

大地上の n 円形平行電線近傍の静電位解析[†]

南 里 孝 行*・石 川 雄二郎**

ABSTRACT The purpose of this paper is to show one of the methods that we can apply for the potential analysis around n parallel electric wires above the ground. The theme is basically the Dirichlet boundary problem for a semi-infinite region. The analytical solution is not obtainable for $n \geq 2$, so a numerical analysis is essential. In this paper a finite element method with two mathematical techniques are used to obtain a solution of the problem. One is a conformal mapping and the other is an alternating-like method as in the harmonic function theory. Because it is difficult to divide the above semi-infinite region into finite elements, we transform the region into a concentric annulus by the conformal mapping. The calculation is actually done in the concentric region by using the alternating-like method. This method is so called iterative calculation and also some criteria for convergence are required. We show the criterion and verify it through the numerical calculation of an example.

1. ま え が き

現代社会において、良質な電力を安定して供給することは非常に重要なことである。電力送電端部からの供給電圧は次第に超高電圧化してきており、送電線による電磁界の人間界、動植物界への影響が無視できない問題になりつつある。

電力供給設備設計の段階で送電線近傍における電磁界が評価できれば、上記問題の解決に非常に有効となる。本文では、大地上、複数個（一般的に n 個）の送電線による電位分布の有限要素法を用いる近似的な二次元解析方法を提案する。なお、電位分布が計算できれば、これにより簡単に電界は計算できる。

大地上の電線が 1 本 ($n=1$) の場合には、大地境界を直線とすれば標記の問題は上半平面から 1 個の円板を除いた領域に関する Dirichlet 境界値問題となる。大地および電線を導体、すなわちそれらの電位は一定、とした場合の解析解はよく知られている。ところが電線数が 2 本以上になると解の陽表現は一般には存在しないので数値計算によることになる。この問題を有限要素法を用いて数値解析を行う場合、問題点とし

て、解析領域が半無限領域であるため近似的な有限要素領域を求める必要があること、および電線数 n が 2 以上の場合には、精度のよい解が得られる領域の規則的なアルゴリズムに基づいた有限要素分割が相当困難であることが挙げられる¹⁾。本解析法では、これらの問題点を解決するために半無限領域を適当な写像関数により同心円環に等角写像する手法^{2,3)}に加えて調和関数論における交代法的な計算法⁴⁾を導入する。この方法では 1 本の電線の場合に関する計算を n 回繰り返すことにより n 本の場合の数値解が得られる。また、同心円環という単純な形状の領域に対しては、コンピュータによる領域の要素分割は 2 章で述べるように容易であり、本文の方法によれば電線数を任意の n 本としても、各電線の中心座標および半径を指定するのみで、以降は自動計算が可能である。特に n 本の電線の位置関係を考慮して面倒な要素分割を行う必要がないので実用上のメリットは大きい。続いて本解析法は繰り返し計算法であるので、数値解の収束判定法についても言及する。

終わりに、電線数が $n=2$ かつ垂直配置の場合の簡単な具体例に関し、本解析法による数値解と写像領域をそのまま適当に要素分割して計算する有限要素法による数値解をそれぞれ求め、その差違を検討し、本解析法においても精度の良い数値解が得られることを確認した。

Potential Analysis of Parallel n -wires in a Semi-Infinite Space Using Finite Element Method. By Takayuki Nanri (Dept. of Electrical and Computer Engineering, Nagoya Institute of Technology) and Yujiro Ishikawa (Nagoya Kougakuin).

*名古屋工業大学電気情報工学科

**名古屋工学院専門学校

[†]1998年3月19日受付 1998年6月2日再受付

2. 電線の数が1本の場合の等角写像を応用した数値解法^{2,3)}

電線が1本 ($n=1$) の場合は図1のような上半平面より1つの円板を除いた領域 D_z が解析領域となる. 図1のように D_z は z 平面 ($z=x+jy, j=\sqrt{-1}$) の領域とする. $x_1=0, y_1=h, r_1=r$ となるように座標系を設定すれば, D_z は次式により

$$w = \frac{h(a+1) - (a-1)zj}{(a-1)z - h(a+1)j} \quad (1)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{r^2 - h^2 + 2h\sqrt{h^2 - r^2}}{r^2} \\ b &= \frac{h - \sqrt{h^2 - r^2}}{r} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

図2の w 平面 ($w=u+jv$) の同心円環 D_w に写像できる. そこで, 本文では, D_w に関して数値計算を行い (1) 式の逆写像式

$$z = h \frac{(a+1)(1+jw)}{(a-1)(w+j)} \quad (3)$$

を用いて得られた数値計算結果を z 平面に写し, 求める数値解とする計算法を用いる. 本文では8節点アイソパラメトリック四辺形要素を用いる.

図2の D_w は同心円環なので, 要素分割にあたり角度方向は等分割, 半径方向は等比級数的に分割する. すなわち,

要素分割の基本1: 要素内電位補間関数誤差を小さくするため, 内円の近傍では要素分割は細かくし, 要素数を減じるため外円に近づくにつれて粗くなるように分割する.

要素分割の基本2: 要素分割簡単化のため要素形状は正方形に近いものとする.

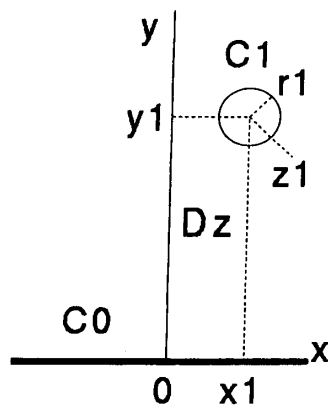


図1 z 平面

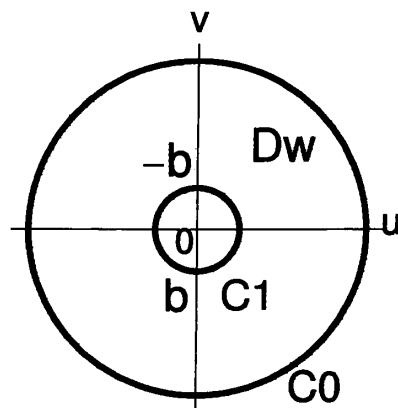
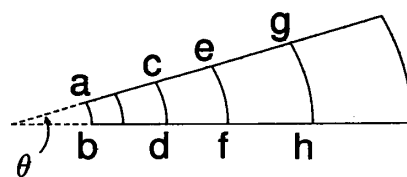


図2 w 平面



$$\left(\theta = \frac{2\pi}{N}, N \text{ は角度方向分割数} \right)$$

図3 要素分割の基本法則

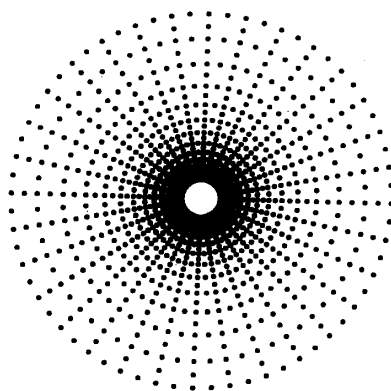


図4 32分割節点分布

この2つの基本により, 図2の領域の要素分割を行った1部分を図3に示す. すなわち, 図3に示すように $cd=ce=df, ef=eg=fh$ となるようにする (ただし, 外円近傍の2つの四辺形については $ce=eg=df=fh$ と調整する). 図4は図2に示す領域を角度方向に32等分割し, 32分割後の各領域を上記方法により要素分割して得られる, 8節点四辺形要素の全節点分布を示す.

この分割法においては角度方向の分割数を設定すれば, 図3の弧 ab の長さは一意に定まり以後の半径方向の分割は自動的に行うことができる. よって, この

分割法は1つのパラメータ（角度方向の分割数）を指定すればコンピュータにより自動分割可能であり，自動計算に適している．このパラメータにより要素分割の粗密（＝数値計算精度）の管理が可能であり，また円環の全要素においてはほぼ均一な誤差となる³⁾．以後，1本の電線に関する上述の自動分割法による有限要素法を用いた計算法を基本解法として参照する．本解析法はこの基本解法を繰り返し用いることを特徴としている．

3. 電線の本数が n 本である場合の交代法を応用した数値解法⁵⁾

図5に本文において考察する問題を示す．ここで，円形導体 $C_1, C_2, \dots, C_k, \dots, C_n$ を電線， C_0 を大地とする．このときの静電位分布は， n 個の円状の境界を含む半無限領域 D_z において，二次元調和方程式を解くことにより得られる．本文では，図5に示す半無限領域内の円形導体 C_k の中心座標を z_k ，半径を r_k ($k=1, 2, \dots, n$) とする．大地 C_0 の境界を ∂C_0 ，境界値を v_0 とし，円形導体 C_k の円周を境界 ∂C_k ，境界値を v_k ($k=1, 2, \dots, n$) とする．この問題に関しては， $n \geq 2$ の場合数学的な厳密解は一般には得られないので，数値解法によることになる．

本文では，図5の n ($n \geq 2$) 個の円形導体による電位分布を求めるために，上記円形導体が1個の場合の“等角写像”を応用した基本解法に加えて調和関数論の“交代法”を応用した本解析法を提案する．

さて以降，計算例としては図5の問題において， $n=3$ すなわち，円形導体数を3とする．円形導体 C_1, C_2, C_3 の中心座標 z_1, z_2, z_3 をそれぞれ $-7+j4, j10, 5+j8$ ，半径 r_1, r_2, r_3 をそれぞれ1, 2, 1とする（図6参照）．また，境界 $\partial C_1, \partial C_2, \partial C_3$ に与えられる境界値 v_1, v_2, v_3 をすべて等しく1とし，大地境界 ∂C の境界

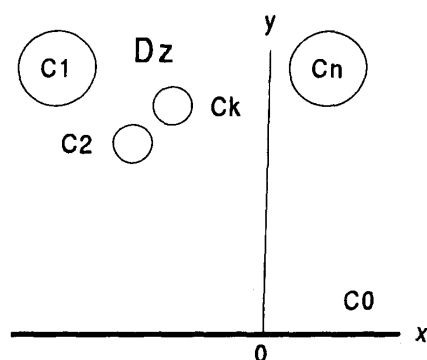


図5 考察した問題

値 v_0 を0とする．

図6の円形導体 C_1, C_2, C_3 のうち C_1 に着目し，これを図2の単一円形導体とみなす． C_1 が， w 平面の原点を中心とする円 C_1 に写像される(1)式の写像関数により，図6の D_z を w 平面の原点を中心とする円環 D_w に写像する．このとき，もちろん， C_2, C_3 も w 平面の同心円環 D_w 内の円 C_2, C_3 に写像される（図7参照）．

C_1 の場合と同様に， C_2, C_3 に着目してそれらの写像円 C_2, C_3 の中心がそれぞれ w 平面の原点にくる適当な(1)式の写像関数により， D_z を w 平面の D_w に写像する（図8，図9参照）．

図7の領域 D_w において，境界条件として， C_1, C_0 の境界 $\partial C_1, \partial C_0$ に境界値 v_1, v_0 を与え，基本解法により，電位分布の数値解 $p_1^{(1)}$ を求める．数値解 $p_1^{(1)}$ が境界位置 $\partial C_2, \partial C_3$ においてとる値（電位）を $v_{12}^{(1)}, v_{13}^{(1)}$ （座標 (u, v) の関数）で表す．この基本解法による計算においては導体 C_2, C_3 の存在は想定されおらず，単なる同心円環に関する数値計算であり，

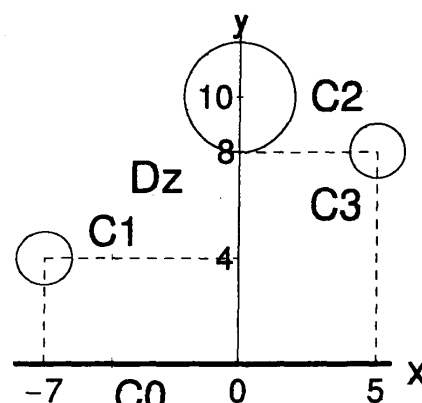


図6 $6n=3$ の場合の例題

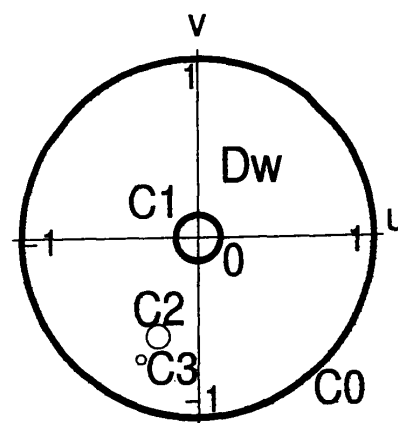
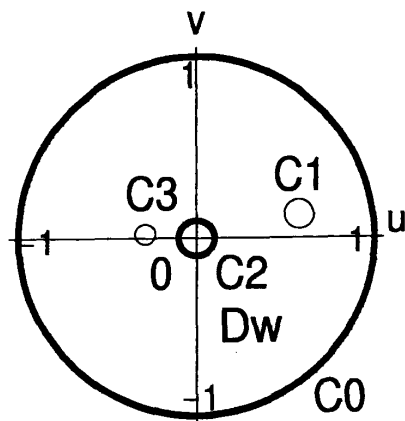
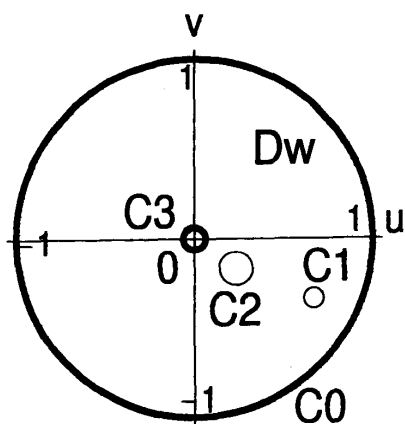


図7 C_1 基準の写像

図8 C_2 基準の写像図9 C_3 基準の写像

$v_{12}^{(1)}, v_{13}^{(1)}$ は $p_1^{(1)}$ が特定の位置でとる値により定義された (u, v) の関数であることに注意する. 同様に図8の C_2 を中心とする円環領域 D_w についても境界値 v_2, v_0 を与え基本解法により計算すると数値解 $p_2^{(1)}$ と, $p_2^{(1)}$ が境界位置 $\partial C_1, \partial C_3$ においてとる値 $v_{21}^{(1)}, v_{23}^{(1)}$ が得られる. また図9の C_3 を中心とする円環領域に境界値 v_3, v_0 を与え同様に計算すると数値解 $p_3^{(1)}$ と, $p_3^{(1)}$ が境界位置 $\partial C_1, \partial C_2$ においてとる値 $v_{31}^{(1)}, v_{32}^{(1)}$ が得られる. この一連の3回(電線が n 本の場合は n 回)の計算を1回目の計算として参照する. ここで, 例えば $v_{31}^{(1)}$ において上添え字は繰り返し計算における計算回数を, 下添え字は C_3 から C_1 への寄与電位を表す.

1回目の計算にあたり各境界 $\partial C_1, \partial C_2, \partial C_3$ に与えた初期値を $v_1^{(0)}=v_1, v_2^{(0)}=v_2, v_3^{(0)}=v_3$ とすれば, 1回目の計算後の C_1 の境界電位 $v_1^{(1)}$ は初期値 $v_1^{(0)}$ と C_2, C_3 からの寄与電位 $v_{21}^{(1)}, v_{31}^{(1)}$ の総和 $v_1^{'(1)}$ となる. C_2, C_3 の1回目の計算後の境界電位 $v_2^{'(1)}, v_3^{'(1)}$ も同様に計算され, 結果を表1に示す.

表1 1回目の計算後の境界電位分布

境界	初期値	1回目の計算後の境界電位分布
∂C_0	v_0	$v_0 = 0$ (常に一定)
∂C_1	$v_1^{(0)}$	$v_1^{(0)} + v_{21}^{(1)} + v_{31}^{(1)} = v_1^{'(1)}$ ($v_1^{(0)} = v_1$)
∂C_2	$v_2^{(0)}$	$v_2^{(0)} + v_{12}^{(1)} + v_{32}^{(1)} = v_2^{'(1)}$ ($v_2^{(0)} = v_2$)
∂C_3	$v_3^{(0)}$	$v_3^{(0)} + v_{13}^{(1)} + v_{23}^{(1)} = v_3^{'(1)}$ ($v_3^{(0)} = v_3$)

1回目の計算による数値解は $p^{(1)}=p_1^{(1)}+p_2^{(1)}+p_3^{(1)}$ である. ただし, $p^{(1)}$ は z 平面で定義された (x, y) の関数で $p_i^{(1)} (i=1, 2, 3)$ を(2)式により z 平面にそれぞれ逆写像した電位の和を表すものとする. さて得られた $v_1^{'(1)}, v_2^{'(1)}, v_3^{'(1)}$ と満たすべき境界値(電位) v_1, v_2, v_3 を比較して, 2回目の計算のための初期値 $v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, v_3^{(1)}$ 次式で定める.

$$\left. \begin{aligned} v_i^{(1)} &= v_i^{(0)} - \text{err}_i^{(1)} \\ \text{err}_i^{(1)} &= v_i^{'(1)} - v_i \\ v_i^{'(1)} &= v_i^{(0)} + \sum_{l=1(l \neq i)}^3 v_l^{(1)} \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2, 3) \quad (4)$$

$\text{err}_i^{(1)}$ は1回目の計算後の境界 ∂C_i 上の電位 $v_i^{'(1)}$ と満たすべき境界値 v_i との差, すなわち境界値誤差である. 1回目の計算で使用した C_i の境界値 $v_i^{(0)}$ をこの誤差 $\text{err}_i^{(1)}$ で補正した新しい境界値 C_i の境界値 $v_i^{(1)} = v_i^{(0)} - \text{err}_i^{(1)}$ を2回目の計算の C_i の境界値として計算を繰り返すと, 数値解 $p^{(2)}=p_1^{(2)}+p_2^{(2)}+p_3^{(2)}$ が得られる. 上式を $j(j=2, 3, \dots)$ 回目の計算のための境界値更新式として一般的に表すと

$$\left. \begin{aligned} v_i^{(j-1)} &= v_i^{(j-2)} - \text{err}_i^{(j-1)} \\ \text{err}_i^{(j-1)} &= v_i^{'(j-1)} - v_i \\ v_i^{'(j-1)} &= v_i^{(j-2)} + \sum_{l=1(l \neq i)}^3 v_l^{(j-1)} \end{aligned} \right\} \quad \left(\begin{array}{l} j=2, 3, \dots \\ i=1, 2, 3 \end{array} \right) \quad (5)$$

となる. 境界値の更新に対応して, j 回目の計算による数値解 $p^{(j)}=p_1^{(j)}+p_2^{(j)}+p_3^{(j)}$ が得られる. このように順次計算を繰り返し, 前回の数値解と新しく計算された数値解との全節点における差(それらの差の絶対値の最大値を $\text{dif}^{(j)}$ とする)が十分小さい正数 ε より小さくなったとき数値解 $p^{(j)}$ は収束したものとみなし計算を終了する. $\varepsilon=10^{-5}$ としたときには, $j \geq 30$ となり, $j=30$ の場合の計算結果 $p^{(30)}$ を図10に示す. このとき, 各円導体 C_1, C_2, C_3 単体による電位 $p_1^{(30)}, p_2^{(30)}, p_3^{(30)}$ を図11, 図12, 図13に示す.

以上のように本解析法の基本は, C_1, C_2, C_3 の境界値を更新, すなわち図11, 図12, 図13の電位分布を更新しながらそれらの和が与えられた境界値を満たす電位分布図10となるように計算を繰り返すことである.

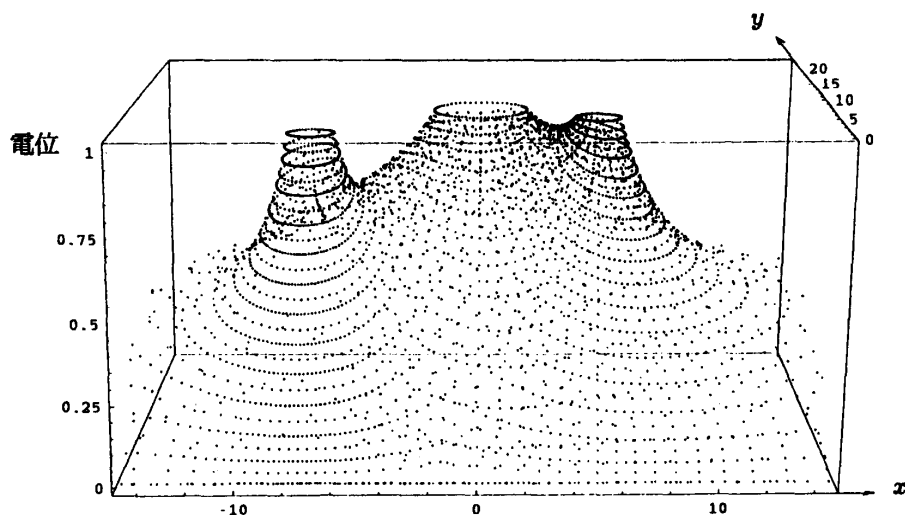
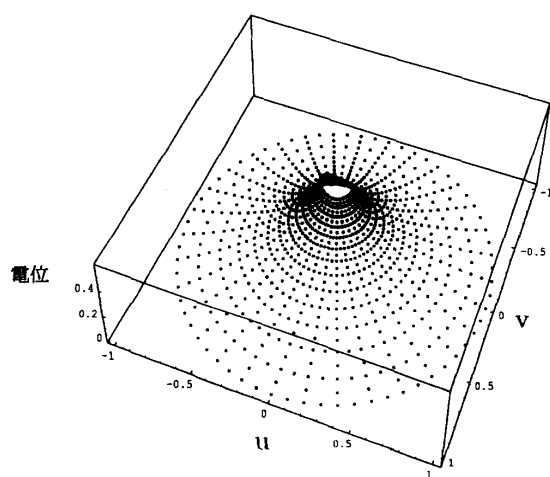
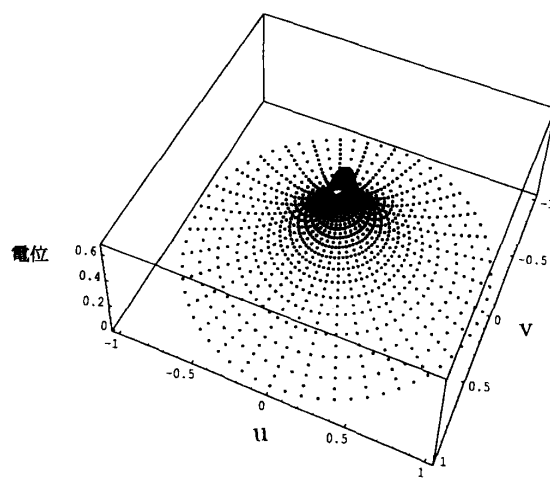


図10 電位分布

図11 C_1 単体による電位図12 C_2 単体による電位

本例題の計算において(5)式の

$$v_i^{(j-1)} = v_i^{(j-2)} - \text{err}^{(j-1)}$$

による境界値の更新は過剰補正であるので、パラメータ $k(0 < k \leq 1)$ を導入し

$$v_i^{(j-1)} = v_i^{(j-2)} - k \times \text{err}^{(j-1)}$$

として、 k を変化させて数値計算を行った。図6の問題について $\text{dif}^{(j)}$ を計算した結果を図14(点線)で示す。 $k \approx 0.9$ とすると、本例題の場合は収束が速いことが分かる。

本文では同心円環に関する Dirichlet 境界値問題の数値解は有限要素法を応用して計算しているが、本交代法に基づく解法は有限要素法に限定されるものではなく、領域を適当に分割することにより数値解を得る領域法に適用できる。本質的な点は「1本の電線の場合

合について Dirichlet 境界値問題を解く方法が存在すれば、 n 本の電線の場合も、1本の電線に関する計算を繰り返すだけで、最終的な解が得られる。」であることを強調しておく。

4. 繰り返し計算に関する収束判定法

一般に、繰り返し計算により数値解を求める場合、前回の計算結果と今回の計算結果との差が十分小さくなれば数値解は収束したものと判断することができる。本文の様に有限要素法を用いて繰り返し計算を行う場合は各有限要素の全節点に関し前回の計算結果と今回の計算結果との差を毎回計算する。有限要素数が多く、全節点数が多い場合はこれは相当な計算量となる。従って、本解析法に関しては以下に詳述するように、一般的な仮定の下に上記より計算効率のよい実用

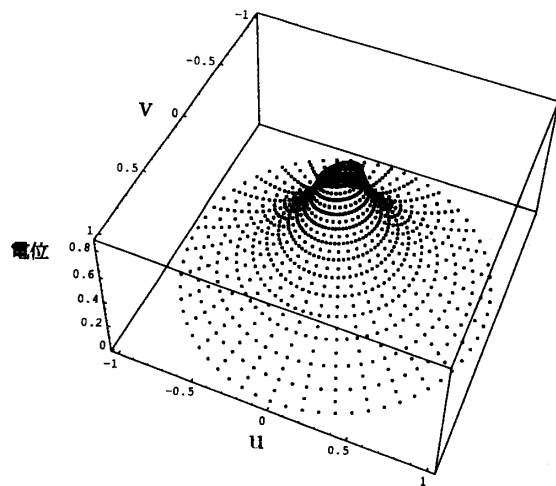
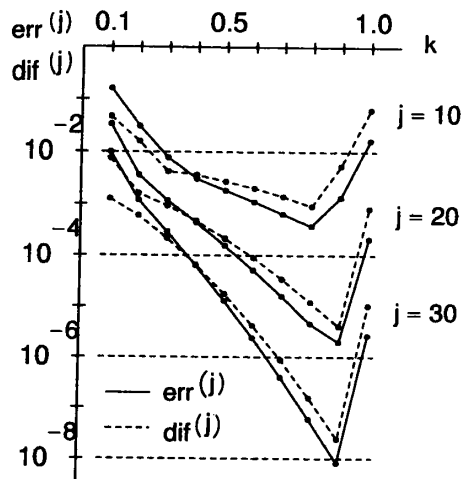
図13 C₃ 単体による電位

図14 収束特性

的な判定法を提案する。

収束判定法：本解析法においては、有限要素の全節点に関し前回の数値計算結果と今回の結果との差を計算し収束判定する必要はなく、各境界 ∂C_i ($i=1, 2, 3$) 上の節点のみについて収束判定すれば十分である。

ただし、次項の成立を仮定する。

仮定： $(j+1)$ 回目の計算のための境界値 $v_i^{(j)}$ と $(k+1)$ 回目の計算のための境界値 $v_i^{(k)}$ に対して

1) 図7において、 $0 < v_1^{(j)} < v_1^{(k)}$ (∂C_1 上) が成立すれば

$$0 < v_{12}^{(j+1)} < v_{12}^{(k+1)} \quad (\partial C_2 \text{ 上})$$

$$0 < v_{13}^{(j+1)} < v_{13}^{(k+1)} \quad (\partial C_3 \text{ 上})$$

2) 図8において、 $0 < v_2^{(j)} < v_2^{(k)}$ (∂C_2 上) が成立すれば

$$0 < v_{21}^{(j+1)} < v_{21}^{(k+1)} \quad (\partial C_1 \text{ 上})$$

$$0 < v_{23}^{(j+1)} < v_{23}^{(k+1)} \quad (\partial C_3 \text{ 上})$$

3) 図9において、 $0 < v_3^{(j)} < v_3^{(k)}$ (∂C_3 上) が成立すれば

$$0 < v_{31}^{(j+1)} < v_{31}^{(k+1)} \quad (\partial C_1 \text{ 上})$$

$$0 < v_{32}^{(j+1)} < v_{32}^{(k+1)} \quad (\partial C_2 \text{ 上})$$

以上が成立する。(仮定終)

証明 (5)式より収束判定法を証明するには、次を示せば十分である。

境界値誤差 $err_1^{(j)} = v_1'^{(j)} - v_1 \rightarrow 0$ より

$v_{21}^{(j)}, v_{31}^{(j)}$ の ∂C_1 上の収束

境界値誤差 $err_2^{(j)} = v_2'^{(j)} - v_2 \rightarrow 0$ により

$v_{12}^{(j)}, v_{32}^{(j)}$ の ∂C_2 上の収束

境界値誤差 $err_3^{(j)} = v_3'^{(j)} - v_3 \rightarrow 0$ により

$v_{13}^{(j)}, v_{23}^{(j)}$ の ∂C_3 上の収束

の判定が可能である。(十分条件終)

ここで、次項に注意する。

注意：(5)式より

$$\begin{aligned} v_1 &= v_1'^{(j)} - err_1^{(j)} \\ &= (v_1^{(j-1)} + v_{21}^{(j)} + v_{31}^{(j)}) - (v_1^{(j-1)} - v_1^{(j)}) \\ &= v_1^{(j)} + v_{21}^{(j)} + v_{31}^{(j)} \end{aligned}$$

$$v_1^{(j)} + v_{21}^{(j)} + v_{31}^{(j)} = v_1$$

$v_2^{(0)}, v_3^{(0)}$ 等も同様にして

$$v_2^{(j)} + v_{12}^{(j)} + v_{32}^{(j)} = v_2$$

$$v_3^{(j)} + v_{13}^{(j)} + v_{23}^{(j)} = v_3$$

となる ($j=1, 2, \dots$)。 (注意終)

さて、本論にもどり、次の補題を示す。

補題：初期境界値 $v_i^{(0)} = v_i > 0$ (∂C_i 上) ならば、 $v_{mn}^{(j-1)} - v_{mn}^{(j)}$ ($j=2, 3, \dots; m, n=1, 2, 3$ ($m \neq n$)) は m, n の組み合わせに関わらず、常に同符号である。すなわち、 $j=3, 5, 7, \dots$ に対しては負符号であり、 $j=2, 4, 6, \dots$ に対しては正符号となる。 (補題終)

a) C_i 上の初期境界値を

$$v_i^{(0)} = v_i > 0 \quad (i=1, 2, 3)$$

として1回目の計算を行うと、 $v_i > 0$ であるので、仮定より

$$v_{21}^{(1)}, v_{31}^{(1)} > 0 \quad (\partial C_1 \text{ 上})$$

$$v_{12}^{(1)}, v_{32}^{(1)} > 0 \quad (\partial C_2 \text{ 上})$$

$$v_{13}^{(1)}, v_{23}^{(1)} > 0 \quad (\partial C_3 \text{ 上})$$

となる。このとき

$$v_1^{(1)} = v_1 + v_{21}^{(1)} + v_{31}^{(1)} > v_1 \quad (\partial C_1 \text{ 上})$$

$$v_2^{(1)} = v_2 + v_{12}^{(1)} + v_{32}^{(1)} > v_2 \quad (\partial C_2 \text{ 上})$$

$$v_3^{(1)} = v_3 + v_{13}^{(1)} + v_{23}^{(1)} > v_3 \quad (\partial C_3 \text{ 上}).$$

すなわち

$$v_i^{(1)} > v_i \quad (\partial C_i \text{ 上})$$

$$err_i^{(1)} = v_i'^{(1)} - v_i > 0 \quad (\partial C_i \text{ 上}).$$

b) C_i 上の境界値を(5)式より

$$v_i^{(1)} = v_i - \text{err}_i^{(1)}$$

と定めて2回目の計算を行う. $\text{err}_i^{(1)} > 0$ より

$$v_i^{(1)} < v_i \quad (\partial C_i \text{ 上})$$

となり, 仮定より

$$v_{21}^{(2)} < v_{21}^{(1)}; v_{31}^{(2)} < v_{31}^{(1)} \quad (\partial C_1 \text{ 上})$$

$$v_{12}^{(2)} < v_{12}^{(1)}; v_{32}^{(2)} < v_{32}^{(1)} \quad (\partial C_2 \text{ 上})$$

$$v_{13}^{(2)} < v_{13}^{(1)}; v_{23}^{(2)} < v_{23}^{(1)} \quad (\partial C_3 \text{ 上})$$

が得られる. よって, (5)式および前述の注意と併せて

$$\begin{aligned} v_1^{(2)} &= v_1^{(1)} + v_{21}^{(2)} + v_{31}^{(2)} \\ &< v_1^{(1)} + v_{21}^{(1)} + v_{31}^{(1)} = v_1 \quad (\partial C_1 \text{ 上}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2^{(2)} &= v_2^{(1)} + v_{12}^{(2)} + v_{32}^{(2)} \\ &< v_2^{(1)} + v_{12}^{(1)} + v_{32}^{(1)} = v_2 \quad (\partial C_2 \text{ 上}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_3^{(2)} &= v_3^{(1)} + v_{13}^{(2)} + v_{23}^{(2)} \\ &< v_3^{(1)} + v_{13}^{(1)} + v_{23}^{(1)} = v_3 \quad (\partial C_3 \text{ 上}) \end{aligned}$$

すなわち

$$v_i^{(2)} < v_i \quad (\partial C_i \text{ 上})$$

$$\text{err}_i^{(2)} = v_i^{(2)} - v_i < 0 \quad (\partial C_i \text{ 上})$$

以下, 同様に繰り返すと,

$$v_{21}^{(j-1)} - v_{21}^{(j)} < 0, v_{31}^{(j-1)} - v_{31}^{(j)} < 0 \quad (j: \text{奇数})$$

$$v_{21}^{(j-1)} - v_{21}^{(j)} > 0, v_{31}^{(j-1)} - v_{31}^{(j)} > 0 \quad (j: \text{偶数})$$

が得られる. $v_{12}^{(j)}, v_{32}^{(j)}, v_{13}^{(j)}, v_{23}^{(j)}$ に関しても同様であり, 補題が示された. (補題証明終)

続いて, この補題を用いて, $\text{err}_i^{(j)}$ に関する前述の収束判定指標を示す. 本文(5)式に基づき $\text{err}_i^{(j)}$ を陽に求める. 最初に $i=1$ として計算する. $j=1$ のとき

$$\begin{aligned} v_1^{(1)} &= v_1 + v_{21}^{(1)} + v_{31}^{(1)} \\ \text{err}_1^{(1)} &= v_1^{(1)} - v_1 = v_{21}^{(1)} + v_{31}^{(1)} \\ v_1^{(1)} &= v_1 - \text{err}_1^{(1)} = v_1 - (v_{21}^{(1)} + v_{31}^{(1)}) \end{aligned}$$

$j=2$ のとき

$$\begin{aligned} v_1^{(2)} &= v_1^{(1)} + v_{21}^{(2)} + v_{31}^{(2)} \\ &= v_1 - (v_{21}^{(1)} + v_{31}^{(1)}) + (v_{21}^{(2)} + v_{31}^{(2)}) \\ \text{err}_1^{(2)} &= v_1^{(2)} - v_1 \\ &= -(v_{21}^{(1)} + v_{31}^{(1)}) + (v_{21}^{(2)} + v_{31}^{(2)}) \\ v_1^{(2)} &= v_1^{(1)} - \text{err}_1^{(2)} \\ &= v_1 - (v_{21}^{(1)} + v_{31}^{(1)}) \\ &\quad - \{ -(v_{21}^{(1)} + v_{31}^{(1)}) + (v_{21}^{(2)} + v_{31}^{(2)}) \} \\ &= v_1 - (v_{21}^{(2)} + v_{31}^{(2)}) \end{aligned}$$

以下同様に, $j=3, 4, \dots$ について計算すると, 一般に $j=2, 3, \dots$ に対して

$$\begin{aligned} \text{err}_1^{(j)} &= -(v_{21}^{(j-1)} + v_{31}^{(j-1)}) + (v_{21}^{(j)} + v_{31}^{(j)}) \\ &= (v_{21}^{(j)} - v_{21}^{(j-1)}) + (v_{31}^{(j)} - v_{31}^{(j-1)}) \end{aligned}$$

補題より

$$(v_{21}^{(j)} - v_{21}^{(j-1)}) \text{ と } (v_{31}^{(j)} - v_{31}^{(j-1)})$$

は同符号であることに注意すると

$\text{err}_1^{(j)} \rightarrow 0$ であれば $v_{21}^{(j)}, v_{31}^{(j)}$ はコーシー列となり $v_{21}^{(j)}, v_{31}^{(j)}$ の収束が結論される. $i=2, 3$ についても同様であるので,

$$\text{err}^{(j)} = \max(|\text{err}_1^{(j)}|, |\text{err}_2^{(j)}|, |\text{err}_3^{(j)}|) \quad (j=1, 2, 3)$$

は $v_{21}^{(j)}, v_{31}^{(j)}, v_{12}^{(j)}, v_{32}^{(j)}, v_{13}^{(j)}, v_{23}^{(j)}$ の境界 ∂C_i 上での収束判定指標となっている. (収束判定法証明終)

図6の問題について精度の良い解を得るため, 円環領域を角度方向32分割して計算を行った²⁾. $\text{err}^{(j)}$ を計算した結果を前掲図14(実線)に示す. 図11より判定基準として, 従来の $\text{dif}^{(j)}$ と同様 $\text{err}^{(j)}$ を使用できることが分かる.

最後に, 図15に示す $n=2$ の場合の簡単な例題を, 等角写像と交代法を応用した本解析法と1回の計算で解が得られる等角写像を応用した有限要素法とにより計算し, 両計算結果を比較検討する. 図15において, $h_1=5750 \text{ cm}$, $r_1=5 \text{ cm}$, $h_2=2000 \text{ cm}$, $r_2=10 \text{ cm}$ とした場合を例1, $h_1=100 \text{ cm}$, $r_1=20 \text{ cm}$, $h_2=50 \text{ cm}$, $r_2=10$

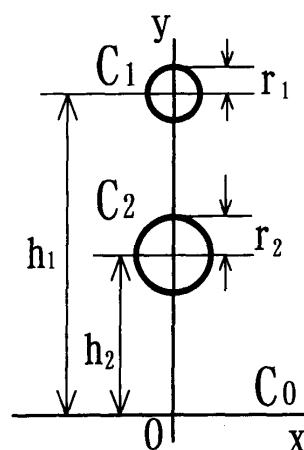


図15 簡単な例題

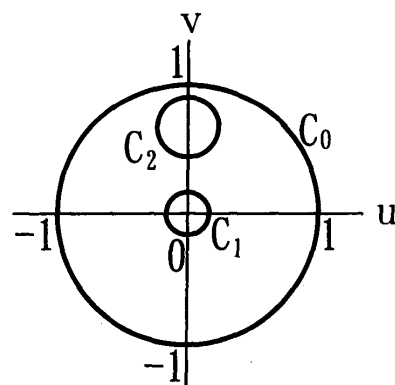


図16 写像領域

cmとした場合を例2とする。例1, 例2において, C_1, C_2 の電位は等しく1, C_0 の電位は0とする。両計算法とも, 図15の領域を, 適当な写像関数により図16に示す領域に写像し, これを解析領域とする。前述した $n=3$ の場合の計算法では, 3種類の写像関数により, 対象とする3個の導体がそれぞれ単位円の中心に来るように3個の写像領域を作成し, 各写像領域においてその他の導体部は導体周囲の媒質で満たすとして計算している。しかし, 本例題では, 両計算法において, 要素内補間関数誤差, 要素写像誤差²⁾が同様になるように, 同一の解析領域を用いる。例1, 例2において計算に用いる, 電位分布の対称性を考慮した要素分割図をそれぞれ図17, 図18に示す。ただし, これらの図では各要素の節点のみを示している。また, 等角写像と交代法を応用した解析法において, 対象とする

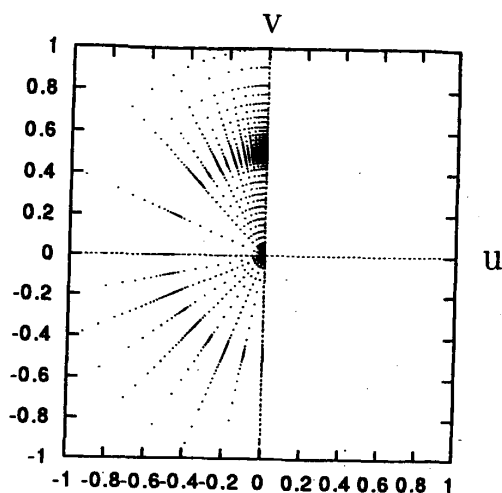


図17 例1の要素分割図

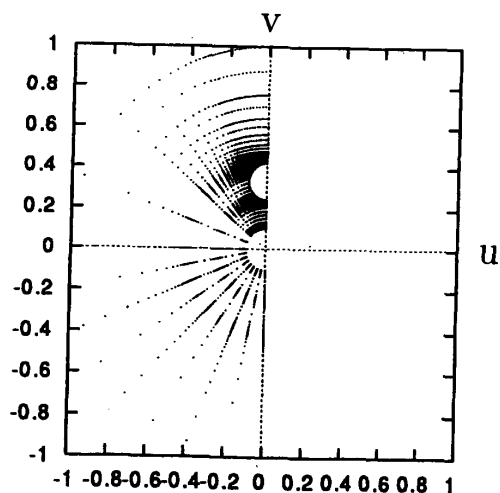


図18 例2の要素分割図

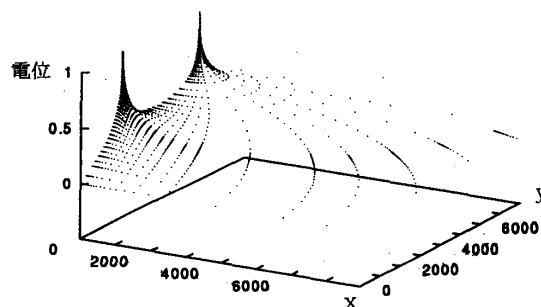


図19 例1の電位分布計算結果

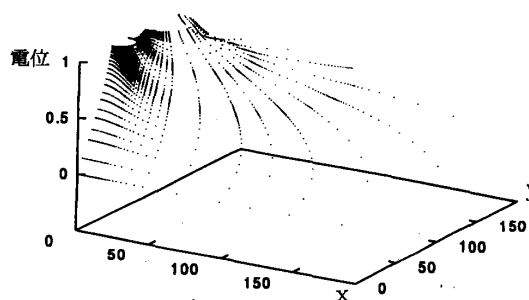


図20 例2の電位分布計算結果

導体以外の導体も対象導体と同様に媒質を満たさないで計算する。もちろん, $n=3$ の場合と同様に, 周囲媒質を満たして計算しても計算が複雑になるだけで, 同じ収束判定条件であれば同じ計算結果が得られる。例1, 例2の両計算法による電位分布の計算結果をそれぞれ図19, 図20に示す。ここで, 繰り返し計算に基づく本解析法において, 収束判定条件としていずれも $\varepsilon=10^{-7}$ をもちい $dif(j) < \varepsilon$, 解の収束までの計算回数は, 例1は9, 例2は33であった。また, 全節点において, 両計算結果の最大差違は, 例1の場合, 約 2×10^{-10} , 例2の場合, 6×10^{-8} と非常に小さく, 両計算結果は, 図表示した場合一致する。以上から, 本文の繰り返し計算法により, 従来の有限要素法による解と同様, 計算領域を適切に要素分割すれば, 良好な近似解が得られることが簡単な具体例により確認できた。

5. まとめ

本文で提案した計算方法の具体的な使用法を $n=3$ の場合について示したが, 本計算法は円形導体の数 n が任意であるときも $n=1$ の場合の簡単な計算を繰り返すことにより数値解が得られる汎用性の高い計算方法である。また, 本文で示した円環領域の二次四角形アイソパラメトリック要素を用いる有限要素への分割法は, コンピュータによる自動分割が容易で, 分割数

にしたがい計算誤差は減少しかつその計算誤差は全節点においてほぼ均一となる。また、本文で提案した繰り返し計算の収束判定法は、境界上の節点における計算結果のみで収束判定するので、全節点の計算結果全てを用いる従来法より計算効率がよく、以下に示す様に計算時間も短縮できる。

なお、例題 ($n=3$) の場合、数値解 $p^{(30)}$ を得るために必要な計算時間は汎用パソコン (CPU: PC604e, 180 MHz) の場合 $dif^{(j)} < \varepsilon$ と $err^{(j)} < \varepsilon$ を収束判定基準としたときの計算時間はそれぞれ約 3 分と約 2 分 55 秒である。ここで、 $\varepsilon=10^{-5}$, $k=1$ としている。

参 考 文 献

- 1) 南里孝行：直接式抵抗炉における電極間負荷コンダクタンスの算定法，電学論，C-111, 245 (平2-4)
- 2) 南里孝行，石川雄二郎：等角写像を応用した調和方程式の有限要素法による解法，電学論，A-117, 895 (平9-8)
- 3) 南里孝行，石川雄二郎：等角写像を応用した有限要素法による電位解析，日本シミュレーション学会，第16回シミュレーション・テクノロジー・コンファレンス，243, (1997)
- 4) スミルノフ：高等数学教程．第10巻，共立出版 (1965)
- 5) 南里孝行，石川雄二郎：等角写像と交代法を応用した調和方程式の数値解法，日本シミュレーション学会，第18回計算電気・電子工学シンポジウム，51, (1997)