

《小特集》

有限要素法の品質（実用的観点から）

萩原 一郎*

ABSTRACT Recently FEM is trying to be used as much as possible as the central technique of CAE in design and manufacturing processes. It has been already recognized among manufactures that shortening development period depends on whether we can use as much analyzing technique as possible or not. The theme related to quality of computation is getting into the big news. This is considered to be caused by the hope that computation comes to be the substitution for the experiment because of the progress of simulation mechanics and hardware. On the other hand, however, this can be considered as the reflection because lack of calculating computation keeps analysis from fixing. And thirdly, there are three categories for the quality of FEM; that of FEM of its own, that of calculating technique, and that of modeling for the phenomena. But it is still thought that there is lack of clear analysis because researchers don't build up a clear connection with one another. So here, I mainly explain the problems related to modeling, especially in practical viewpoint, and I also explain about the quality of FEM of its own, and that of calculating technique, because these three are closely related with each other.

1. はじめに

有限要素法（FEM）は今や、CAE（コンピュータ・エイディッド・エンジニアリング）の中核技術として、設計・製造工程に最大限利用されるよう関係者の間で努力されている。折りしも、著者は日本機械学会でこれに関連するテーマ名「解析技術を設計工程に最大限利用するための設計-解析融合に関する研究分科会」で、3年間の主査をやり終えたところである。開発期間の短縮は、FEMを始めとする解析技術をどれだけ有効に利用できるかで決まる。このことは製造各社においては既に認知されている所である。一方学会においても、日本応用数理学会に「計算の品質研究部会」が設けられるなど、FEMを始めとする計算の品質はようやく重要視されるようになりつつあるといえる。これは、1)シミュレーション技術やハードウェアの進歩により、実験の代替として計算が期待されるようになったこと、2)一方で、後述するように、計算精度の不十分さが解析の定着率を阻んでいることからの反省、3) FEMの品質には、FEM固有のもの、計算技術にも関わるもの、現象に対するモデル化にも関係

するもの、と3種類に分類できるが、それぞれの研究者間の連携不足からの明確な分析の欠如、などが考えられる。そこで本報では、著者に与えられた「実用的な観点」という意味で、モデル化にも関係するものを中心とするが、FEM固有のもの、計算技術にも関わるものについても触れておきたい。これら3者は当然密接な関係を持つからである。そして取り上げるテーマとしては、静的解析、過渡応答解析、周波数応答解析とFEMが最も多く使用されるものとする。

2. 有限要素法の実用的品質

厳しい国際競争に打ち勝つ方策として、製造業では開発期間の短縮やコストの低減が図られている。自動車を例とすると、図1の開発のデジタル化が進められている。すなわち同図に示されるように、解析シミュレーションは実験にとって変わるものとして期待されている。自動車を市場に出すには多くの性能開発を必要とし、約400の実験項目がFEMを始めとするシミュレーションによって代替されることが期待されている²⁾。しかし、その定着率はいまなお期待レベルには達していない³⁾。その原因として次のことが考えられる。

- 1) ノッキング、ガソリン噴射、乱流燃焼、風きり音、ランプ内のくもり、などではそれらの現象がはっきり分からないため解析手法がない。

Quality of Finite Element Method in Practical Viewpoint. By Ichiro Hagiwara (Dept. of Mechanical Engineering and Science, Tokyo Institute of Technology).

*東京工業大学機械科学科

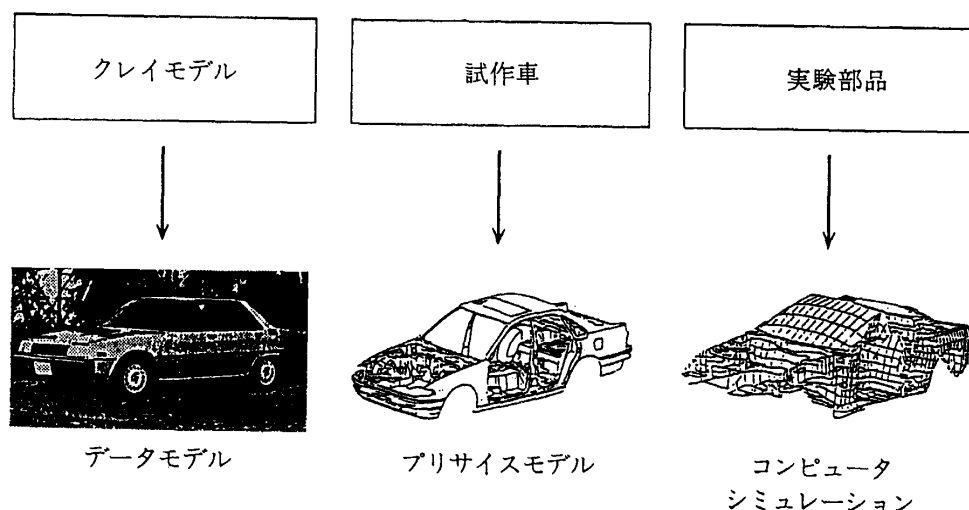


図1 自動車開発のデジタル化

- 2) 車体の静的圧潰，成形後に発生する反り変形，タイヤ内の圧力などを正確に解析できる適切なソフトウェアがない。
- 3) モデルの作成工数が足りない。
- 4) 厳密な解析だと膨大な計算時間となる。
- 5) 樹脂部品の歪速度依存性，材料の流動物性など十分なデータがそろっていない。
- 6) 居住性，操作性，乗降性，合わせ品質，高品質感，しっかり感など，評価基準が曖昧で解析技術の導入が難しい。
- 7) 製造にバラツキがあり，正しい解析結果が得られない。

これらのうち，1)，2)については計測技術の進歩やモデル化技術を含めた新しい解析技術の開発でその項目は確実に減りつつある。3)に対しては自動メッシュ，h法やp法などのアダプティブFEM技術やメッシュレスFEMの検討がなされている。4)に対しては領域分割法や部分構造合成法などの並列処理法の技術開発やハードウェアの更なる向上への期待がある。一方では簡略化モデルや簡略化手法などの現実的な解決策がある。5)については材料特性に関するデータベースの構築が進められている。6)に対しては人間工学から計算力学への転換検討がなされている¹⁾。7)については，製造にさかのぼっての解析が進められている。

以上の如く考えられるが，特に，項目1)や項目4)に対して現実的な解決策を図ることから多くの実用的な解析技術が誕生している。このような解析技術やモデル化技術に関わるFEMの品質を第3章と第4章で述べる。その前に本稿と対比するために，英国のNAF-

EMS (National Agency for Finite Element Methods and Standard, National Engineering Laboratory, UK) で作成されているベンチマーク問題の概要を紹介する。これは，現在あるいは将来に使用される解析プログラムの品質評価の他，技術者の教育などにも利用されることを意図したもので，その主な内容は次の通りである⁴⁾。

- 1) 線形静的問題
膜，板曲げ，軸対称，3次元シェル要素に関し，1次，2次，3次要素との比較やメッシュ細分による収束性の検討。
- 2) 線形熱応力問題
1次と高次要素の比較やメッシュ細分による収束性の検討。
- 3) 線形静的シェル問題
円筒形シェルや球面シェルの形状に対し，一定ひずみと剛体モードの表現をチェックするパッチテストを設定。
- 4) 線形動的問題
単純支持梁，薄肉および厚肉の正方形板のそれぞれに対し固有値解析，周波数応答解析，過渡応答解析のための各種ベンチマーク問題が設定。
- 5) 幾何学的非線形問題
理論解，平面応力，梁，軸対称ソリッド要素を用いた有限要素解の比較。有限要素解は，汎用構造解析プログラムLUSASにより得られている。
- 6) 弾塑性問題
完全塑性，等方，移動硬化の3つの構成モデルをテスト。

7) 線形弾性破壊力学

各種の数値計算法による応力拡大係数の結果比較.

8) 熱伝導問題

断熱, 熱流入, 熱伝達, 輻射等の境界条件に対し計14題の問題が設定.

9) アダプティブ p 法

p 法の収束性.

以上, 概観すると, NAFEMS のベンチマークテストは, 実際の製造現場で直面する複雑な現象への対応を直接意図したものではなく FEM 固有のものに終始されているものと考えられる.

3. 強度剛性問題に関わる FEM の品質

本章では平板の曲げ要素そのものの品質について, 関数解析的なアプローチからの最近の成果について述べる. 次に静的な非線形解析の困難な状況を述べ, ある意味では解析法の違反ともいえるマススケール法固有の品質について議論する. そして, 大規模なモデルでの解析が現実のものとなっている動的な非線形解析を例に, 現実的な対応とそのモデル化に起因する品質について述べる.

3.1 線形の剛性問題の品質

FEM が誕生して以来, FEM 本来の解析理論からの逸脱がかえって良い結果をもたらすという例がいくつか散見される. まず非適合要素である. FEM では解析領域を図2に示すように有限個の要素に分割し, 各要素内の変位は各節点の変位で形状関数と称される関数で内挿して求められる. この形状関数には本来, 隣り合う要素間で, 面内の引っぱりや圧縮では変位の連続性 (C^0 級の連続性) が, 曲げでは変位の他に変位の x, y それぞれの1階微分の連続性 (C^1 級の連続性) が要求される. これらを満たすものは適合要素, 満たさないものは非適合要素と称される. 形状関数としては低次の多項式がしばしば使用される. 例えば, 四角形の曲げ要素の場合, 図2に示すように, 形状関数は同図の $\{w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}\}$, $i=1-4$ の計12のパラメータを内挿するものとして求められる. 完全3次式は10項からなるため4次項から2項だけ持って来られる. この任意性などにより, これまでも多くの曲げ要素が提案されている. 適合要素の場合, 要素を細かく分割して行くと確実に収束し, 関数解析の援用により, 辺の中間に節点を設けない4節点の四角形の曲げ要素の場合, 分割の細かさに比例して正確値に収束していくという結果が得られている. この場合, 収束のオーダーは, $O(h)$ と記される. 非適合要素の場合は本来の理論か

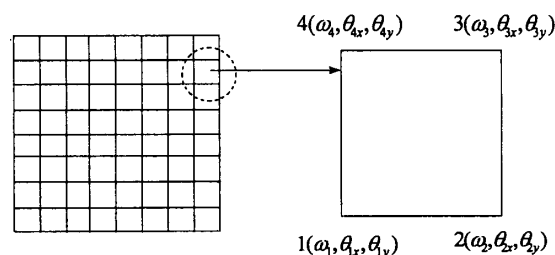


図2 平板曲げ要素の一例

ら逸脱するため, 分割を細かくしても収束しないものがある. 収束の十分条件を見るものに Irons のパッチテスト⁵⁾がある. そして特に曲げ要素の場合, 非適合要素の方が適合要素よりも収束性が良いという結果も得られている. たとえば, MSC/NASTRAN の非適合の四角形 QUAD4 要素はこれまでで最も効率の良い要素の一つとの定評があるが, これも基本的に収束のオーダーは, $O(h)$ と考えられる. これまで非適合要素というと, 代表的な Adini の要素⁶⁾のように, 隣り合う要素間で変位は連続だが, 1階微分は不連続の場合が普通である. ところが逆に, 1階微分は連続で変位は不連続のダブルセットパラメータ要素が誕生し, Irons のパッチテストの神話が崩れ, Shi Zhogci の F-E-M-Test⁷⁾のチェックが用いられたりする. そして, 石東洋らによって開発された, ダブルセットパラメータをベースとする四角形の4節点要素としては初めて収束のオーダーは $O(h^2)$ となった⁸⁾. 石東洋らの要素と QUAD4 要素との収束性の比較を表1に示す. このように, FEM の品質を論じる時, まず使用される要素の収束性を確認しておくことが重要である.

3.2 静的非線形問題における要素の特性並びにモデル化に起因する品質

線形領域で妥当な結果が得られても, 塑性域で剛性が高過ぎるというロッキング現象も厄介な問題であった. これはいわゆる次数低減積分シェル要素の開発で一応の決着がつけられている. すなわち, ガウスの積分理論で定められる指標より少ない積分数で剛性マトリクスが求められた. 例えば, 衝突解析では専ら Belytschko-Tsai の要素⁹⁾が用いられているが, 降伏後の剛性が剛くなり過ぎるのを避けるためしばしば低次の1点積分で剛性及び質量マトリクスが求められている. その代償として歪エネルギーと関係しないアワーグラスモードが時として生じる. アワーグラスモードの抑制法や次数低減積分シェル要素の妥当性を裏付ける理論研究もなされている. 一方, 静的非線形解析

表1 石東洋要素と QUAD4 要素の精度比較

要素		2×2	4×4	8×8
石東洋要素	a	0.25	0.00	0.00
	b	2.33	0.69	0.09
	c	1.58	0.16	0.00
	d	3.46	1.35	0.37
QUAD4要素	a	3.09	1.75	1.06
	b	8.94	3.78	1.91
	c	8.48	5.68	2.11
	d	1.28	4.77	2.62

数値は誤差を示す。

$$\text{誤差} = \frac{|\text{理論値} - \text{FEM値}|}{\text{理論値}} \times 100$$

a: 単純支持、分布荷重

b: 単純支持、集中荷重

c: 周辺固定、分布荷重

d: 周辺固定、集中荷重

は、座屈点近傍で剛性行列式が零に近くなり剛性方程式の解が不安定となる静解析固有の問題の他、動的の場合よりもアワグラスモードが出やすいという問題などがあり実用化されていないといえる。そのため、動的解析手法で準静的問題を解くという試みがなされている。著者らも同様の経験をしており、その経緯を以下に紹介する。

まず、図2のような正方形板の中央に集中荷重が加わる問題に対し、

Hughes-Liu のシェル (タイプ1)、PSDV のシェル (タイプ2)、Belytchko-Tsay のシェル (タイプ3)、Yase のシェル (タイプ4)、 C^0 三角形シェル (タイプ5) の5種類の要素でその特性を検討した。これらはいずれも非適合曲げ要素で積分点数を低減して用いている。次のような結果が得られた。

1) タイプ1～タイプ4の要素は、微小変形領域では理論値との差が3%以内の妥当な値が得られる。ただし、弾塑性領域では、要素により25%程度、値がばらつく。

2) 要素を構成する4節点のうち2節点を重ねて三角形要素として使用した場合、異常な塑性の挙動を示す。したがって、三角形の領域は三角形要素として定式化された要素を用いる必要がある。

3) タイプ5の C^0 三角形シェル要素は微小変形領域、弾塑性領域ともに、他の要素に比べ30%程度剛い。

さらに図3に示す、1/4ルーフ圧潰モデル (実機モデルと称す) での検討により次の結果が得られた。ここでルーフ圧潰特性は、車が転がるという事故が生じた場合の車体上屋の強度を再現性のある準静的実験で行うものである。

4) 実機モデルの場合、弾性領域でも、いずれの要素も NASTRAN の QUAD4 要素より剛い。この点に

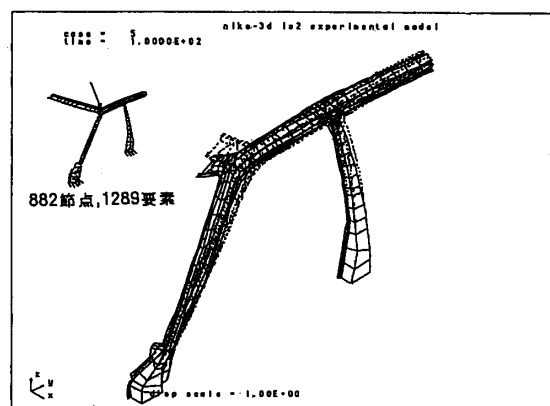


図3 1/4ルーフ圧潰モデルと Hughes-Liu による解析結果 (80 mm 押し込み時変形図)

においても QUAD4 要素の優秀性が理解できる。

5) 四角形要素を三角形要素として使用することを避け、三角形の領域にはタイプ5の C^0 三角形シェル要素を用いて解析を行った。図4からタイプ1の Hughes-Liu のシェルが、最も実験に近い荷重-変位特性を示している。

6) 弾塑性領域で図4に示すように、要素により解がばらつくが塑性の挙動は安定している。図5に示す薄肉のハット型あるいは矩形断面真直部材の準静的軸圧潰特性は、一つの壁面である長方形平板の圧潰特性で近似できる。その解析から次の結果が得られている。

7) 要素の法線方向をそろえないと収束性が悪化する。発散する直前では、(1)残差荷重が非常に大きい、(2)増分幅を減少させても残差荷重が変化しない、(3)剛性マトリクスに負の対角項が生じる、といった状況となる。

8) これらの原因の一つとして、座屈等の不安定モードの発生が考えられる。

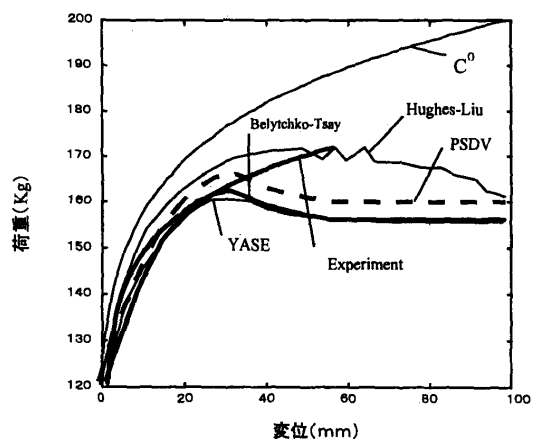


図4 ループ圧潰解析各要素の荷重-変位特性

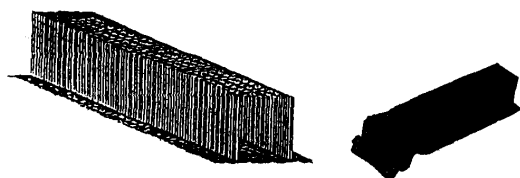


図5 ハット型断面真直部材のFEMモデルと圧潰モード

しかし、微小な変位増分 (0.00001 mm/step) でも発散することから、壁面座屈等の物理的な座屈とは考えにくい。

9) 本モデルの力学的条件ではありえない、図6に示す板幅方向の断面がわずかに波打つアワーグラスモードが見られた。

これを詳細に検討したところ、X軸回りの回転変位により生じていることがわかった。

10) そこで、このモードを防ぐために、X軸回りの回転を拘束し解析を行ったところ、要素ひずみ等の異常を示すアワーグラスモードの発生は見られなくなった。そして表2に示すように収束性が向上し、計算時間が短縮した。なお、解析に使用した要素はHughes-Liuのシェル要素でシェル要素面内の積分点数は1点、板厚方向の積分点数は5点としている。

11) ただし、2×4分割と4×8分割とを比較すると、後者の方がずっと安定である。従って、安定な解を得るには相応の細かな分割幅を要し、大規模問題となると計算時間は膨大となり実用的な解析は困難である。

以上のように、静的非線形問題は今の所、FEMの様々な歪が生じ実用的な解析は容易でない。そこで次

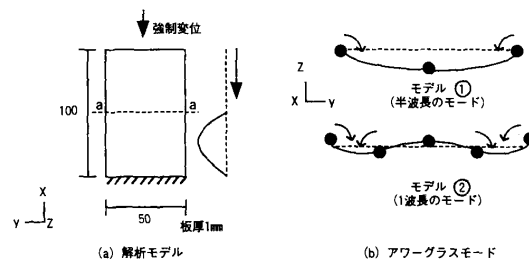


図6 板幅方向に現われるアワーグラスモード

表2 収束計算回数及び計算時間

	変位 mm	総収束計算回数	計算時間 sec	X回転拘束なし
モデル① (2×4分割)	19.41	5299	301	X回転拘束あり
	40.0	2782	177	
モデル② (4×8分割)	40.0	3487	724	
	40.0	2307	494	

節でその対比という意味で動的解析手法について述べ、本章の最後の3.4節で動的解析手法を用いて準静的問題を解くという試みについて述べる。

3.3 動的非線形問題におけるモデル簡略化に起因する品質

動的非線形問題の代表的な例として、車両の対壁前面衝突解析事例について述べる。前面衝突時、車体の変形が車室内に及ぶと、無拘束の乗員は傷害を受ける危険な要因となる。これを防ぐために車体前部の変形により衝突エネルギーを吸収しなければならない。車両前部を構成する強度部材の中でも図7に示すサイドメンバーのエネルギー吸収に対する寄与は大きい。サイドメンバーは薄肉の箱型または図5の如きハット型断面部材で、サスペンション等の位置関係から客室の下所で曲がった形状となるが、前部は荷重を上げるため極力、真直さが保たれる。そしてこの真直部が折れないよう前端から順にアコーディオン状に圧潰させることがサイドメンバーのエネルギー吸収効率を上げるために有効である。最近のスーパーコンピュータの利用や数値解法の改良により、図8に示すようなシェルによる大規模な衝突解析が可能となっている。同図の良好な圧潰モードを得るためには、まずサイドメンバーをアコーディオン状に圧潰させる必要があるが、そのために図7に示す切り欠きやビードなどが設けられる。しかし、このような細かな検討は、定評ある市販の衝突解析コードをそのまま用いても困難である。これには次のような塑性座屈モードを初期たわみとして与えて初めて実験結果の再現が可能となる¹⁰⁾。真直

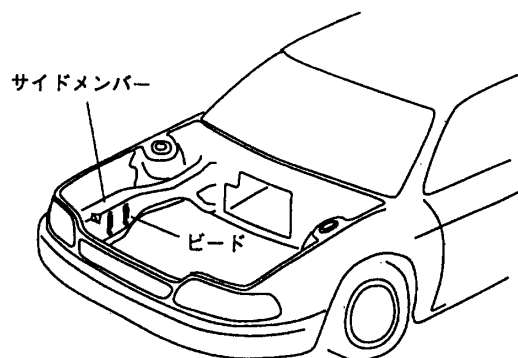


図7 サイドメンバーに設けられるビード

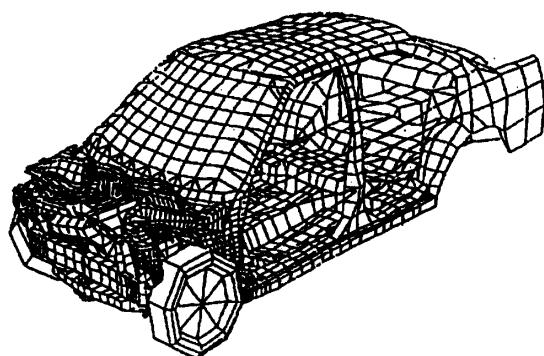


図8 フルスケールカー変形モード解析結果

材の圧潰問題は図6に示すような平板の圧潰問題に近似できることは既に述べているが、平板を圧潰すると、しばらくは軸方向のみの変形であるが、突如軸方向の他に曲げが加わる変形の場になる。これが座屈でこの時の座屈応力が降伏応力より大きい時、塑性座屈、小さい時、弾性座屈と称される。塑性座屈が弾性座屈かで座屈の波長長さが異なる。どちらが生じるかは部材寸法、材質によって決まるが市販車の場合、塑性座屈が使用される。真直部材の圧潰解析を行なう際には、何等かの初期不整が必要とされているが、もともとビードなどの不整がある、しかも真直でないサイドメンバーの圧潰解析に初期不整を与えるという例は見られない。切り欠き部まで詳細にモデル化する場合に初期不整は不要と考えられるが、それでは解析時間は膨大なものとなる。そこで著者らは、初期たわみを入れることにより計算時間を短縮した上で初期の結果が得られるか否かを検討した。初期不整としては従来は正弦波モード、乱数モード、弾性1次座屈モードが使用されていた。まず圧潰荷重で見ると、この中では

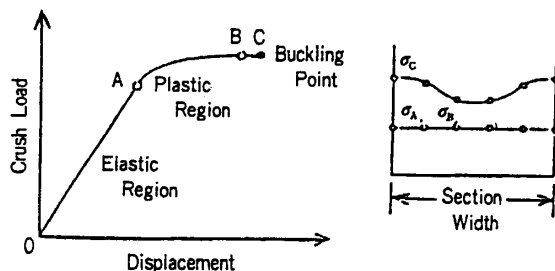


図9 壁面座屈に伴う荷重変化と応力分布

弾性1次座屈モードを初期たわみとして与える場合のみ実験値に近いが、圧潰モードについては、先述の通り塑性1次座屈モードを使用して初めて実験との対応が得られる。塑性座屈モードを与える場合、荷重-変位線図上のどこで座屈モードを求めるべきか議論の余地がある。たとえば、図9のような荷重-変位線図が得られる。座屈点すなわち、同図のC点を境に荷重が格段に下がる。また代表断面の応力状態を同図に示す。同図で、 σ_A , σ_B , σ_C とあるのは、荷重-変位線図上のA点、B点、C点での代表断面の応力状態を示す。これらにより座屈以後それまで一様な応力状態であったものが断面中央の応力は下がり角部の応力が高くなることがわかる。C点あるいはC点を初めて通り過ぎた点のステップ数を $(n+1)$ とし、 $(n-1)$ ステップ及び n ステップでの剛性マトリクスを $[K_{n-1}]$, $[K_n]$ とすると非線形座屈方程式は式(1)で得られる。

$$([K_n] + \lambda[\Delta K])\{\phi\} = 0 \quad (1)$$

ここに、 $[\Delta K] = [K_n] - [K_{n-1}]$ で、座屈点の変位は $\{U_{cr}\} = \{U_n\} + \lambda\{\Delta U\}$ と表わされる。 $\{\Delta U\}$ は式(1)の固有ベクトルである。

仮想仕事の原理により、

$$\{\Delta U\}^T \{P_\sigma\} = \{\Delta U\}^T \{F_\sigma\} \quad (2)$$

である。ここに、

$$\begin{aligned} \{F_\sigma\} &= \{F_n\} + \int_{U_n}^{U_{cr}} [K] du \\ &= \{F_n\} + \int_0^\lambda [K(\lambda)] du \\ &= \{F_n\} + \lambda \left\{ [K_n] + \frac{1}{2} \lambda [\Delta K] \right\} \{\Delta U\} \end{aligned} \quad (3)$$

そして、座屈荷重は式(4)で表される。

$$\{P_\sigma\} = \{P_n\} + \alpha\{\Delta P\} \quad (4)$$

ここに、 $\{\Delta P\} = \{P_n\} - \{P_{n-1}\}$,

$$\alpha = \left(\lambda\{\Delta U\}^T \left\{ [K_n] + \frac{1}{2} \lambda [\Delta K] \right\} \{\Delta U\} \right)$$

$$/(\{\Delta U\}^T\{\Delta P\})$$

この解析法により、サイドメンバーに配置されるべきビードの最適形状や最適な設置箇所が明確になった。この解析手法は勿論もともと初期たわみを必要とする真直材の解析に有効である。例えば、図10に示すように、断面形状と板厚によって圧潰モードが三種類あるという、昔からの実験事実の再現も可能となった。同図で λ は座屈の半波長の長さ、 $d=(a+b)/2$ で、 a, b は長方形断面の短辺及び長辺の長さである。同図で、板厚の厚い(1)では、向かい合う壁面同士が干渉することなく安定したアコーディオン状のモードを呈する(安定アコーディオン状モード)。 $\lambda=d$ となる(2)では向かい合う壁面同士かなり接近する。従って、板厚が薄く角部の強度が低い場合には折れを伴って圧潰する場合がある(不安定アコーディオン状モード)。また、矩形断面部材の壁面が弾性座屈を起こす(3)では部材の向かい合う壁面同士が接触するために、折れを伴って圧潰する(不規則折れモード)。(1)、(3)では板厚と周辺長さが同じなため、変形の途中までは同

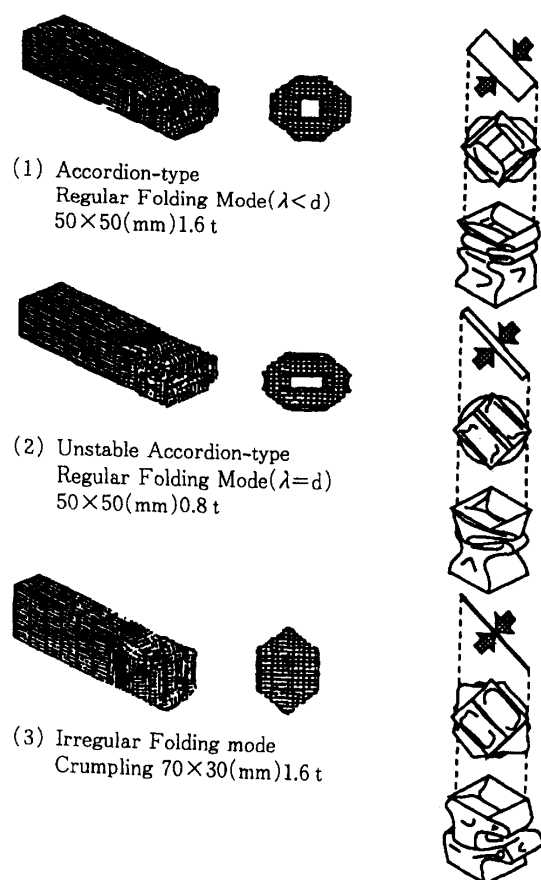


図10 幾何学的形状と圧潰モード

様の強度特性を示すが、(3)では向かい合う壁面同士が接触したあと荷重値は(1)に比し低くなってゆく。これらは、Mahmoodらの実験結果を解析によって初めて再現したものである。このように初期たわみの与え方により解析品質が異なる。そして、本来は初期たわみを入れることは理に適っていないと思える問題においても、いわば強引に初期たわみを入れることにより極めて少ない要素分割で所期の結果が得られることがある。

3.4 動的解析手法で準静的問題を解く解析技術の品質

この種の解析法として、動的緩和法、システムダンピング法、マススケーリング法の3手法がこれまでに開発されている。前2者は大きなダンピングを与えるものであり、更に動的緩和法は与えられた負荷荷重に対して逐一釣り合う変位を求めるものである。そしてマススケーリング法は密度を本来のものより大きくして計算時間を短くするものである。津田らはこれら3つの手法を非線形静的問題の代表的な問題に適用して比較を行い、次のような結果を得ている¹¹⁾。

- 1) 平板の面外引張など、各荷重に対して変位が一意的に定まる問題に対しては、動的緩和法が最も適切である。
- 2) アーチの飛び移り座屈問題など、各荷重に対して変位が複数存在し、かつ座屈が1回だけ生じる問題ではシステムダンピング法が最も適切である。
- 3) 部材の軸方向圧潰問題のように座屈が幾つも生じる問題では、マススケーリング法のみ適用可能である。
- 4) システムダンピング法では、固有値に比例した減衰係数が使用されるが、従来の第1固有値を使用するのでは精度が悪く、最初に生じる座屈モードに近い固有モードの固有値を使用して初めて精度の良い解析ができる。

このような成果が得られているが、システムダンピング法やマススケーリング法で初期速度としてどの程度のものを与えるべきか、またマススケーリング法の場合、初期速度の他にマススケールすなわち密度を何倍にすべきかの一般則は今なお得られていない。これらは品質への影響が大きいことをマススケーリング法を例に述べる。準静的問題を動的陽解法によりマススケーリング法で解析すると、その安定条件から、時間増分幅 Δt は鋼材の場合を例にすると $1\mu\text{sec}$ 程度と非常に小さい。従って、動的現象に比し現象時間のはるかに長い準静的問題の現象を解くには相当の解析ステ

ップ数を要す。現実的な解決策として Δt を大きくしたり初期速度を大きくしたりすることがとられる。この場合、初期速度を大きくするより Δt を大きくする措置が計算時間の短縮には有効である。安定条件を守ってかつ Δt を大きくするには、密度を上げるか弾性率を小さくすることによって得られる。弾性率を小さくすると剛性マトリクスに影響する。密度の変化は質量マトリクスに影響を与える。結果への影響は質量マトリクスの方がずっと小さい。そのため、マススケーリング法では密度のみ増加させる。ここで、初期速度としては、運動エネルギーが歪エネルギーの1/10以下になる程度に大きな値を与えることとする。本手法の品質への影響を、板厚1.6 mm、一辺が50 mmの薄肉正方形断面で、長さ250 mmの真直材の静圧潰解析を例に検討する。材料は鋼材とする。FEMモデルの節点数は2040、要素数は2000、5 mm角の一樣分割で、使用要素はBelyschko-Tsayの四角形要素である。この場合、塑性座屈が生じ、座屈応力は式(5)で与えられる¹²⁾。

$$\sigma_{cr} = K\pi^2 E (t/b)^2 / 9 \quad (5)$$

ここで、 E はヤング率、 t は板厚、 b は断面の一辺の長さ、 λ は半波長の座屈ピッチである。そして、

$$K = (1/4 + 3Et/4E)(b/\lambda)^2 + 2 + (\lambda/b) \quad (6)$$

Et は降伏後の応力・歪み線の傾きである。座屈ピッチは部材長さを d とすると、断面のアスペクト比(d/b)の関数 Q を用いて式(7)のように表わされる。

$$\lambda = b \{ (1/4 + 3Et/4E) / Q \}^{0.25} \quad (7)$$

また、塑性座屈を起こす真直部材の最大荷重は式(8)で表わされる。ここで、 A は部材の断面積である。

$$(P_{max})_p = A\sigma_y \quad (\sigma_{cr} \geq \sigma_y) \quad (8)$$

平均圧潰荷重は

$$P_{ave} = 0.348(P_{max}) \quad (9)$$

で表わされる。

表3に、初期速度を現行の1000倍に固定し、密度の倍率の違いによる、計算時間、平均圧潰荷重、座屈波長長さの相違を示す¹³⁾。現行の数値をいずれも1としている。密度の倍率が80倍になると、それまで上記の理論値と対応していたのが合わなくなる。そして図11に示すように荷重-時間特性も本来のアコーディオン型のものからずれている。すなわち、マススケール法では座屈半波長と平均圧潰荷重を理論値などと比較することにより、どの位の倍率まで許容されるかの検討をしてから使用されるべきであるが、このような警鐘は見られない。また、理論値の存在しない一般の構造物にマススケール法を安心して適用するためには、許

表3 解析条件(マススケールの大きさ)の違いによる解析結果の相違

	密度(マススケール)	計算時間	座屈半波長	平均圧潰荷重
ケース 1	1	1	40	1
ケース 2	20	0.22	40	1
ケース 3	50	0.4	40	1
ケース 4	80	0.11	35	0.7

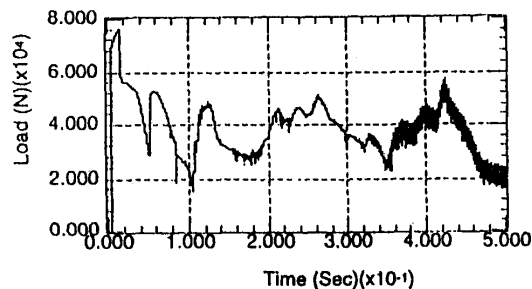


図11 マススケールが80のときの荷重-時間特性

容されるマススケールを汎用的に求める研究も今後必要となる。なお、板厚が0.4 mmであれば上述と同一の真直材に対しても同様の検討が行われている¹⁴⁾。この板厚では弾性座屈が生じ、許容されるマススケールは塑性座屈の場合よりも低いという結果が得られている。いずれにしてもこの分野の今後の一層の検討が期待される。

4. 構造-音場連成解析

本章ではエネルギーの大きさを尺度とする伝統的なFEMの品質、モード重合法という固有技術に対する簡便な品質評価法、そして現象のモデル化に起因する品質について、構造-音場連成系の解析事例を元に述べる。

4.1 解析理論

建築構造物や車両などの室内空間に発生する騒音は室内を囲む壁面が振動して騒音が発生するが、騒音もまた壁面振動に影響を与える連成の現象である。この構造振動-音場連成解析手法については既に色々な所で述べられているので、ここで議論ができる程度に簡単に記す。

本稿では簡単のために減衰項を省略すると、扱うFEM方程式は、以下になる¹⁵⁾。

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{f\} \quad (10)$$

ここで、 $[M]$ 、 $[K]$ はそれぞれ系の質量行列、剛

性行列を表わし,

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{ss} & 0 \\ M_{as} & M_{aa} \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} K_{ss} & K_{sa} \\ 0 & K_{aa} \end{bmatrix}$$

$$\{u\}^T = \{u_s^T, u_a^T\} \quad \{f\}^T = \{f_s^T, f_a^T\}$$

である. s は構造系, a は音場系を示す添字で, $\cdot$ は時間による2回微分を表す. $\{u_s\}$ は構造の変位ベクトル, $\{u_a\}$ は音圧ベクトル, $\{f_s\}$ は構造に作用する加振力, $\{f_a\}$ は音場における音源の音圧, $[M_{ss}]$, $[K_{ss}]$ はそれぞれ構造の質量行列と剛性行列, $[M_{aa}]$, $[K_{aa}]$ はそれぞれ音場の質量行列と剛性行列, $[M_{sa}]$, $[K_{sa}]$ は連成マトリクスで $[M_{sa}] = -[K_{sa}]$ である.

文献(15)で, 左固有ベクトル $\{\phi_i\}$ と右固有ベクトル $\{\bar{\phi}_i\}$ の間に式(11)の関係が得られている.

$$\{\bar{\phi}_i^T\} = \left\{ \phi_{is}^T, \frac{1}{\lambda_i} \phi_{ia}^T \right\} \quad (\text{for } \lambda_i \neq 0) \quad (11)$$

ここで, λ_i は連成系の固有値であり, $\{\phi_{is}\}$ は構造系の固有ベクトル, $\{\phi_{ia}\}$ は音場系の固有ベクトルを表す. 式(11)の関係式を用いて連成系の直交条件式と正規化条件式が右固有ベクトルだけで表現され, 連成系のモード重合法が導かれている. 最も汎用的な馬一萩原のモード重合法¹⁶⁾によると, 周波数応答値は

$$U = (K + j\omega_c C - \omega_c^2 M)^{-1} F + \sum_{i=m}^n \phi_i Q_i^d \quad (12)$$

で得られる. ここに,

$$Q_i^d = Q_i - \frac{\bar{\phi}_i^T F}{\omega_i^2 + 2j\xi_i \omega_i \omega_c - \omega_c^2} = z_i Q_i \quad (13)$$

である. ただし,

$$Q_i = \frac{\bar{\phi}_i^T F}{\omega_i^2 + 2j\xi_i \omega_i \Omega - \Omega^2} \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (14)$$

$$z_i = \frac{\Omega^2 - \omega_i^2 - 2j\xi_i \omega_i (\Omega - \omega_i)}{\omega_i^2 + 2j\xi_i \omega_i \omega_c - \omega_c^2} \quad (15)$$

である. そして, 式(12)が成立する条件は

$$|z_i| < 1 \quad (16)$$

である. 次節で示すように, 式(16)から適切な ω_c が得られ, これにより式(12)で非常に少ないモード数で精度の良い周波数応答解析が可能となる.

そして, Dengli らは連成系では初めて, 関数解析的なアプローチにより, エネルギーノルムで次の誤差評価式を得ている¹⁷⁾.

$$|\lambda - \lambda_h| \leq C_h h^2 \quad (17)$$

ここに, λ , λ_h はそれぞれ固有周波数の正解値及び FEM によって得られる近似値である. また, C_h は λ に依存する定数で, h は FEM のメッシュサイズである. また, 石東洋らは C_h として具体的に式(18)で得ている¹⁸⁾.

$$C_h = 1 + \frac{h}{\lambda} + \left(\frac{h}{\lambda} \right)^2 \quad (18)$$

すなわち, 波長が短くなる程, 分割幅を小さくする必要のあることがこのような誤差解析から得られる.

4.2 モード重合法の品質

図12に示すように, 式(12)で $m=1$ と $n=N$ とすれば, 馬一萩原のモード重合法はモード変位法と等しくなる. $m=1$ および $\omega_c=0$ とすれば, モード加速度法と等しくなり, そして Hansteen らの方法と等価になる.

ここでモード重合法固有の簡便な品質評価法について述べる. 式(12)により, i 次のモードを無視することによって生じる計算誤差は

$$e_i = |z_i| e_i^d \quad (19)$$

である. 式(19)から収束条件式(16)が満たされれば, 馬一萩原のモード重合法による誤差 e_i はモード変位法の誤差 e_i^d より小さくなる.

収束条件式(16)で, まず, 減衰係数 $\xi_i=0$ の場合を考える. この場合には, 式(16)は

$$\left| \frac{\Omega^2 - \omega_i^2}{\omega_i^2 - \omega_c^2} \right| < 1 \text{ or } \left| \left\{ 1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_i} \right)^2 \right\} / \left\{ 1 - \left(\frac{\omega_i}{\omega_c} \right)^2 \right\} \right| < 1 \quad (20)$$

となり, 式(20)を図示することによって馬一萩原のモード重合法の収束領域および収束しない領域が得られる. そして, モード加速度法との精度の比較も同じ図から得られる. より詳細は文献(14)を参照されたい.

減衰係数 ξ_i が零でない場合には, 式(16)により, 収束条件として

$$\omega_i^4 - 2(\omega_i^2 - 4\xi_i^2 \omega_i \Omega + 2\xi_i^2 \Omega^2) \omega_i^2 + 2\omega_i^2 \Omega^2 - \Omega^4 > 0 \quad (21)$$

が得られ, この場合も同様にモード加速度法との精度

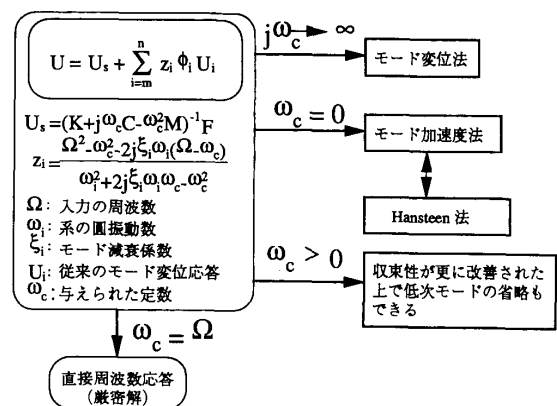


図12 馬一萩原のモード重合法と従来のモード重合法との関係

の比較も得られる。

以上の誤差解析で得られる検討結果の確認を、図13のモデルで行なう。図13は、長さ200 cm、横160 cm、高さ150 cmの鋼板からなる中空直方体の構造—音場連成系モデルである。構造のヤング率は 2.1×10^5 Pa、密度は 0.8×10^{-6} kg/cm³、ポアソン比は0.3とする。また鋼板の板厚を0.4 cmとする。構造と音場のFEMモデルについては、箱モデルの節点数と板殻要素¹⁹⁾数はそれぞれ98と96、音場の節点数とソリッド要素¹⁹⁾数はそれぞれ125と64である。まず、構造と音場の物理座標をそれぞれモード座標系に変換して、連成系の解析を行う。構造系に53個のモード座標、音場系に17個のモード座標、全体に70個の一般座標を用いる。次に、この70個の一般座標を持つモデルを対象に検討を行う。Y方向に与える加振点を箱の40番目の節点とし、観測点を音場の節点32とし、減衰の影響を無視する。図14には1~8次モード(0 Hz~22 Hz)を用いたとき、低周波数領域(10 Hz~20 Hz)におけるモード周波数応答解析結果の比較を示す。ここに、 $\omega_c = 15$ Hzである。同図に示すように、実線は厳密解($n=70$)、点線はモード変位解、破線はモード加速度解、一点鎖線は馬一萩原のモード重合法の解である。馬一萩原のモード重合法を用いる場合の精度が最も良いことが分かる。

図15には30~36次モード(78 Hz~106 Hz)を用いたとき、高周波数領域(70 Hz~90 Hz)におけるモード周波数応答解析結果の比較を示す。ここに、 $\omega_c = 80$ Hzである。同図に示すように、低次のモードが無視された場合では、モード加速度解の精度は著しく

低下することがある。これに対して、馬一萩原のモード重合法による結果はモード変位法より精度がよいことが分かる。このように解析技術固有の簡便法で誤差評価が得られる。そしてモードの重ね合わせで応答を求める本手法では、品質に必要なモード数が手法によって異なる点も留意すべきである。

4.3 モデル化に起因する品質

図16に示すような、1 m×1 m×1 mの鋼板の弾性壁で囲まれた立方体箱の側壁に、振幅1 Nの加振力で箱を加振し、連成解析を行い箱内部の観測点で音場の応答を求める。材料定数は図13のものと同一である。

六面体要素で分割されたFEMのモデルを図17(a)に示す。24要素のものをFEM1-1、192要素のものをFEM1-2と称す。図16のA点に点音源を仮定し、B点での音圧の応答を求める。節点に音源を与えると、音源は計算上、節点上だけでなく要素分割に応じて表面及びその法線方向に分布する。この例の場合は音源の節点から隣接する節点まで線形に補間された音源とな

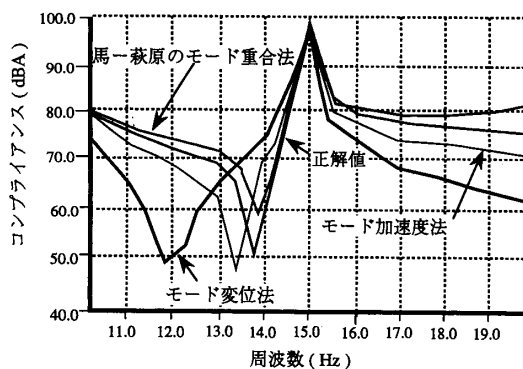


図14 モード周波数応答解析結果の比較(高次のモードを無視した場合)

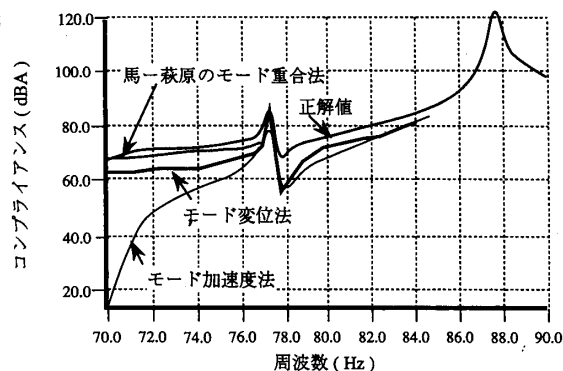


図15 モード周波数応答解析結果の比較(高次と低次のモード両方を無視した場合)

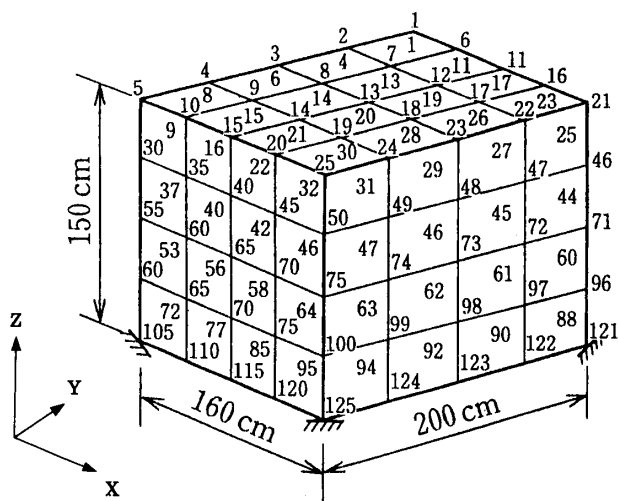


図13 解析モデル

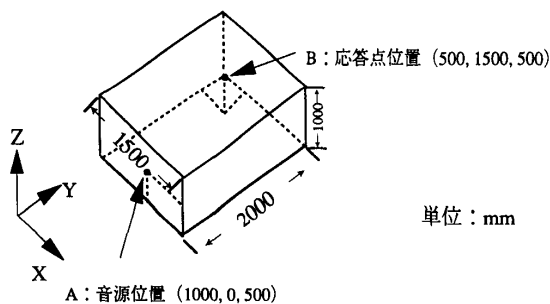


図16 連成問題のモデル

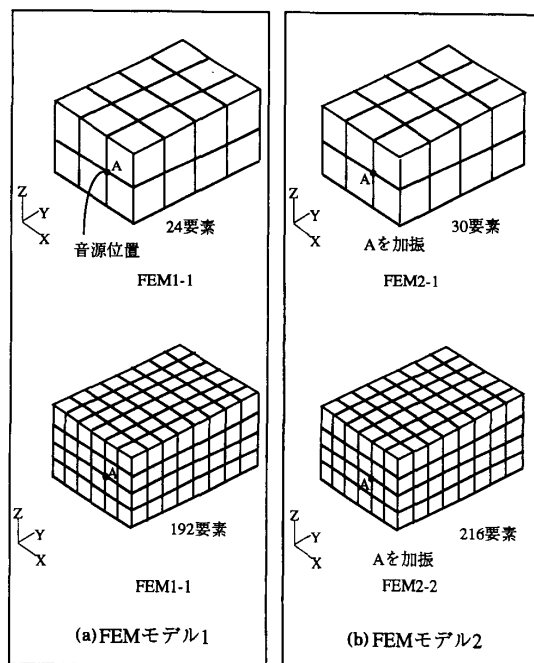


図17 有限要素モデル

る。そこで図17(b)に示すように点音源が領域内の Y 方向に分布しないよう、音源 A 点に関わる所だけ、薄い要素を用いて要素分割した FEM モデル、すなわち30要素の FEM2-1 モデル、216要素の FEM2-2 モデルによる計算を行い、この効果を調べる。ここで FEM2-1 モデルは $500 \times 500 \times 5$ mm, FEM2-2 モデルは $250 \times 250 \times 5$ mm としている。これらの薄い要素の大きさは他の要素の大きさ、例えば FEM2-1 モデルの $500 \times 500 \times 500$ mm, FEM2-2 モデルの $250 \times 250 \times 250$ mm に比べて十分薄いと見なせる。ここで、アスペクト比が大きいと、誤差が大きくなることが考えられるが、本計算では実用上十分な精度が得られているため、工学上は問題はない。FEM の計算は MSC/NASTRAN を用い、要素は最も一般的な六面

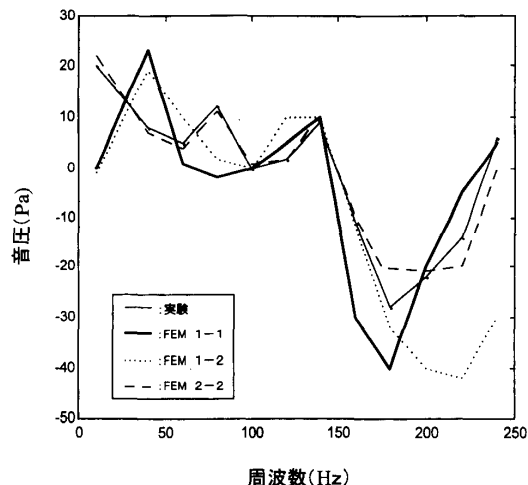


図18 応答特性の比較

体1次のソリッド要素の CHEXA¹⁹⁾である。計算結果を図18に示す。まず点音源の表現の違いによる計算結果の差異について検討する。点音源の領域内方向に薄い要素を用いていない FEM1-1, FEM1-2 モデルは実験結果と大きく異なっている。一方薄い要素を用いた FEM2-1 モデルでは図示はされていないが85 Hz 付近まで、FEM2-2 モデルでは図18に示すように170 Hz 付近まで実験値に近い結果が得られている。このことから点音源を FEM で表現する場合には音源が領域内の方向に分布しないよう注意を払った要素分割が必要であることがわかる。従って、位置決めなどで音源を移動させながら解析を行う場合は音源付近をそのつど要素分割するなど相当の配慮をしない限り良い品質を保つことは難しい。なお著者らは文献(20)で境界要素法 (BEM) を用いて同様の解析を行っているが、BEM の時は薄い要素を用いるなどの配慮は不要である。ここで、170 Hz の音波の波長は2000 mm なので要素の分割幅は波長の1/8以下が必要となり、式(18)の妥当性を裏付けている。

5. ま と め

これまで FEM の品質に関する記述はエネルギーノルムで評価する関数解析的なアプローチが中心であったといえる。しかし、FEM の定着は製造業にとって開発費削減に最も重要なことである。解析ソフトそのものは既かなり充実しているとしても、そのようなソフトを使用しても実際の現象とは容易に一致させることはむつかしいことから、解析法の簡略化など現場対応的な使用がなされている。その中の優れた対応か

ら新しい解析技術も産まれているが、一方で使用者は必ずしも FEM の専門家でないことから、ここで述べた解析技術固有のものや解析モデルに関連する FEM の品質の整理がなされない限り、解析の定着率の一層の向上も難しい状況にあるといえる。従って今後、このような例が集大成され FEM の品質が設計者にとって身近なものとなり、教育にも供される日が一刻も早く来ることを祈念致したい。

参 考 文 献

- 1) 萩原：感性設計のデジタル化を可能とする次世代 CAE 技術，日本機械学会設計工学・システム部門「デジタルプロセスのための CAE」No. 98-22 講習会，81/87 (1998)
- 2) 萩原：自動車設計と解析シミュレーション，シミュレーション，10-3, 177/189 (1991)
- 3) 萩原：SBD の最近の動向，日本機械学会「設計工学からみた最近の解析技術の動向—解析ソフトに何を期待するか—」No. 97-33 講習会，1/5 (1997)
- 4) 田辺：NAFEMS ベンチマーク問題の紹介，解析技術を設計工程に最大限利用するための設計—解析融合に関する研究分科会第 2 回委員会 (1995)
- 5) B. M. Irons and A. Razzaque: 'Experience with the patch test' in Mathematical Foundations of the Finite Element Method', 57/87 (ed. A. R. Aziz), Academic Press (1972)
- 6) P. G. Ciarlet: The finite element method for elliptic problems, North-Holland, Amsterdam (1978)
- 7) Zhongci Shi: On the accuracy of the quasi-conforming & generalized conforming finite element, Chin. Ann of Math. 11-13(2), 148/155 (1990)
- 8) Dongyang Shi and I. Hagiwara: Development of Constructing High Precision Unconventional Non-Conforming Rectangular Elements with Geometrical Symmetry for Bending Problem, submitted to Official Journal of JSIAM.
- 9) T. B. Belytschko and C. S. Tsay: Explicit Algorithms for Nonlinear Dynamics of Shells, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 42 (1984)
- 10) 萩原，津田，佐藤：有限要素法による薄肉箱型断面真直部材の衝撃圧潰解析，日本機械学会論文集 (A 編)，55-514, 1407/1415 (1989)
- 11) 津田，萩原：準静的大変形問題の動的陽解法有限要素法に関する基礎検討，日本機械学会論文集 (A 編)，64-622 (1998)
- 12) Mahmood, H. F and Paluszny A.: SAE Paper 811302 (1981)
- 13) 津田，久住，萩原：塑性座屈が生じる場合の薄肉真直部材の動的解法を用いた準静的圧潰解析，日本機械学会第 7 回設計工学・システム部門講演会講演論文集，449/450 (1997)
- 14) 久住，津田，萩原：弾性座屈が生じる場合の薄肉真直部材の動的解法を用いた準静的圧潰解析，日本機械学会第 7 回設計工学・システム部門講演会講演論文集，445/446 (1997)
- 15) 萩原，馬，荒井，永潤：構造-音場連成系の固有モード感度解析手法の開発，日本機械学会論文集 (C 編)，56-527, 1704/1711 (1990)
- 16) 馬，萩原：高次と低次のモードの省略可能な新しいモード合成技術の開発，第一報：ダンピング系の周波数応答解析，日本機械学会論文集 (C 編)，57-536, 1148/1155 (1991)
- 17) L. Deng, T. Kako: Finite element approximation of eigenvalue problem for a coupled vibration between a acoustic field and plate, J. of Comp. Math., 15-3, 265/278 (1997)
- 18) Dongyang Shi, I. Hagiwara and Li Deng: Finite Element Extrapolation Algorithm For the Eigenvalues of Acoustic-Structural Coupled System, submitted to Official Journal of JSIAM.
- 19) MSC/NASTRAN User's Manual, The MacNeal-Schwendler Corporation (1983)
- 20) I. Hagiwara, W. Kozukue, and H. Okada: Development of an Analysis Method for Acoustic-structural Coupling Systems Using the BEM for the Acoustic Field: The Validity of the Developed and Comparison with the FEM Acoustic Field, Proc. Acoustical Society of America and Acoustical Society of Japan 3rd Joint Meeting (1996)