

弾性波の FD-TD 法解析における自由境界条件の設定について†

佐藤 雅 弘*・西 塚 典 生*

ABSTRACT We have proposed a new setting of the elastic free boundary in numerical analysis of elastic waves by FD-TD method. When we only let the stress be zero at the discretized points on the free surface, the velocity of the surface acoustic wave does not correspond to the analytical theory. We found out that it is necessary to decrease the density factors in the neighborhood of the points. This conception is interpreted by the analogy with electric distributed circuit theory. Using this setting, we have successfully calculated a surface wave by FD-TD method.

1. ま え が き

最近、電磁界の分野で FD-TD (finite difference time domain) 法を用いた非定常数値解析の試みが増えて¹⁾いる。弾性波の解析は、J. Virieux らによって地震波解析の手段として提案されている²⁾。筆者のうち佐藤は、弾性体だけでなく³⁾、新たに圧電体の数値解析にも、FD-TD 法を適用した⁴⁾。

FD-TD 法は、次のような特徴を持つ。即ち、陽的解法であること、定式化が簡単であること、すべての変数を用いるので境界条件の適用が容易になること、等価回路アナロジーを当てはめやすいこと等がある。

本報告で我々は、FD-TD 法における、自由境界条件の設定について考察している。従来の弾性波解析に用いる差分法は、容量節約のため変位のみの波動方程式を解くものであった。その際、自由境界条件は、解析領域の外側に仮想の離散点を設け、境界上で応力が零となるように、仮想境界上の離散点の値を決めるという方法で設定される⁵⁾。しかし、その場合、仮想境界上で、角に位置する格子点の値を決めるのが難しい。また、余分な記憶容量を必要とし、定式化も煩雑である。その点を改良するため、パネと重りのアナロジーを利用したモデル (質点系モデルと呼ぶ)⁶⁾や、境界上のみ、有限要素法を利用したもの⁷⁾などが提案されている。しかし、質点系モデルは、物理的に明確な対応をつけにくく、また、有限要素法を使う方法は、定式化が最も煩雑である。

Setting of Free Boundaries in Numerical Analysis of Elastic Waves by FD-TD Method. By Masahiro Sato and Norio Nishizuka (Faculty of Engineering, Toyama University).

*富山大学工学部電気電子システム工学科

†1999年10月12日受付 2000年1月13日再受付

本報告で我々は、FD-TD 法における自由境界条件の設定法について述べている。FD-TD 法は、全変数を定式化に利用する。従って、自由境界条件は、自由表面上にある応力格子点の値を零にすればよいように思われる。しかし、そのような設定は、表面波速度が遅くなるなどの不都合性を持つ⁸⁾。

そこで、FD-TD 法において、物理構成式の全変数を利用する点と、等価回路表示が可能な点を利用して、我々は新たな自由境界の設定法を提案する。すなわち、我々は、弾性波動場を電氣的分布等価回路網としてとらえ、モビリティ類推における L 形回路を利用して、自由境界条件を満足するように設定した。その結果、解析的予測と一致する計算値が得られた。

2. FD-TD 法による定式化

固体内弾性波の基本式は、フックの法則と運動方程式である⁹⁾。ここで、我々は、2次元半無限問題を使って、FD-TD 法の定式化を説明する。半無限面は y 方向に一樣な x - z 面とする。但し、固体は等方体とし、等価回路表示のため、応力に負号を付けたものを変数として持つ¹⁰⁾。

次に示す式(1)はフックの法則を表している。その第1式は、FD-TD 法により式(2)のように定式化される。

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} -T_1 \\ -T_3 \\ -T_5 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} c_{11} & c_{13} & 0 \\ c_{31} & c_{11} & 0 \\ 0 & 0 & c_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \\ \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} \\ \frac{\partial \dot{u}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2\Delta d}{2\Delta t} [\{-T_1^{n+1}(i+1, k)\} - \{-T_1^{n-1}(i+1, k)\}] \\ &= -c_{11}\{\dot{u}^n(i+2, k) - \dot{u}^n(i, k)\} \\ & \quad -c_{13}\{\dot{w}^n(i+1, k+1) - \dot{w}^n(i+1, k-1)\} \quad (2) \end{aligned}$$

ここで、 $\dot{u}, \dot{w}$ は、 x および z 方向の粒子速度、 T_1, T_3 は垂直応力、 T_5 はせん断応力を示す。これらは、応力テンソルと $T_1=T_{xx}, T_3=T_{zz}, T_5=T_{xz}$ という関係を持っている。 i, k は整数でそれぞれ x, z 方向の離散点の番号、 n は時間ステップ、 $\Delta d, \Delta t$ はそれぞれ空間離散間隔と時間離散幅である。また c_{ij} はスチフネスでその下つき数字は、スチフネスの行列要素番号を表す。

また、次に示す式(3)は運動方程式である。その第1式は、(4)のように定式化される。

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial(-T_1)}{\partial x} + \frac{\partial(-T_5)}{\partial z} \\ \frac{\partial(-T_3)}{\partial z} + \frac{\partial(-T_5)}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \rho \frac{2\Delta d}{2\Delta t} \{\dot{u}^n(i, k) - \dot{u}^{n-2}(i, k)\} \\ &= -[\{-T_1^{n-1}(i+1, k)\} - \{-T_1^{n-1}(i-1, k)\}] \\ & \quad -[\{-T_3^{n-1}(i, k+1)\} - \{-T_3^{n-1}(i, k-1)\}] \quad (4) \end{aligned}$$

式(2)、(4)と残りの z 座標方向の式から、我々は、応力および粒子速度を Δt ごとに交互に計算できる。

3. 自由境界の設定法

自由境界の設定について、本報告は、等価回路をもとに議論を進める。等価回路による考察は、数学的考察よりも直感的に理解しやすい。しかし、この方法は、数学的厳密さに欠ける点は否めない。数学的考察は、後日報告したい。

フックの法則と運動方程式は、電信方程式と相似な形をしている。従って、それらの法則は、分布等価回路表示が可能である。そして、その基本回路要素は、図1のようになる¹⁰⁾。図中 s_{ij} は、コンプライアンスで、スチフネスの逆マトリックス要素である。図1の各節点および枝に、その点の電圧に当たる弾性波の変数と、弾性体の定数に対応する回路素子を示す。この回路は、弾性波を解析する基になる微分方程式(1)、(3)の空間微分を、中心差分で近似している。

x および z 方向の離散間隔は、任意にとれる¹⁰⁾。しかしここでは簡単のため、離散間隔は、みな同じ Δd の正方格子としている。また、節点間にジャイレータを挿入し、粒子速度を電圧として持つ‘粒子速度節点’

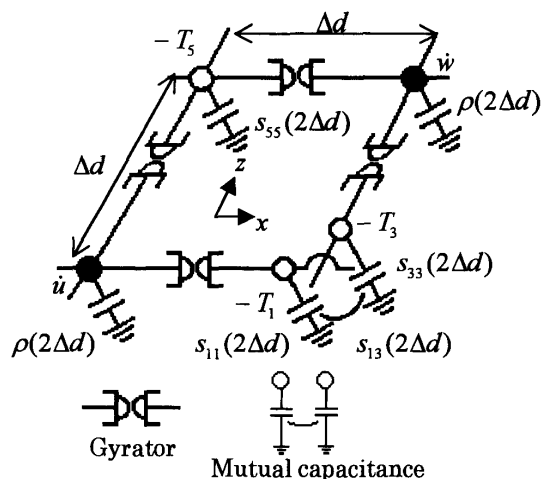


図1 Fundamental unit of the 2-dimensional distributed circuit for an elastic wave. Here, the solid is assumed to be isotropic and to be placed in a x - z plane strain field.

側は、モビリティ類推、応力を電圧として持つ‘応力節点’側は、インピーダンス類推となっている。モビリティ類推とは、粒子速度を電圧に、応力を電流に対応させて等価回路表示することをいい、インピーダンス類推とは、逆に応力を電圧に、粒子速度を電流に対応させることをいう。また、ジャイレータは、片方の電圧をもう一方の端子電流に、また電流を電圧に変換する素子である。隣り合う節点の電圧に当たる弾性波変数は、粒子速度と応力という異なった物理量である。従って、ジャイレータは、隣り合う節点同士の整合をとるべく挿入された。以上の等価回路上の操作は、節点に負荷される回路素子が、全て容量で表現できるようにし、回路を見やすくするためのものである。

まず、自由表面は、図1の等価回路で表す。そして、単純に表面上の応力節点を短絡する。そこで、 z 方向粒子速度節点とせん断応力節点が自由表面に置かれたとする。その自由表面での様子が、図2に示されている。 z 方向粒子速度節点は、自由表面とその外側に伸びる枝を開放にする。せん断応力節点は短絡するので、その下の x 方向粒子速度節点の、 z 方向に伸びる枝は、開放される。

次に、基本的な空間1次元線路からの類推による、自由表面の設定について説明する。そこでまず、 z 方向1次元細棒に伝わる圧縮波動について考察する。これには次のような微分式が成り立つ。

$$s_{33} \frac{\partial(-T_3)}{\partial t} = -\frac{\partial \dot{w}}{\partial z} \quad (5)$$

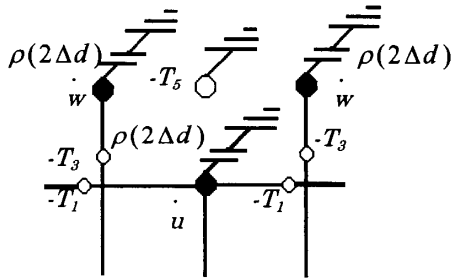
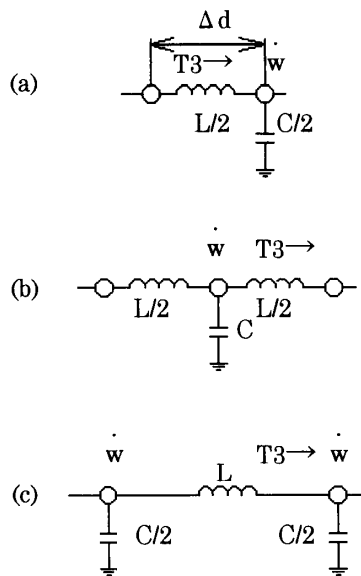


図2 Setting of a free boundary in the analysis by FD-TD method. The stress ($-T_3$) nodes are shorted and particle velocity nodes are opened at the free boundary.



$$L = 2s_{33}\Delta d, \quad C = \rho 2\Delta d$$

図3 Fundamental distributed circuits of a 1-dimensional z -direction compressible wave in a thin bar on the mobility analogy. (a) L-type circuit. (b) T-type circuit. (c) π -type circuit. $\dot{w}$ is particle velocity in the z direction; $-T_3$ compressible stress in the z direction; s_{33} compliance; ρ density.

$$\rho \frac{\partial \dot{w}}{\partial t} = - \frac{\partial (-T_3)}{\partial z} \quad (6)$$

これらの式は、電信方程式と同じ形をしているので、電氣的分布等価回路で表すことができる。式(5)、(6)に対する分布定数回路の基本回路は、図3(a)、(b)、(c)に、集中定数回路素子で表わされている。それぞれ、図3(a)は、最も基本となるL形回路、図3(b)は、T形回路、図3(c)は、 π 形回路である。ここでは、電圧は粒子速度 $\dot{w}$ 、電流は応力 $-T_3$ に対応する。こ

れは、先に述べた、モビリティ類推である。それぞれが、式(5)、(6)の空間微分を差分近似したものとすると、L形回路は前進または後退差分で Δd の1次の、T形・ π 形回路は、中心差分で Δd の2次の近似である。即ち、それら全てが、式(5)、(6)の空間近似となっている。

さて、それらをつなぎ合わせた分布回路の両端は、何らかの負荷で終端される。開放のときは、終端は π 形回路、短絡のときには終端は T 形回路である。もしくは、 π 形、T 形は念頭に置かず、終端に適当な L 形回路が接続される。これは、T 形回路端子を開放、または π 形回路端子を短絡すると、その部分で $L/2$ または $C/2$ の素子が無効となってしまう、端部で、式(5)、(6)の微分方程式の近似となくなってしまうからである。固体の自由境界は、T 形・ π 形とも開放となる。従って、自由境界は π 形が適している。

以上の1次元分布回路の考え方が2次元にも成立すると仮定して、我々は議論を進める。そこで例として、我々は、等方弾性体の平面歪み (x - z 平面) 問題を等価回路アナロジーで考察する。

2次元の場合、回路の型は、応力 ($-T$) を中心に考えれば π 形、粒子速度 ($\dot{u}, \dot{w}$) を中心に考えれば、1次元の場合の T 形にあたる。我々ここで、 π 形、T 形の基本要素となる L 形回路を用いて説明する。この場合の L 形回路は、図4に示したものである。これは、各節点の回路素子を4等分 ($-T_1, -T_3$ では2等分) して、割り振った分布線路である。ここで、図4(a)は、 $-T_1, -T_3$ を含む場合、図4(b)は、 $-T_3$ を含む場合である。これを x, z 方向に4本つなぎ合わせて回路網を構成する。例えば、粒子速度 $\dot{w}$ を中心とした基本回路 (2次元 T 形回路に当たる) は、図5のように、4本の L 形回路をつなぎ合わせたものとなる。これは、TLM (transmission line matrix) 法や SNM (spatial network method) において、1次元分布線路を4本つなぎ合わせたものと等価であり、その妥当性は既に確認されている¹¹⁾。ところで、図1の2次元回路の場合、L 形回路の速度は、実際の2次元波動速度と異なる。しかし、その L 回路を図1のように組み合わせることで、2次元回路は、本来の波動速度になる¹¹⁾。

さて、2次元の分布等価回路が、先に議論した1次元の場合と同じと仮定すれば、図4の半区間回路は、どの場所でもフックの法則とニュートンの法則の空間近似となるべきである。但し、弾性定数や密度の値は

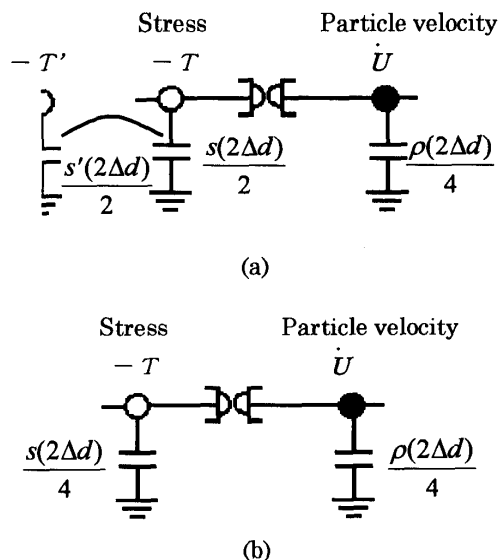


図4 L-type circuit element of the 2-dimensional elastic wave shown in Fig. 1.

- (a) In case the circuit contains the node at which compressible stresses $-T$ and $-T'$ correspond to voltage.
 (b) In case the circuit contains the node at which shear stress corresponds to voltage.

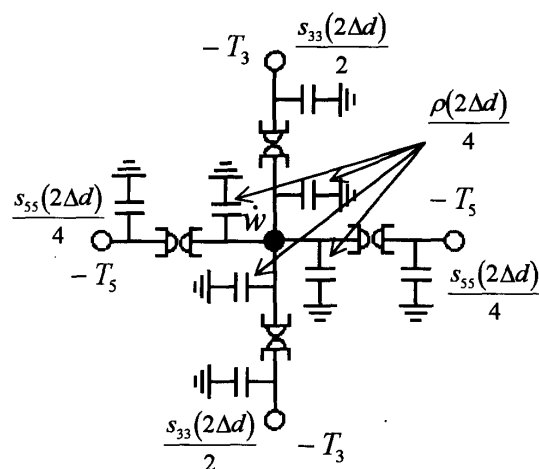


図5 The node, at which the voltage corresponds to particle velocity $\dot{w}$ in the z -direction, is constructed by the 2-dimensional L-type circuits in Fig. 4.

異なる。従って、自由境界条件は、モビリティ類推における粒子速度節点を、開放とすれば実現できる。

自由境界を実現するとき、L形回路の粒子速度節点が、自由表面に置かれる。従って、図5のようにL形回路をとりはずしたものが、図6である。この場合の、粒子速度節点の容量は、 $\dot{w}$ 節点で $(1/4) \times \rho 2\Delta d$,

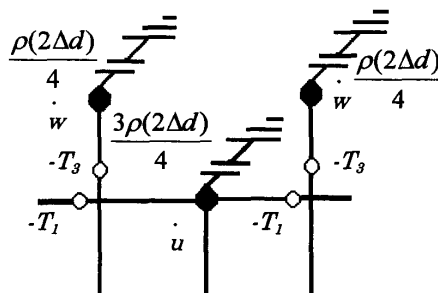


図6 New setting of a free boundary in the analysis by FD-TD method. The proposed free boundary setting, where the particle velocity nodes of L-type circuits are opened.

$\dot{u}$ 節点で $(3/4) \times \rho 2\Delta d$ (L形回路が3つつながっている。) となる。従って、自由表面の粒子速度節点は、次のように定式化される。

$$\frac{\rho}{4} \frac{2\Delta d}{2\Delta t} \{ \dot{w}^n(i+1, 0) - \dot{w}^{n-2}(i+1, 0) \} = -[\{ -T_3^{n-1}(i+1, 1) \}] \quad (7)$$

$$\frac{3}{4} \rho \frac{2\Delta d}{2\Delta t} \{ \dot{u}^n(i, 1) - \dot{u}^{n-2}(i, 1) \} = -[\{ -T_1^{n-1}(i+1, 1) \} - \{ -T_1^{n-1}(i-1, 1) \}] - [\{ -T_5(i, 2) \}] \quad (8)$$

一方、先に述べた、ただ単に、応力節点の値を零とし、粒子速度節点を短絡したものは、図2から以下のように定式化される。

$$\rho \frac{2\Delta d}{2\Delta t} \{ \dot{w}^n(i+1, 0) - \dot{w}^{n-2}(i+1, 0) \} = -[\{ -T_3^{n-1}(i+1, 1) \}] \quad (9)$$

$$\rho \frac{2\Delta d}{2\Delta t} \{ \dot{u}^n(i, 1) - \dot{u}^{n-2}(i, 1) \} = -[\{ -T_1^{n-1}(i+1, 1) \} - \{ -T_1^{n-1}(i-1, 1) \}] - [\{ -T_5^{n-1}(i, 2) \}] \quad (10)$$

すなわち、自由表面上の粒子速度節点 $\dot{w}$ と $\dot{u}$ の容量は、ともに $\rho 2\Delta d$ のままである。従って、L形回路における微分式の密度定数は、図4で仮定した値よりも大きくなる。弾性波の位相速度は、(スチフネス÷密度)を1/2乗した形となるので、表面付近では、位相速度は、解析的な値より遅くなると予測される。

4. 自由表面における弾性表面波の解析

自由表面の境界条件設定の結果を確認するため、我々は、図7のような設定で計算を行った。解析領域は、半無限平面歪み場とし、左辺は対称面、上辺は自由、右辺と下辺は1次の吸収境界である。入力正弦波

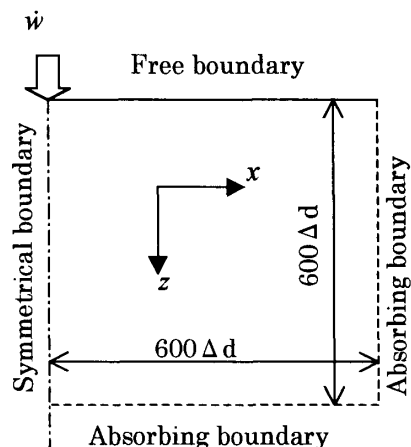


図7 Analysis model to confirm the validity of our proposal on free boundary.

表1 解析に用いた媒体定数と計算した表面波速度

	c_P/c_S	c_R/c_S
解析値	$\sqrt{3}$	0.9194
図8(a)	$\sqrt{3}$	0.8868
図8(b)	$\sqrt{3}$	0.9076

信号は、自由表面上の $\dot{w}$ 節点の1部に加えられた。波源は、自由表面の対称面上から向かって右側の5カ所に入力され、全て同相である。振幅は対称面から1.0, 0.85, 0.5, 0.15, 0.0である。これは、入力点の最後の $\dot{w}$ と、それと隣り合う自由表面の $\dot{w}$ の値との間に、ギャップが少なくなるように設定されたものである。

媒質定数は、表1に示されている。表の c_P , c_S , c_R はそれぞれ縦波、横波および弾性表面波の速度である。粒子速度に $\sqrt{\rho c_{11}}$ をかけて規格化したため、密度は計算に入っていない。また計算条件は $c_P/(\Delta d/\Delta t) = 0.5$ である。

ここで、解析領域は $600 \Delta d \times 600 \Delta d$ 、入力正弦波の周期は $100 \Delta t$ である。表面波速度は、その最初のピークを時間ごとに追っていくことで求められた。

その結果は、解析値とあわせて表1に示されている。図8(a), (b), 図9(a), (b)は自由表面上の粒子速度 $\dot{u}$ と $\dot{w}$ の計算結果である。図8, 図9とも、(a)が自由表面上の応力節点を短絡しただけで、隣り合う粒子速度節点にそのまま $\rho(2\Delta d)$ を残したもので、(b)が図4のL形回路を念頭において、設定したものである。

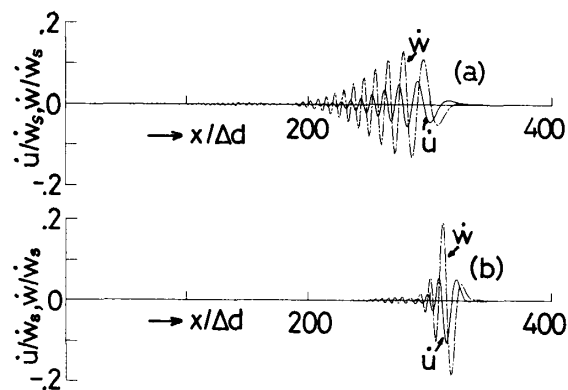


図8 Calculated results of the particle velocity $\dot{u}$ and $\dot{w}$ on the free surface, when one period sinusoidal particle velocities $\dot{w}_s$ are induced on the free boundary. The time period of the input signal is $100 \Delta t$. Time step is 1200. A number of discretized points on 2-dimensional field is 600×600 .

(a) T_3 stress nodes are shorted on the free surface (Fig. 2).

(b) Particle velocity nodes $\dot{u}$ and $\dot{w}$ are opened on the free surface shown in Fig. 5.

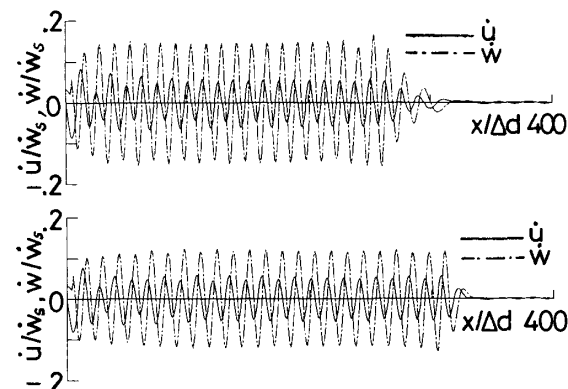


図9 Calculated results of the particle velocity $\dot{u}$ and $\dot{w}$ on the free surface. The solid line is $\dot{u}$, and the dotted line is $\dot{w}$. The input signal is a sinusoidal particle velocity $\dot{w}_s$, the time period is $100 \Delta t$, being induced on the free surface for 25 period times. Time step is 1200. The number of discretized points on 2-dimensional field is 600×600 .

(a) T_3 stress nodes are shorted on the free surface (Fig. 2).

(b) Particle velocity nodes $\dot{u}$ and $\dot{w}$ are opened on the free surface shown in Fig. 5.

図8(a), (b)は、 $100 \Delta t$ の正弦波1周期分のパルスを入力したときの解析結果である。表面波速度は、表1より図8(a)の場合の方が明らかに遅く(解析値の約3.5%)、また、立ち上がり時間も遅い上に、長く尾を引いている。一方、図8(b)の解析結果における表面波の速度は、表1より解析値の約1.3%の違いにおさまっている。また、波形も他の文献の解析結果によく

似ている⁵⁾。

一方、図9(a), (b)は、周期100 Δt の連続正弦波を25周期分入力したときの解析結果である。図8と同様に、図9(a)の方が、表面波の位相速度が遅い。また、立ち上がり時間も大きい。更に、図9(a)の粒子速度 $\dot{w}$ の定常部における振幅は、図9(b)に比べ大きい。これらの現象は、図9(a)の方が、慣性が大きいと考えられる。従って、図9(a)において、その表面波の位相速度が解析的予測とあわない原因は、表面上での質量が大きすぎるためであると予測される。

5. む す び

我々は、FD-TD法によって弾性波を解析する場合の自由表面設定の仕方について考察した。即ち、その設定法は、分布等価回路アナロジーから、自由表面上にL形回路の粒子速度節点を配置し、その節点を開放することである。その結果、表面波の挙動が、理論的予測に近づいた。

分布定数回路とFD-TD法の関連性について有益な御示唆を頂いた北海道大学電子科学研究所永井信夫教授並びに同大学院工学研究科吉田則信助教授に深謝申し上げます。

参 考 文 献

- 1) 山下榮吉編著：電磁波問題解析の実際，電子情報通信学会，東京（1993）
- 2) J. Virieux: P-SV wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite-difference method, *Geophysics*, 51-4, 889/901 (1986)
- 3) M. Sato: Fundamental investigation of shear and surface elastic waves in soft biological tissues by numerical simulation, *Jpn. J. Appl. Phys.*, 34-1-5B, 2808/2811 (1995)
- 4) Y. Yamada and M. Sato: Application of extended finite-difference time-domain method to two-dimensional dynamic analysis of a piezoelectric vibrator, *Jpn. J. Appl. Phys.*, 37-1-1, 255/256 (1998)
- 5) 佐藤泰夫：弾性波動論，岩波書店，東京（1978）
- 6) 春海佳三郎，五十嵐高，斎藤鉄夫：ポテンシャルを持つ質点系モデルによる弾性波の数値実験，非破壊検査，27-12, 807/816 (1978)
- 7) 大槻 明，春海佳三郎：地震時の大規模地下空洞周辺の波動伝播機構，土木学会論文報告集，339, 227/230 (1983)
- 8) 佐藤雅弘：分布等価回路を念頭においた固体の弾性波の数値過渡解析，騒音・振動研究会資料，N-95-39, 1/6 (1995)
- 9) B. A. Auld: *Acoustic Fields and Waves in Solids I*, John Wiley & Sons (1973)
- 10) 佐藤雅弘：圧電体の分布定数回路表示，音響誌，51-6, 437/447 (1995)
- 11) 佐藤雅弘，吉田則信：空間回路網法による振動・弾性

体応答シミュレーション，超音波テクノ，5-12, 29/34 (1993)

- 12) 桑原邦郎：計算結果を見る一流れのシミュレーションとその可視化一，電子情報通信学会誌，77-7, 752/756 (1994)
- 13) 佐藤雅弘，吉田則信，深井一郎：Bergeron法による弾性波時間応答解析法の自由境界問題への適用，電子情報通信学会論文誌 A, J71-A, 1991/1994 (1988)

付録：FD-TD法と他の差分による定式化との比較

ここで、我々は、FD-TD法と他の陽的差分法との簡単な比較をする。解析空間は2次元とし、比較対象は、1離散点の計算容量と演算数とする。

1. FD-TD法

1.1 計算容量

FD-TD法は、1離散点に1変数に対応させている。しかし、4離散点上に5つの異種類の変数 ($\dot{u}$, $\dot{w}$, T_1 , T_3 , T_5) が交互に並んでいる。従って、その4離散点 (5変数) をあわせて考える必要があると思われる。

時間は、現在と過去の2種類必要なので、 $5 \times 2 = 10$ 個の容量が必要である。実際には、FORTRAN等の計算言語では、 $A(i) = A(i) + \dots$ という演算が許されるので、最小5個の容量で済む。

1.2 計算量

ここで、我々は、1回あたりの計算量を考察する。式(2)および式(4)から、左辺の定数は右辺にまとめられ、左辺の第2項は、右辺に移される。また、式(4)の右辺の括弧を1つはずせば、 T_1 , T_3 はひとまとめになる。すると、応力の計算は、かけ算が2回、引き算が3回、粒子速度の計算は、かけ算が1回、引き算と足し算をあわせて4回となる。同様に、式(1)の第2, 第3式、および式(3)の第2式が定式化されると、全体で、かけ算は7回、足し算、引き算は20回となる。

2. 変位を使った中心差分による差分式化

2.1 計算容量

旧来から用いられている、変位のみの波動方程式に中心差分を適用する方法³⁾ (簡単のため「差分法」と表記する) を例に取る。 u , w を x および z 方向の変位とすれば、等方弾性体の2次元波動方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_P^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (c_P^2 - c_S^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + c_S^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c_S^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (c_P^2 - c_S^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + c_P^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (\text{A.2})$$

ここで、 c_P , c_S は、それぞれ縦波および横波速度である。

この式の2階微分は、次のような中心差分で近似される。

$$\frac{\partial^2 f_{0,0}}{\partial k^2} = \frac{1}{(\Delta k)^2} (f_{1,0} - 2f_{0,0} + f_{-1,0}) \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial^2 f_{0,0}}{\partial l \partial m} = \frac{1}{4(\Delta h)^2} (f_{1,1} - f_{1,-1} - f_{-1,1} + f_{-1,-1}) \quad (\text{A.4})$$

ここで、 f_{ij} は、離散点 i, j (整数) における値を示す。 k, l, m は、任意の座標、 $\Delta k, \Delta h$ は任意の離散間隔である。以上の式から、我々は、1離散点に必要な計算容量を見積もることができる。1離散点に2つの変数 u, w があり、時間離散化に式(A.3)を使えば、1変数当たり3つのメモリが必要である。従って、1離散点は、 $2 \times 3 = 6$ 個のメモリが必要である。FD-

TD法で述べた、計算言語の性質を利用すると、時間メモリが1つ減るので、最小量は $2 \times 2 = 4$ 個となる。

2.2 演算量

次に、1離散点での計算量を見積もる。すると、かけ算は12回、足し算、引き算は24回となる。

2.3 自由境界条件の設定

「差分法」は、応力成分を計算しない。そこで、自由境界上で垂直応力とせん断応力が別途、定式化に加わり、それが零となる。例えば、 z 方向に垂直な面 $z=z_0$ が自由とすると、自由境界上で次の条件が成り立つ。

$$T_5(x, z_0) = c_{55} \left(\frac{\partial u(x, z_0)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, z_0)}{\partial x} \right) = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$T_3(x, z_0) = c_{13} \left(\frac{\partial u(x, z_0)}{\partial x} \right) + c_{33} \left(\frac{\partial w(x, z_0)}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{A.6})$$

これに中心差分を適用すれば、微分式は、次のように近似される。

$$c_{55} \left(\frac{u(x, z_0 + \Delta z) - u(x, z_0 - \Delta z)}{2\Delta z} + \frac{w(x + \Delta x, z_0) - w(x - \Delta x, z_0)}{2\Delta x} \right) = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$c_{13} \left(\frac{u(x + \Delta x, z_0) - u(x - \Delta x, z_0)}{2\Delta x} \right) + c_{33} \left(\frac{w(x, z_0 + \Delta z) - w(x, z_0 - \Delta z)}{2\Delta z} \right) = 0 \quad (\text{A.8})$$

ここで、 $z > z_0$ を弾性体内部、 $z < z_0$ を自由空間とすれば、 $z_0 - \Delta z$ は、自由空間に設けた仮想点となる。この仮想点の値を求められれば、自由境界条件が実現される。

3. FD-TD法と「差分法」との比較

3.1 計算容量と計算量

FD-TD法は、「差分法」に比べ、必要最小メモリが $5/4 = 1.25$ 倍、演算量はかけ算が $7/12 = 1/1.7$ 倍、加減算が $20/24 = 1/1.2$ 倍となる。従って、FD-TD法は「差分法」に比べ、必要メモリは若干大きい、演算量は少ないことがわかる。

(FD-TD法は、弾性波の全変数を計算する。そのことから想像される容量や演算よりは、ここで計算された容量や演算は、かなり少ないと感ぜられる。)。両者は、より高次の近似式で定式化することもできる。しかし、必要メモリや演算量は増える。

3.2 自由境界の実現

FD-TD法は、式(7)、(8)のように、自由境界の式の方が、弾性体内部の式よりも簡単である。しかし、「差分法」は、仮想離散点を自由空間に設ける必要があり、自由境界条件を実現する式も、弾性体内部の計算式とは異なる。更に、角の仮想点の値を決めるために、何らかの工夫が必要である。従って、自由境界が複雑な曲線形状をしている場合、その形状近似は難しい。最近では、座標変換によって、曲線形状を直線状に変換して計算する方法が採られることがある。これは、FD-TD法にも適用できる。しかし、その方法は、座標変換に手間がかかる上、それによって計算結果に入る誤差は明確でない。また、曲線形状を、階段状に近似しても、十分に離散点を取れば、実用上問題のない計算結果が得られるという報告がある¹²⁾。

3.3 その他の手法

「差分法」に近い手法として、「質点系モデル」による計算法がある⁶⁾。これは、質点とバネで、弾性体を近似するもので、内部の計算は「差分法」に近いが、自由境界は、FD-TD法のように簡便である。しかし、このモデルが正しく弾性体を近似しているかは、明確ではない。実際、自由境界上の表面波の計算結果は、「差分法」とわずかに異なるという報告がある¹³⁾。また、境界近傍で有限要素法(FEM)で定式化し、弾性体内部は「差分法」あるいは「質点系モデル」で計算する方法が提案されている⁷⁾。しかし、FEMの部分は、定式化に手間がかかり、更に、大きな連立方程式を解く必要がある。

その他に、時間微分を陽的差分で近似したFEMや境界要素法が利用されることがある。両者とも、境界をなめらかに近似できる利点があるが、定式化は、かなり煩雑で、更に大規模な連立方程式を解く必要がある。