hara: Global Optimization of a Matrix Product Eigenvalue under LMI Constraints with Monotonicity Property, 第26回制御理論シンポジウム予稿集, 227/232 (1997)
- 20) Y. Yamada, S. Hara and H. Fujioka: ϵ -Feasibility for H_∞ Control Problem with Constant Diagonal Scaling, 計測自動制御学会論文集, 33-3, 155/162 (1997)
- 21) Y. Yamada, S. Hara and H. Fujioka: Global Optimization for Constantly Scaled H_∞ Control Problems, *Proc. American Contr. Conf.*, 427/430 (1995)
- 22) K. Zhou and J. Doyle and K. Glover: *Robust and optimal control*. Prentice Hall, New Jersey (1996)