Japan Society for Simulation Technology

《小特集》

年金ALMの視点から見た年金数理計算

山下智志*・矢頭智夫**

ABSTRACT It has been shown that it is necessary to apply multi period optimization problems such as DP (dynamic problem) and MDP (Marcov decision process) for pension ALM. However, it was impossible to use the optimization problem for pension ALM because the pension actuarial calculation was complex. In this study, we analyze the sensitivity of the pension to exogenous variables of the pension actuarial calculation (assumptions like discount rate and market indexes) using the Monte Carlo method. The results of this analysis help simplify the actuarial calculation formula. Multi Period Optimization Problem is introduced at this point in order to envisage a method for practical pension ALM.

1. はじめに

近年の金融環境の変化は，年金の資産運用の方法に対して従来とは異なるリスク管理が必要であることを認識させるようになった．資産デフレが起こる以前は，長期にわたる年金資産運用においてリスクを過小に評価する傾向にあった．これは，「長期の運用は短期の運用に比較してリスクは低減する」という発想に基づくものであるが，この考え方には負債要件についての基本的な視点が欠落していた．確かに収益率ベースで考えると長期になればなるほどリスクは低減するであろうが，年金の負債は将来のキャッシュフローに対する現在価値なので，期間が長くなればなるほど，わずかの金利の違いも大きく影響することになる．このため，年金資金の場合，運用が長期であることによるリスク低減効果を望むことはできない．

また，企業の高度成長が終焉したことによる影響も見逃すことはできない．これまでは企業の人員は増加する傾向にあり，年金資金は入超の状態が続いていた．そのため年金の資産管理はあえてリスク管理を行わずとも，キャッシュフローが行き詰まることはあり得ず，運用戦略は将来の負債要件を考慮する必要がなかった．しかし企業の人員の増加が止まった現在においては，将来のキャッシュフローを確保するため，資産サイドのみの要件で運用戦略を決定するのではなく，負債要件を考慮した運用戦略の立案が不可欠なものとなっている．

そこで近年，年金資産については銀行勘定で行われているような，資産と負債のリスク管理を同時に行うALM (Asset Liability Management) が有効であると提言されている[1),2)]．これは，年金の将来のキャッシュフローを資産・負債の両方について予測・分析・モデル化し，その予測誤差を含めてリスク管理を行うものである．

しかし，現状では年金ALMが実用的なレベルでモデル化されているとは言い難い．それは以下にあげる点について解決すべき課題があるからである．

[A] 資産側の将来を予測するに当たって，信頼すべき予測モデルがない．特に年金ALMにとって重要な指標であるインフレ率と，その他の金融指標とを同時に扱った時系列モデルは，実務的に不都合な面が多く改良が必要である．

[B] 負債側の年金数理計算は極めて複雑な計算過程により算出される指標であるため，その算出式を一般的なALMモデルに内包することは不可能である．

[C] 年金資産は（通常）永久的運用が建前であるため，多期間もしくは無限期間を前提としたポートフォリオモデルが必要である．そのためモデルの目的関数に複雑な関係式を適用できない．

近年，年金ALMに対する研究が活発に行われているが，その多くは課題[A]に関する資産サイドの将来を表現することに重点が置かれており，課題[B]の負債サイドの責任準備金等を確率的事象として詳細に分

The sensitivity analysis ALM (asset liability management) of pension fund. By *Satoshi Yamashita* (Institute of Statistical Mathematics) and *Tomoo Yato* (Nomura Research Institute).

*文部省統計数理研究所
**㈱野村総合研究所

NII-Electronic Library Service

Japan Society for Simulation Technology

析するアプローチは行われていない．これは負債サイドの年金数理計算は多くの制度的制約があり，資産サイドのような統計的アプローチが用いることが難しいからである．しかしこのことは年金ALM問題を多期間最適化問題もしくは無限期間最適化問題としてモデル化することを困難にしている（課題[C]）など，多くの実務的な問題を発生させている．

本研究では，以上の問題の解決を最終目的とするがその前段階として，負債側の年金数理計算の外生変数（基礎率等）が，ALMに対していかに影響を及ぼしているかを実験的に解明する．そしてその結果を用い，実用的な多期間最適化モデルに挿入できる簡便的な負債モデルを構築する．具体的には以下の構成をなしている．

①年金ALMの負債側モデルである年金数理計算の外生変数の性質について，ALMに対する影響の視点からモデル化を行う．

②資産モデルを構築する．その際，年金ALMの特徴をより正確に反映するよう，従来から年金ALMで用いられていた時系列モデルに修正を加える．

③資産・負債モデルを結合し，モンテカルロシュミレーションを行う．その結果，負債モデルの外生変数と掛金率の関係について把握することができる．

④以上の結果を踏まえ，年金ALMの修正・簡略化を行い，資産選択等にも利用可能なモデルを構築する．

⑤最後に，課題[C]の無限期間最適化問題へのアプローチについて概説する．

2. 負債側のモデル

年金ALMモデルのうち，本章では負債側のモデルについて説明する．具体的には，年金数理計算（掛金率計算）を行う負債モデルを，適格年金を対象に下記の前提に基づいて厳密に作成する．負債モデルは以下に説明するように，きわめて複雑なものである．3章以降の目的はこの章で説明する厳密モデルの結果に近い掛金率（給与に対する掛金の比率）を得られるような，簡略化されたモデルを作ることである．

2.1 モデルの前提条件

モデル化の前提条件は以下のようにした．それらの条件のいくつかは現実の年金ファンドに適用されているものである．

〈前提条件〉

・毎年20歳の男性が同一人数（10000人）加入する．

・第17回生命表に従った死亡率で死亡する．

・各年齢，毎年1%の自己都合退職者が出る．

・60歳で定年を迎える．

・自己都合脱退者/加入者期間中の死亡者に対して一時金を給付する．

・定年退職者に対し，15年定期年金の給付を行う．

・標準掛金の計算は，加入年齢方式に従う．

・年金給付額は「最終給与」に比例させる．

・剰余金は次回再計算（5年後）まで留保する．

・シュミレーション開始時点に過去勤務債務はないものとする．

・資金の受け払いは年央に発生する．

これらの条件をもとに年金の負債要件が計算される．具体的な計算過程は，標準掛金率→責任準備金→過去勤務債務→特別掛金率の順で算出される．（図1参照）

2.2 標準掛金率

加入年齢方式により，標準掛金率を計算する．加入年齢方式とは，「制度に新たに加入してくる標準的な被保険者について必要な費用を平準的な保険料（在職中の期間にわたり均一額あるいは給与に対する一定割合）により算出し，この保険料を在職中の被保険者全員に適用する」方式を言う．このときの保険料率を標準掛金率と言い，当初の想定通りに諸々の要件が達成されるならば，この標準掛金率で制度は維持される．

$$p=\frac{v^{x}d_{x}^{(1)}\bar{a}_{x}^{(1)}b_{x}\alpha_{x}^{(1)}+\sum_{h=2,3}\sum_{k=0}^{x_r-x_e-1}v^{x_e+k+1/2}d_{x_e+k}^{(h)}b_{x_e+k}\alpha_{x_e+k}^{(h)}}{\sum_{k=0}^{x_r-x_e-1}v^{x_e+k+(1/2)r}l_{x_e+k}b_{x_e+k}} \qquad (1)$$

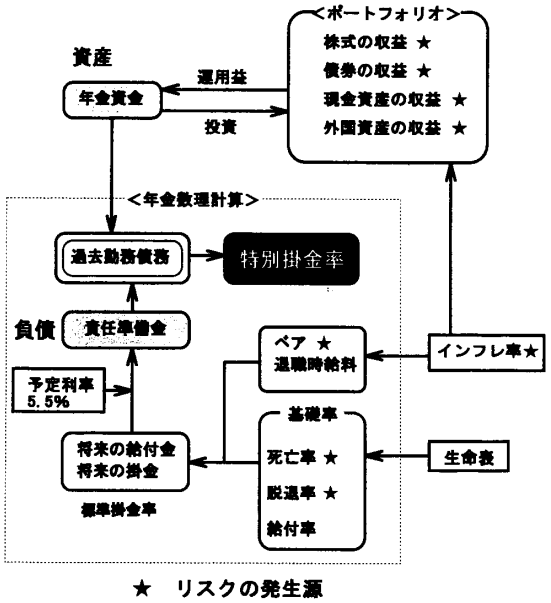

図1 年金ALMの計算の流れとリスクの発生源

NII-Electronic Library Service

Japan Society for Simulation Technology

x_e：加入年齢（＝20）

x_r：給付開始年齢（＝60）

h：脱退事由（定年：$h=1$，死亡：$h=2$，自己都合：$h=3$）

v：割引率（＝1/1.055）

l_x：x歳の残存者数

$d_x^{(h)}$：x歳の脱退事由hによる脱退数

b_x：x歳の昇給指数；$b_{xr}=1$，$b_x=1+0.05(x-x_e)$

$a_x^{(h)}$：年金現価率；$a_{xr}^{(l)}=(v^{1/2}+v^{1+1/2}+\cdots+v^{14+1/2})$

$\alpha_x^{(h)}$：死亡給付率（死亡の場合の給付率について，40歳で給付率の上昇幅が大きくなると仮定）

2.3 責任準備金

責任準備金は，将来給付現価と標準掛金収入現価の差額である．年金資金として積み立てられているべき金額を指す．

S_x：X歳の加入者（一人）に対する責任準備金

○残存者について

将来給付現価と掛金収入現価の差額が責任準備金となる．

$$S_x=v^{xr-x}\frac{d_{xr}^{(1)}}{l_x}a_{xr}^{(1)}b_{x+k}\alpha_{xr}^{(1)}+\sum_{h=2,3}\sum_{k=0}^{xr-x-1}v^{k+1/2}\times\frac{d_{xr+k}^{(h)}}{l_x}b_{x+k}\alpha_{x+k}^{(h)}-p\left(\sum_{k=0}^{xr-x-1}v^{k+1/2}\frac{l_{x+k}}{l_x}b_{x+k}\right) \quad (2)$$

p：掛金率

○60歳以上の受給者について

現在も受け取っている年金の将来給付現価が責任準備金となる．年金給付額はその者の退職時の給与に比例しているとした．

$$S_x=a_x b'_x\alpha_{xr}^{(1)} \quad (3)$$

b'_x：現在x歳の受給者の退職時の給与

○資金全体の責任準備金Sは

$$S=\sum_{x=xe}^{xr+14}S_x l_x \quad (4)$$

2.4 過去勤務債務

過去勤務債務とは，責任準備金と資産額との差額（＞0）をいい，本論文においてはマーケットの変動などで生じる積立金の不足の金額を指す．

当初は，過去勤務債務は0とおくが，次期財政計算時（5年ごとの掛金率の見直し）には運用成果の見込み違いなどの理由により，責任準備金と資産額との乖離が生じることになる．なお，本論文では本来の不足額の他，超過額も過去勤務債務とみなす．

$$B_0=0 \quad (5)$$

$$B_i=S_i-A_i \quad (6)$$

B_i：i年次における過去勤務債務

A_i：i年次における資産額

2.5 特別掛金率

過去勤務債務を償却するために標準掛金の他に特別掛金を課す．その際の給与に対する比率を特別掛金率という．定額償却方法をとる場合，特別掛金率は次のように定められる．

$$P=\frac{B}{L\cdot I}$$

P：特別掛金率

B：過去勤務債務

L：総給与（年額）

I：消却年数

年金運用の究極的目的はこの特別掛金率の発生を極力抑えることである．そのためには良好な運用実績のほか，適切なリスク管理が求められる．こうした計算は，5年ごとの財政再計算時に計算される．なお，本論文において「掛金率」という記述は特別掛金率を指す．

以上のように負債側の計算式（年金数理計算）はきわめて複雑であり，考慮すべき要因も多い．本研究では，特別掛金率などの計算結果に影響を与えるかどうかという基準で，重要度の低い要因を取り除き，その後シミュレーション実験と統計的選択により計算式の簡略化を行う．しかし，本論文では紙面の関係上，後半のシミュレーション実験による簡略化のみを解説する．なお，重要度が低いと判定された要因は，死亡率の変化，脱退率，従業員規模，新規加入者数，昇給のパターンであった．詳しい結果については矢頭・山下[3]を参照されたい．

3. 資産側とインフレのモデル

前章では負債側のモデルを説明したが，年金ALMを行うには運用結果のモデル（資産側モデル）が必要である．本章では，時系列モデルを中心に，資産側の要因と資産・負債両方に影響を与えるインフレ率のモデル化を行う．

3.1 時系列モデルの改良方法と問題点

従来の年金ALMにおいて金融マーケットに関する時系列モデルは，まずインフレ等の代表的な時系列を作成し，それを利用して他の時系列をクロスセクショナルに導くという方法が多い．しかしながら，マーケット間の相互作用を記述するには多変量ARモデル

NII-Electronic Library Service

Japan Society for Simulation Technology

の方が適当である．本研究では，株式リターン・債権利回り・コール金利・インフレ率の4変数の多変量ARモデルを作成する．

多変量ARモデルを作成するとき，変数の定常性が問題となる．債権利回りとコール金利は，金利変動が対数正規分布に従っているといわれている．そのため，対数をとってln（債権利回り），ln（コール金利）を変数として扱う方法が考えられる．この想定は，金利が負にならないという下限を有することや，上方には跳ねる（ハイパーインフレ）現象など，実際の金利変動の性質と合致する．また，多変量ARモデルでは変数が正規分布に従うと仮定するので，変換後の分布が正規分布であることは好都合である．しかしながら，インフレ率はマイナスにもなり得るので，対数をとるという方法は不適切である．

これらを踏まえて以下の節では，インフレ系列が負値もとり得ること，ハイパーインフレにもなり得ること，金利変動とのパラレルな動きをすることなどのを考慮し，金融市場のモデル化を行う．

3.2 金利・インフレ系列の正規化

(1) 正規化の方法

従来行っていた対数変換を含め，一般的にデータの変数は，変換後に簡潔な線型構造・正規性等を達成することを目的に行われる．ここでは，(1)インフレ系列に対し，ハイパーインフレを生じさせ，且つ，負値をとるような性質を持たせるという観点と，(2)多変量ARモデルを作成するならば，変数が正規分布とみなせなければならないという2つの観点から，変換の方法を考える必要がある．

このような関係を有する変換としては，Box-Cox変換がその代表例である（対数変換は，Box-Cox変換の特殊な型である．）．通常のBox-Cox変換では変換前の変数は正でなければならないが，それに替わる方法として下記の「2パラメータBox-Cox変換」を用いる．この変換はλ_1, λ_2のパラメーターにより次のように与えられる．なお，通常のBox-Cox変換はλ_2が0の場合である．

$$z=\begin{cases}\dfrac{(y+\lambda_2)^{\lambda_1}-1}{\lambda_1} & (\lambda_1\neq 0)\\ \log(y+\lambda_2) & (\lambda_1=0)\end{cases} \qquad (8)$$

変換後の変数zの分布を正規分布に近づけるようなパラメーターλ_1, λ_2を，AICに基づきもとめる．

(2) 変換パラメーターの算定

インフレ率のほか，債権利回り・コール金利についても2パラメータBox-Cox変換の検討を行った．λ_1を1～−1まで0.1刻み，λ_1は0.5刻みで変更し，変換後の分布のAICを計算し，それらのうちでAICが最小となるパラメーターを探した．結果は**表1**の通り（インフレのデータは前年同月比を用いた）．

表1 国内市場における金利・インフレ率データの2パラメータBox-Cox変換の結果

データ期間(75-93)

指標	λ_1	λ_2	変換後のAIC	原系列のAIC
債券利回り	1.0	0.0	(870.2)	870.2
コール金利	0.3	-1.5	978.8	1015.4
インフレ率	-0.3	3.0	1096.7	1198.0

債券利回りの$(\lambda_1, \lambda_2)=(1.0, 0.0)$という結果は，変換しないほうがよいという結論を意味する．

3.3. 多変量時系列モデルの作成

(1) モデルの選択

次に変換後のデータを用いて，多変量時系列モデルを作成する．モデル化に用いる多変量ARモデルは元来正規分布を前提にしているので，2パラメータBox-Cox変換後の正規化された系列は，このモデル化に適合するはずである．

多変量ARモデルの選択では，次数をいくつまでとるか（何期前のデータまで，モデルに入れるか）が問題になる．また，一般的にインフレの値は認識ラグがあるといわれている．これはインフレが他の金利指標と比較して常に遅れて変動するという性質のことをいう．そのため，本研究では「ARモデルの次数」と「インフレのラグ」を何パターンか設定して，最も説明力の高いモデルを選択することとした．使用したデータは1975～1993年の月次データである．結果は**表2**．なお，z_1は株式，z_2は債券利回り，z_3はコール金利，z_4はインフレ率である．

AICが最も低いのは，次数の2，インフレのラグは1カ月の場合であった．このときのモデルのパラメーターを式(9)にしめす．

$$\begin{pmatrix} z_{1,t}-\bar{z}_1 \\ z_{2,t}-\bar{z}_2 \\ z_{3,t}-\bar{z}_3 \\ z_{4,t-1}-\bar{z}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1.926 \\ 0.009 & 1.248 & 0 & 0.870 \\ 0.001 & 0.138 & 1.145 & 0.070 \\ 0 & 0.033 & 0.076 & 0.093 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z_{1,t-1}-\bar{z}_1 \\ z_{2,t-1}-\bar{z}_2 \\ z_{3,t-1}-\bar{z}_3 \\ z_{4,t-2}-\bar{z}_4 \end{pmatrix}$$

NII-Electronic Library Service

Japan Society for Simulation Technology

表2　ARモデルの次数とインフレラグを変化させた場合のAIC

データ期間(75-93)

	ARモデルの次数				
インフレラグ	0	1	2	3	4
0	-382.4	-2023.6	-2058.6	-2057.2	-2045.2
1	-384.3	-2018.6	-2058.8	-2056.4	-2049.7
2	-386.4	-2024.5	-2060.8	-2055.4	-2048.6
3	-381.9	-2019.0	-2058.1	-2049.5	-2043.5
4	-376.5	-2021.6	-2056.0	-2050.6	-2042.4

$$+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.009 & -0.296 & 0 & -0.614 \\ 0.001 & -0.111 & -0.227 & 0.049 \\ 0 & -0.026 & -0.076 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z_{1,t-2}-\bar{z}_1 \\ z_{2,t-2}-\bar{z}_2 \\ z_{3,t-2}-\bar{z}_3 \\ z_{4,t-3}-\bar{z}_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{pmatrix} \quad (9)$$

誤差項の分散共分散行列 G は

$$G=\begin{pmatrix} 24.025 & -0.0354 & -0.028 & 0 \\ -0.0354 & 0.061 & 0.005 & 0 \\ -0.028 & 0.005 & 0.013 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.003 \end{pmatrix} \quad (10)$$

(2)　マーケットモデルのモンテカルロシミュレーション

上記の多変量ARモデルの誤差項に正規乱数を挿入することにより，株式・債券利回り・コール金利・インフレ率の系列を仮想的に発生させる．その結果，

① 金利(債券利回り・コール金利)は負にならない，

② インフレ率が負になることもあるほか，上方に跳ねる（ハイパーインフレ）時期がある，

③ インフレ率と金利がある程度パラレルな変動をしている，

の観点から，満足のいく結果がえられた．

4. シミュレーションによる年金数理計算の簡略化

4.1 年金数理上の各要素と性質とシュミレーション上の仮定

運用リターン・ベア（インフレ）・予定利率の負債に与える影響を見る．それぞれについての，資産・負債に与える影響と，本論文での想定は次の通り．

(1)　運用リターン

年金数理計算では，運用リターンが毎年5.5%という前提をおいている．この水準に税金や信託報酬等のコストを加えた運用リターンを続けている限り，差損益が生じない．しかし実際には，運用リターンは期待通りに得られるとは限らないため，資産額の変動をもたらし，その結果資産と負債の乖離を生じさせる．

なお，実際には，時価ではなく簿価の増減が年金数理計算に取り入れられ反映されるのだが，シミュレーション上で簿価を想定しようとすると，益出しなどの投資政策と絡んで繁雑となってしまうので，本研究では時価を毎期実現させるものとする．

(2)　ベ　ア

ベアの変動は年金数理計算の直接の要因ではない．しかし，給付金額が給与額（最終給与に比例している場合が多い）を反映している場合，ベアによる給与の上昇は，将来給付現価の増加を引き起こす．また，掛金は掛金率が定まっているが，給与の上昇により掛金収入現価の増加ももたらす．そのため，本研究のようなシミュレーションにおいてはベアの変動を考慮する必要がある．実際にはインフレがそのままベアにはねるわけではないが，本研究ではシミュレーション上では「ベア＝インフレ」とする．

(3)　予定利率

予定利率（割引率）は，日本の年金制度上5.5%に固定されている．しかし，現価計算の割引率が本来運用利回り水準を反映すべきことを考えると，運用環境の変化に関わらず予定利率を一定とすることは，「現在価値」として必ずしも適正とは考えにくい．そこで，年金資金の安全性の観点からリスクを把握するために，また，今後の年金数理計算の変更にも対応できるように，予定利率が変更されると仮定したシミュレーションを行べきである．しかし，本論文では，紙面の関係上予定利率を固定した場合の計算結果を示した．予定利率を変動させた場合の計算結果については，矢頭・山下[4]にレポートとしてまとめてある．

(4)　対象資産

シミュレーションでの主要な運用資産として株式・債券・コールをここでは想定する．この3資産のリターン同士にも相互関係があるほか，予定利率と債券利回り，債券・コールのリターンとベアの間には強い相関関係がある．そのため，それぞれの影響を個別に評価することは，全体を正確に表現することにはならない．そこで，各要素を前章で構築した時系列モデルに基づき，関連付けて発生させることにする．なお，資産比率についてはいろいろなパターンを試したが，以下の章では株式30%，債券60%，コール10%の場合の

NII-Electronic Library Service

Japan Society for Simulation Technology

結果を示している．

4.2 資産・負債の近似式による感応度とその適合度合

予定利率5.5%のもとで，リターン・ベアを変動させる．そして，感応度を計算し，特別掛金率の簡便的な定式化を試みる．まず(1)では，資金の条件をやや簡便化させて，特別掛金率をTaylor展開する．そのときの係数が感応度に相当する．(2)では，Tayler展開による式の中で必要な項を選択し，定式化を行う．

(1) 数式展開による感応度の導出

資金の条件を次のようにおく．

- 5年後の，定年退職受給者に対する給付金額のうち，各年齢に対する給付金額は均等（各々1/15）とする．
- 毎年のリターンとインフレは，平均リターン・平均インフレと一致していたとする．

(5年間同じリターンとインフレであったとする．)

記号を次のようにおく（いずれもベアがなかった場合の値）．

CF：毎年のネットキャッシュフロー

CF_0：定年退職者に対する給付金額（<0）

CF_1：定年以外の退職者に対する給付金額（<0）

A_0：当初資産額＝当初責任準備金（S_0）

A_5：5年後資産額

S_5：5年後責任準備金

L：総給与

βi：前回の財政再計算から$i+1$年目に定年退職した者に対する責任準備金の責任準備金全体に対するウェイト

r：平均リターン（運用利回り）（%）

$R=1+r/100$

q：平均インフレ率（%）$Q=1+q/100$

○資産

5年後の資産は，次のような特性から求められる．

- 当初資産は，5年分のリターンで増殖する．
- 前回の財政再計算から2～5年目の定年退職者に対するキャッシュフローは，彼らが退職した年までのインフレが給付金に反映されている．
- 前回の財政再計算から2～5年目の定年以外の事由（死亡・自己都合）による退職者に対するキャッシュフローは，その事由が発生した前年までのインフレが給付金に反映されている．また，その金額は投資されている期間に応じてリターンにより増殖する．

$$A_5(r,q)=A_0R^5+\sum_{i=0}^{3}\left[CF+\sum_{j=1}^{4-i}\left\{\frac{1}{15}CF_0(Q^j-1)\right\}+CF_1(Q^{4-i}-1)\right]R^{i+1/2} \tag{11}$$

なお，2年目のアウトフローは，その年から給付を受け始めた定年退職者（60歳）に対する給付と，その年に死亡または自己都合脱退した者に対してなされた給付は，1年間のインフレの影響を受けている．また，5年目のアウトフローは，過去4年間のうちに給付を受け始めた定年退職者（60～63歳）に対する給付は1～4年間のインフレの影響を受け，その年に死亡または自己都合脱退した者に対してなされた給付は，4年間のインフレの影響を受けている．

○負債

5年後の負債は，次のような特性から求められる．

- 前回の財政再計算から1～4年目末に定年退職した者の責任準備金は，退職時までのインフレが反映されている．
- 5年目末退職者及び現加入員の責任準備金は5年間のインフレが反映されている．

$$S_5(q)=S_0\left\{\sum_{i=1}^{4}\beta_iQ^i+\left(1-\sum_{i=1}^{4}\beta_i\right)Q^5\right\} \tag{12}$$

過去勤務債務$B_5(r,q)$に対して，各要素に対する1階・2階微分値を計算する．

○資産負債の合成

なお，過去勤務債務は

$$B_5(r,q)=S_5(r,q)-A_5(r,q) \tag{13}$$

である．求めるべき特別掛金率は

$$P(r,q)=\frac{B_5(r,q)}{5L\cdot Q^5} \tag{14}$$

となる．

ここで，特別掛金率の運用リターンとインフレに対する感応度を調べる．

$$\Delta P=P(r_0+\Delta r,q_0+\Delta q)-P(r_0,q_0)$$
$$r_0=5.5\%,\quad q_0=0\%,\quad P(r_0,q_0)=0 \tag{15}$$

よって，2次のテーラー展開により，掛金率の変化はリターンとベアを用いて次のように記述される．

$$\Delta P=\frac{\partial P(r,q)}{\partial r}(r-r_0)+\frac{\partial P(r,q)}{\partial q}q+\frac{1}{2}\frac{\partial^2P(r,q)}{\partial r^2}(r-r_0)^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2P(r,q)}{\partial q^2}q^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2P(r,q)}{\partial r\partial q}(r-r_0)q \tag{16}$$

($\Delta r=r-r_0, \Delta q=q$ より)

各項の具体的なパラメータの数値は式(11)～式(14)を用いることにより求めることができる．このようにして求められた各項のパラメータを**表3**にしめす．

NII-Electronic Library Service

Japan Society for Simulation Technology

(2) シミュレーション結果との適合度

Taylor展開を用いた近似式と，2章で解説した厳密計算による特別掛金率とを比較する．具体的にはインフレ率と資産側のリターンを3章の時系列モデルによりランダム発生させ，モンテカルロ法により，厳密解と近似解の分布型を比較する．その結果を用いて，どの程度の計算精度があるのか，項はどこまで入れる必要があるのかを確認する．

前出の式16に，前提条件に従い具体的にパラメータ計算すると以下のようになる．

$$\Delta P=-2.51(r-r_0)+1.77q-\frac{1}{2}\cdot 0.11(r-r_0)^2$$

$$-\frac{1}{2}\cdot 0.11q^2+\frac{1}{2}\cdot 0.13(r-r_0)q$$

右辺の5つの項の中から様々な組み合わせで選択して掛金率推定モデルを作成する．

説明力をAICと標準誤差によって評価することによって，できるだけ少ない要因で，正確に特別掛金率を推定するモデルを選択する．

尚，次の2つの理由で，このケースでAICのみによりモデルを選択することには多少問題があるので，1つの参考指標という扱いに留めておくほうがよいであろう．

1. AICによる変数選択の結果にはデータ数が影響するが，シミュレーション結果ではいくつでもデータが複製できてしまうため，結果を恣意的に操作できる．
2. シミュレーション結果は，正規分布から偏った分布となっている．

表4は，記述の式(16)で用いた項と，そのときの誤差項に関するAICなどの統計量を示したものである．例えばcase 5は次式で特別掛金率の推定を行っていることを示す．

$$\Delta P=\frac{\partial P(r,q)}{\partial r}(r-r_0)+\frac{\partial P(r,q)}{\partial q}q \qquad (17)$$

他の給付パターンについてもほぼ同様の結果であった．AICが最も良く，推定誤差も最小なのはcase 6の場合であった．しかし，負債の変動をいかに簡略化して表記するかを重視しているため，case 5も許容されよう．統計的な判断ではないが，今後の資産選択に関する最適化問題を考えると，より簡便なcase 5のモデルを採用したい．

4.3 掛金率定式化の結論

負債の要件の掛金率に与える影響を見てきた．これによると，要件のうち，死亡率・脱退率・新規加入員数については，掛金に与える影響はかなり小さいという結論を得た．一方で，リターン・ベアは，オーダーとしても大きな影響を与えることが分かった．この結果を，今後の資産比率最適化モデルに盛り込む場合，特別掛金率の算定式は以下のように与えられる．

- リターン・インフレの値がそれぞれ$r(\%)$, $q(\%)$と

表3 Taylor展開による各項の係数

	$\partial B(r,q)$	$\partial P(r,q)$
$/\partial r$	$-5S_0R^4-CF\sum_{i=0}^{3}(i+\frac{1}{2})R^{i-\frac{1}{2}}$	$\frac{\partial B(r,q)}{\partial R}\frac{1}{100\cdot 5L}$
$/\partial r^2$	$-20S_0R^3-CF\sum_{i=0}^{3}(i+\frac{1}{2})(i-\frac{1}{2})R^{i-\frac{3}{2}}$	$\frac{\partial^2 B(r,q)}{\partial R^2}\frac{1}{10000\cdot 5L}$
$/\partial q$	$S_0\left\{\sum_{i=2}^{4}i\beta_iQ^{i-1}+5(1-\sum_{i=1}^{4}\beta_i)Q\right\}$ $-\sum_{i=0}^{2}\left\{\sum_{j=2}^{4+i}(\frac{1}{15}CF_0jQ^{j-1})+CF_i(4-i)Q^{3+i}\right\}R^{i-\frac{1}{2}}$	$\frac{\partial B(r,q)}{\partial Q}Q^{-5}\frac{1}{100\cdot 5L}$
$/\partial q^2$	$S_0\left\{\sum_{i=3}^{4}i(i-1)\beta_iQ^{i-2}+20(1-\sum_{i=1}^{4}\beta_iQ^i\right\}$ $-\sum_{i=0}^{1}\left\{\sum_{j=3}^{4+i}(\frac{1}{15}CF_0j(j-1)Q^{j-2})+CF_i(4-i)(3-i)Q^{2+i}\right\}R^{i-\frac{1}{2}}$	$\left(\frac{\partial^2 B(r,q)}{\partial Q^2}Q^{-5}+\frac{\partial B(r,q)}{\partial Q}(-10Q^{-6})\right)$ $\cdot\frac{1}{10000\cdot 5L}$
$/\partial r\partial q$	$\sum_{i=0}^{2}(i+\frac{1}{2})\left\{\sum_{j=2}^{4+i}\frac{1}{15}CF_0jQ^{j-1}+CF_i(4-i)Q^{3+i}\right\}R^{i-\frac{1}{2}}$	$\left(\frac{\partial^2 B(r,q)}{\partial R\partial Q}Q^{-5}+\frac{\partial B(r,q)}{\partial R}(-5Q^{-6})\right)$ $\cdot\frac{1}{10000\cdot 5L}$

表の見方：例えば $/\partial q$ 行、$\partial P(r,q)$ 列は、Taylor 展開後の $\partial P(r,q)/\partial q$ の項の係数が $\frac{\partial B(r,q)}{\partial Q}Q^{-5}\frac{1}{100\cdot 5L}$ であることを示している

表4 Taylor展開式のうち使用した項と，そのモデルの誤差項の統計量（株式30%）

	使用する項					AIC	Avg	Std	Max	Min
	Δr	Δr^2	Δq	Δq^2	$\Delta r\Delta q$					
Case1	○					5962.2	7.7	4.8	27.7	-8.5
Case2			○			6609.3	-5.8	6.6	10.1	-41.3
Case3	○	○				6536.2	8.4	4.7	28.1	-1.4
Case4			○	○		6748.7	-4.5	7.0	13.2	-41.3
Case5	○		○			3604.8	0.8	1.5	4.8	-10.0
Case6	○		○		○	3617.5	-0.4	1.4	1.9	-10.0
Case7	○	○	○			3909.4	1.5	1.7	8.2	-10.0
Case8	○		○	○		6330.7	2.0	2.1	13.9	-8.8
Case9	○	○	○	○		6462.6	2.7	2.3	16.9	-0.9
Case10	○	○	○	○	○	3788.3	2.2	1.6	12.0	-0.9
回帰1	○		○			3547.0	0.1	1.4	3.1	-11.1
回帰2	○	○	○	○	○	3662.4	-0.0	0.6	2.5	-1.8

NII-Electronic Library Service

Japan Society for Simulation Technology

なったとき，

$$P(r, q)=\frac{\partial P(r, q)}{\partial r}(r-r_0)+\frac{\partial P(r, q)}{\partial q}q+\varepsilon \quad (18)$$

この特別掛金率計算の方法（リターンとインフレ各々の1階微分値のみを使う）に併せて他の金額も計算する場合は，次の計算式に従うことになる．

過去勤務債務について

$$dB(r, q)=\frac{\partial B}{\partial r}(r-5.5)+\frac{\partial B}{\partial q}q \quad (19)$$

資産について

$$dA(r, q)=\frac{\partial A}{\partial r}(r-5.5)+\frac{\partial A}{\partial q}q \quad (20)$$

責任準備金について

$$dS(r, q)=\frac{\partial S}{\partial q}q \quad (21)$$

責任準備金の金額を計算することに主眼をおくならば，他にも入れるべき要素（例えば新規加入員数）がある．しかし，掛金率への影響の有無を取捨選択の判断基準としているため，このような式になる．

5. 最適運用戦略決定問題への応用

これまでの検討を通して，負債を比較的簡易に表記できるようになった．ここでの結果を資産選択最適化モデルに取り込むことによって，より実態に合った資産選択（多期間最適化）モデルを作成したい．その手段としては，以下のような方法が考えられる．

掛金率の関数を直接目的関数に盛り込んで定式化して，その最適化計算を行う．イメージ的には下の式のように，掛金率についてのパラメーターが，リターンやインフレ率等のパラメーターの関数で表され，それに対する効用を最大化する．リターンが運用戦略の関数であるので，効用を最大化する運用戦略を探す最適化問題となる．

$$\max_{w} U\{\mu_p(\mu_r(w), \mu_q), \sigma_p(\sigma_r(w), \sigma_q)\} \quad (22)$$

U：効用

μ_p, μ_r, μ_I：それぞれ，掛金率，運用リターン，インフレ率の期待値

$\sigma_p, \sigma_r, \sigma_I$：それぞれ，掛金率，運用リターン，インフレ率の分散（リスク）

w：資産配分比率もしくは運用戦略

このような枠組みのなかで，いろいろなALMモデルのバリエーションが考えられる．とくに数学的に重要なのは，投資期間の設定である．1章で取り上げた課題[C]に関することだが，永続性を前提とした年金資金の運用戦略決定問題には，投資期間を無限大とした定式化が必要である．しかし，現在供給されているモデルは多期間・有限期間のモデルであり，無限期間を前提としたモデルの開発は今後の課題となっている．投資期間の無限化に関するひとつのアイデアとして有力なのはMDP（Markov Decision Process）を用いたアプローチである．MDPはもともと，無限期間を前提とした動的最適化問題である．しかし，状態を表す制約条件が離散であることと，目的関数に複雑な式をおくことが不可能であることなどの理由から，金融関係のモデルにはあまり用いられてこなかった．わずかに基礎的なmean-varianceモデルが提案されているだけである[5),6)]．しかし，年金の性質を考慮すると，MDPは議論の価値があるアプローチであると考えられる．しかも，本研究により得られた，簡略な年金計算式はMDPの効用関数として利用可能なものである．年金の多期間モデルに関する分類・評価と，本研究の結果を用いたMDPについては報告資料[7)]においてまとめてあるので，興味のある読者は参照されたい．

参考文献

1) 田中周二，乾　孝治：年金ALMの展望―我が国の企業年金制度への適用可能性，ニッセイ基礎研究所調査月報，vol. **1994**-3, (1994)
2) 渡辺幹文：企業年金の運用目標，年金資金運用研究センターレポート，年金資金運用研究センター（1994）
3) 矢頭智夫，山下智志：年金ALMにおける感度分析と掛金率計算の簡略化，第11回応用経済時系列研究会報告集，Ⅱ-1/Ⅱ-20 (1995)
4) 矢頭智夫，山下智志：年金ALMにおける感度分析と掛金率計算の簡略化(Ⅱ)，The Institute of Statistical Machematics Research Memorandum, **545** (1995)
5) Sobel, M., J.: Mean-Variance Tradeoffs in an Undiscounted MDP, Operations Research, **42**-1, 175/183 (1994)
6) Kawai, H.: A variance minimization problem for a Markov decision process , European Journal of Operational Research, **31**, 140/145, (1987)
7) 矢頭智夫，山下智志：MDPによる年金ALMの無限期間最適化問題，The Institute of Statistical Mathematics Research Memorandum, **577** (1995)

NII-Electronic Library Service