

SPH 粒子法による構造解析 (3次元弾塑性解析手法の検討)[†]

宋 武 燮*・酒 井 讓*・山 下 彰 彦**

ABSTRACT In recent years particle methods have been recognized as useful tools for structural analysis as well as liquid problems. SPH (Smoothed particle hydrodynamics) method which was proposed in early 1980s, has been considered for a long years as a special technique for solving super high velocity collision problems however it has many possibilities to use general structural analyses (elastic-plastic, dynamic fracture and large deformation problems). In this paper we proposed elastic-plastic analysis procedure (Dp matrix method) to apply SPH particle method in three dimensions. The result show that plastic analysis by particle method has good accuracy and is convenient to analyze 3 dimensional structural problems.

1. はじめに

粒子法は固体や流体などの連続体の物理量を、分散された評価位置に重み関数を用いて内挿する新しいシミュレーション手法である。粒子法と称される手法は流体解析、固体解析においてすでに10種類近く提案され、その開発は現在かなり活発に行われている。著者らは、このうち固体の数値シミュレーション（構造解析）に用いられるSPH（Smoothed Particle Hydrodynamics）^{1,2)}に着目しその実用化への研究に取り組んでいる。

さてSPH法を構造解析に適用するところみはほぼ十年来続けられているが、それらは宇宙構造物とスペースデブリの超高速衝突問題などにみられる、超高速破壊問題への応用³⁾がほとんどである。これは従来のメッシュ依存型解析手法（FEM）では材料の破砕シミュレーションが難しい点や、衝突物体が原型を留めぬほどの大変形をする場合、解析続行のためのリメッシュができなくなるなど、致命的な問題を有するのに対し、粒子法が比較的有効なシミュレーションを可能とするためであったといえる。構造物を粒子の集合

体と考える粒子法はラグランジェ運動方程式で記述されたメッシュ非依存型解法であり、構造物の破砕化や超大変形問題にきわめて大きな柔軟性をもっている。

SPH法構造解析は上記のような超高速破壊に対処するための特殊解法として主として用いられてきたが、見方を変えれば、解析を節点（評価点）ベースでおこなえる有力なメッシュレス手法であり、より一般的な構造解析手法として利用できる可能性も考えられる。すなわち、有限要素法におけるコネクティビティ・データは不要で評価点における物理量がラグランジェ運動方程式を用いた一般化座標系で表現されているため、自由な変形を解析できかつ複雑な3次元構造物などのデータ作成がきわめて容易になる可能性がある。著者らは既報⁴⁾においてSPH法の基本的な特性を検討し、弾性解析では、同法が有限要素法とはほぼ同程度の精度の解を与えうることを示した。さらに粒子法構造解析を一般化するための弾塑性解析手法⁵⁾を2次元問題で考察した。本論文では粒子法による3次元弾塑性解析を試みたので報告する。

2. SPH法の理論

Monaghanらの提案したSPH法は、図1に示すように、連続体を一群の粒子の集合とみなし、この粒子上で任意の時間における質量（密度）、速度、熱エネルギーなどを評価する。粒子法の理論は変分法や重みつき残差（ガラーキン）法などにもとづくFEM理論とは根本的に異なり、いくつかの注目すべき概念から成り立っており、以下にMonaghanとLucyによって開発

Structural Analysis by SPH Particle Method (3-dim elastic-plastic analysis). By Moo Seop Song, Yuzuru Sakai (Faculty of Education and Human Science, Yokohama National University) and Akihiko Yamasita (Railway Technical Research Institute).

*横浜国立大学教育人間科学部

**鉄道総合技術研究所

[†]2001年7月17日受付

された理論^{1,2)}, およびそれを発展させた研究論文⁶⁾にしたがい, その特徴をみてる。

いま一群の粒子の運動を単に孤立した粒子の運動として扱うと, 本来の連続体としての挙動と大きな差が現れてしまうため, 以下の Kernel 近似の概念を用いる。

$$f(x) = \int f(x') W(x-x', h) dx' \quad (1)$$

ここで $f(x)$ は任意の関数, $W(x-x', h)$ は重み関数, h は影響半径, x, x' はそれぞれ評価中心, 任意粒子の座標値である。ここで重み関数 $W(x-x', h)$ は表 1 に示す性質を満たす必要がある。さて粒子運動を表すには (1) 式の微分形が必要であり

$$\nabla \cdot f(x) \approx \int \nabla \cdot f(x') W(x-x', h) dx' \quad (2)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot f(x') W(x-x', h) \\ = \nabla \cdot (f(x') W(x-x', h)) - f(x') \cdot \nabla W(x-x', h) \end{aligned} \quad (3)$$

であるから (2) 式は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot f(x) \approx \int \nabla \cdot (f(x') W(x-x', h)) dx' \\ - \int f(x') \cdot \nabla W(x-x', h) dx' \end{aligned} \quad (4)$$

上式の右辺第一項はダイバージェンスの定理からゼロとなる。

$$\begin{aligned} \int \nabla \cdot (f(x') W(x-x', h)) dx' \\ = \int_S f(x') W(x-x', h) \cdot \hat{n} dS = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

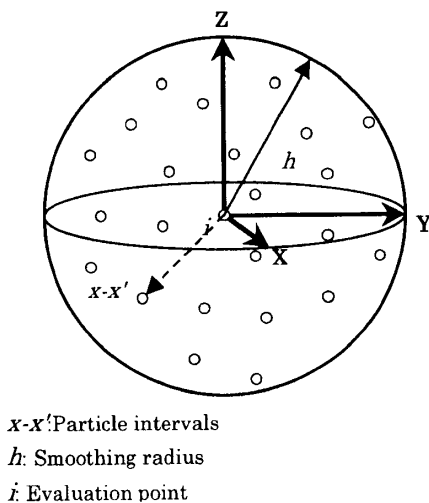


図 1 3D SPH analysis model.

表 1 Characteristics of weight function.

(1)	$\lim_{h \rightarrow 0} W(x-x', h) = \delta(x-x')$
(2)	$\int W(x, h) dx = 1$
(3)	$W(x, h) = 0 \quad x \geq h$
(4)	$C^1 \text{ Continuity}$

したがって, Kernel 近似の最終的な微分形は

$$\nabla \cdot f(x) \approx - \int f(x') \cdot \nabla W(x-x', h) dx' \quad (6)$$

と表すことができる。さて Kernel 近似を表す (1) 式は continuous 形式であり, これを粒子を基本単位とする discrete 形式で表すと,

$$f(x) \approx \sum_{j=1}^N \frac{m^j}{\rho^j} f(x^j) W(x-x^j, h) \quad (7)$$

となる。ここで m, ρ は粒子の質量と密度である。この式は影響半径 h の中にある N 個の粒子のもつ物理量を評価中心点へ, 重み関数を用いて内挿する事を意味している。つまり SPH 法は連続体の中に仮想的に分散させた多くの粒子の物理量を, (影響領域を局所的に限定することによって) 重み関数を用い評価位置に内挿する手法といえる。微分形は同様に

$$\nabla \cdot f(x) \approx - \sum_{j=1}^N \frac{m^j}{\rho^j} f(x^j) \cdot \nabla W(x-x^j, h) \quad (8)$$

となる。これらの式の導出の詳細は文献 6) に記述されている。一方, 一般化座標を用いて個々の粒子の運動を既述した系 (ラグランジェ座標系) では, 粒子の運動方程式は, 応力ダイバージェンスを用いて以下のように表すことができる。

$$a = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \sigma \quad (9)$$

(7), (9) 式より, Kernel 近似を用いた粒子の運動方程式は

$$a_i^I = - \sum_{j=1}^N m^j \sum_{j=1}^3 \left[\left(\frac{\sigma_{ij}}{\rho^2} \right)^I + \left(\frac{\sigma_{ij}}{\rho^2} \right)^J \right] \frac{\partial W}{\partial x_j^I} \quad (10)$$

と表される。

2 次元弾性場の構造問題では, ひずみ速度と粒子速度の関係式

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \quad (11)$$

および応力とひずみの関係式

$$\sigma_{ij} = D_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (12)$$

を用いて, 個々の粒子の運動方程式を解き, 粒子をステップ毎に移動させる。

図 2 に解析の流れ図を示す。

SPH 法は重み関数 W を用いた、領域積分型の近似解法であり、ある影響半径 h の内部にある複数の粒子位置の物理量を、中心位置の評価点に内挿する。

重み関数 W には多数の候補があるが、よく利用されるのは、次の 3 次 Spline 関数³⁾である。

$$W(x, h) = C \times \begin{cases} \frac{2}{3} (1 - 6S^2 + 6S^3) & \left(0 < S \leq \frac{1}{2}\right) \\ \frac{4}{3} (1 - S)^3 & \left(\frac{1}{2} < S \leq 1\right) \end{cases} \quad (13)$$

上記の 3 次 Spline 関数を表 1 の (2) 式を考慮して重み関数化すると、その 1 次元～3 次元場における形は以下のとおりである。

$$C = \begin{cases} \frac{2}{h} & 1\text{-dim} \\ \frac{60}{7\pi h^2} & 2\text{-dim} \\ \frac{12}{\pi h^3} & 3\text{-dim} \end{cases} \quad (14)$$

SPH 法構造解析では、重み関数は空間微分形で使用される。(13) 式の微分形は

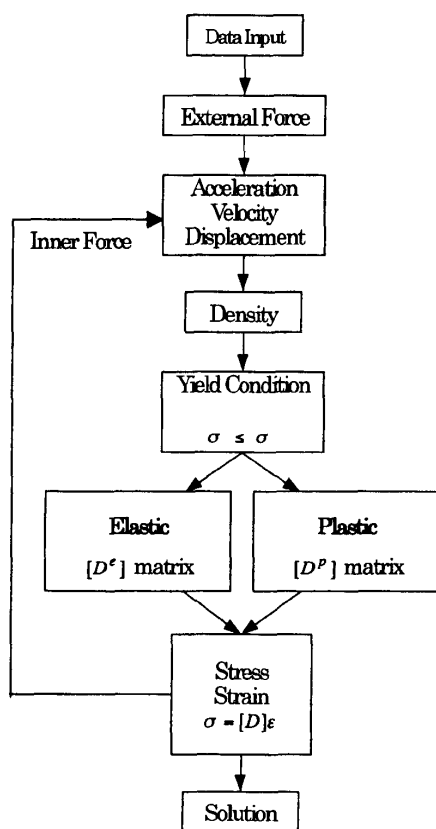


図2 Flow chart of SPH analysis

$$\frac{\partial W}{\partial S} = C \times \begin{cases} -8S + 12S^2 & \left(0 < S \leq \frac{1}{2}\right) \\ -4 + 8S - 4S^2 & \left(\frac{1}{2} < S \leq 1\right) \end{cases} \quad (15)$$

となる。図3に3次スプライン関数の形状を示す。

3. 弾性解析

SPH 構造解析手法の特徴を確認するためまず 2 次元弾性解析の結果をみてみる。図4(a)に示した SPH モデルは両端拘束をかけたアルミニウム板に上部中央から剛体である鉄塊が速度 5000 m/s で衝突するモデルを示している。なお、アルミニウム板の材料定数としてヤング率 $E = 7000 \text{ kg/mm}^2$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ を用い、鉄塊の材料定数としてヤング率 $E = 21000 \text{ kg/mm}^2$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ を用いている。粒子数は 472、解析に用いた時間増分は 10^{-6} sec である。

図4(b)～(d)に解析結果を示す。粒子法の特徴は以下のような点である。

- ラグランジュ座標系で運動方程式を解くため、小変形から超大変形までをスムーズに扱うことができる。
 - メッシュを使わないため、き裂の進展が比較的自由に表現できる。
 - 固体の破片化のような複雑変形を扱うことができる。
- このような特徴とともに、
- 解析に必要な幾何学的データとして従来の手法では必要とされたコネクティビティ・データが不要である。

という利点も見逃すことはできない。

一方、粒子法構造解析の短所は次の点である。

- 離散化のための数値振動があらわれやすい。

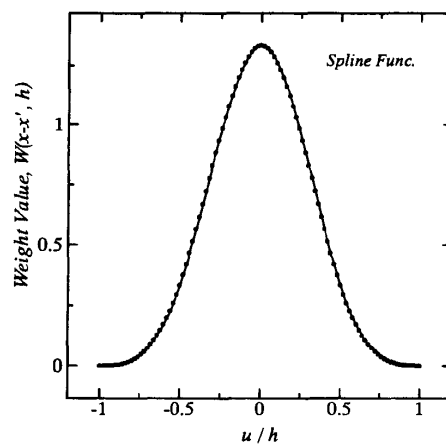


図3 Spline function.

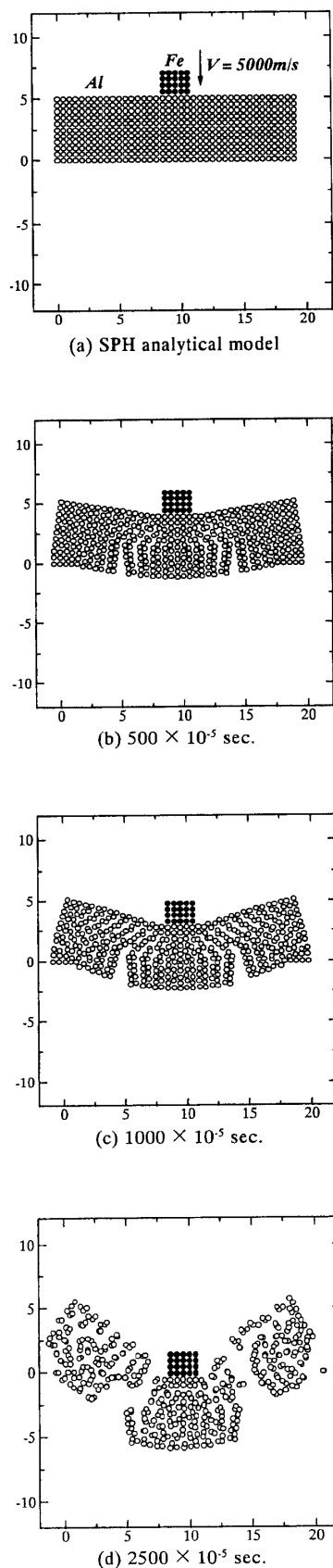


図4 SPH elastic analysis for high velocity collision.

- 解析に用いる評価点（粒子数）は通常，有限要素法の数倍程度（2～3倍）必要となる．これは本法では影響半径内部に分散した評価点の物理量を評価中心に内挿する手法であるため，評価点の個数が解の精度に直接影響を及ぼすためである．

これらの諸点については既報⁴⁾で比較的詳しく論じている．

4. 弾塑性解析

4.1 粒子法における弾塑性解析手法

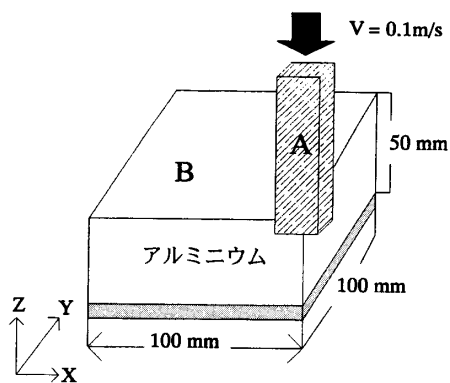
SPH法の弾性解析理論については既報⁴⁾で比較的詳しく論じたが，同法が有限要素法などのメッシュ依存型解析と異なる点は，加速度，速度，変位量などが個々の粒子位置で評価され，粒子はラグランジェ運動方程式に基づいて個別に運動することにある．このため，超大変形や，破砕現象なども比較的容易に表現できることになる．したがって，1個の粒子のもつ情報（応力，ひずみ）をもとに，その位置の塑性解析が可能となる．すなわち有限要素法においては，要素重心位置などで定義された応力状態を用いて要素のしめる領域に対して塑性理論を適用するが，粒子法ではそれを粒子位置で行い，粒子の表す領域の塑性判定を行う．ここでは小変形問題における弾塑性解析をまず考察する．小変形とはひずみ量が10%以下程度の比較的小さな変形レベルであり，有限要素法では，塑性応力—ひずみマトリクス $[D^p]$ を用いたいわゆる $[D^p]$ マトリクス法⁷⁾が用いられている．

$$[D^p] = [D^e] - \frac{9G^2}{(H' + 3G)\bar{\sigma}^2} \times \begin{bmatrix} \sigma_x'^2 & \sigma_x'\sigma_y' & \sigma_x'\sigma_z' & \sigma_x'\tau_{yz} & \sigma_x'\tau_{zx} & \sigma_x'\tau_{xy} \\ \sigma_y'^2 & \sigma_y'\sigma_z' & \sigma_y'\tau_{yz} & \sigma_y'\tau_{zx} & \sigma_y'\tau_{xy} & \\ \sigma_z'^2 & \sigma_z'\tau_{yz} & \sigma_z'\tau_{zx} & \sigma_z'\tau_{xy} & & \\ \tau_{yz}^2 & \tau_{yz}\tau_{zx} & \tau_{yz}\tau_{xy} & & & \\ sym & & \tau_{zx}^2 & \tau_{zx}\tau_{xy} & & \\ & & & \tau_{xy}^2 & & \end{bmatrix} \quad (16)$$

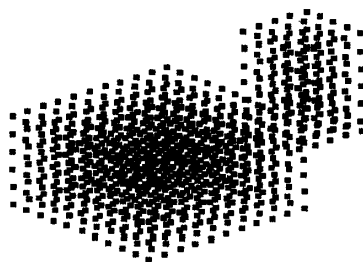
ここで D^e は応力—ひずみマトリクス，また相当応力，加工硬化係数，偏差応力などは次式のとおりである．

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2)]^{1/2}} \quad (17)$$

$$H' = \frac{d\bar{\sigma}}{d\epsilon^p} = \frac{\sigma_y}{Cn} \cdot 1 \left/ \left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_y} \right)^{n-1} \right. \quad (18)$$



(a) Low velocity collision model



(b) Particle model

図5 Analysis model of 5-d problem

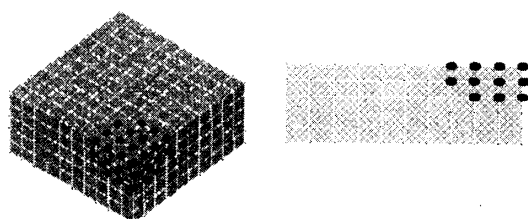
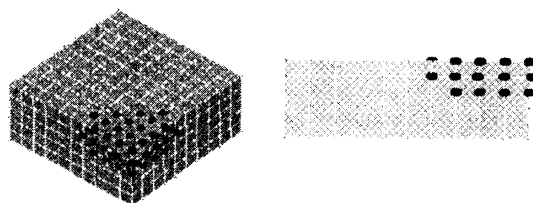
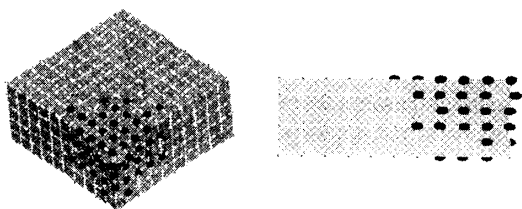
(a) 6×10^{-5} sec.(b) 9×10^{-5} sec.(c) 12×10^{-5} sec.

図6 Results of off set collision analysis.

$$\sigma'_x = \sigma_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

$$\sigma'_y = \sigma_y - \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

$$\sigma'_z = \sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

(19)

粒子法の弾塑性解析では、粒子位置において、粒子の保有する物理情報から上記の弾塑性判定と、 D^p マトリクスを用いた塑性解析を行う。

4.2 弾塑性小変形問題

前節で示した粒子法弾塑性解析手法の妥当性を検討するため、3次元物体の塑性変形解析を行う。ここでは変形量が数パーセント程度の小変形問題を扱い、塑性域の形成挙動を求めてみる。図5は3次元オフセット衝突モデル（直方体Bに、一定速度Vの物体Aが衝突）である。Bはアルミ、Aは鋼とし、Vは0.1 m/sと比較的小さな変形速度としている。同図(b)に粒子モデルを示す。アルミニウム直方体Bは726個の粒子、物体Aは150個の粒子で表現している。

図6にオフセット衝突問題の解析結果を示す（黒丸印が塑性域となった粒子）。直方体Bの形状は粒子表現ではわかりにくいのでポリゴンモデルを用いてあらわしている。衝突の接触面にあらわれた塑性域がコーナー部に発達してゆく様子が示されている。この挙動は有限要素解析結果ときわめてよい一致を示す。図7は2物体の接触点における応力・ひずみ曲線である。 D^p マトリクス法により、材料の構成方程式が比較的精度よく解析に反映されていることがわかる。

次に図8(a)に示すような2物体の正対衝突を解析してみる。材料定数、衝突速度などは前例と同じであ

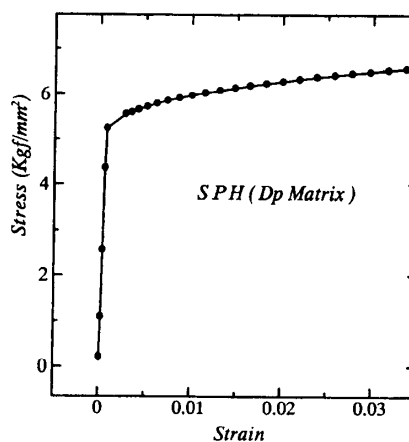
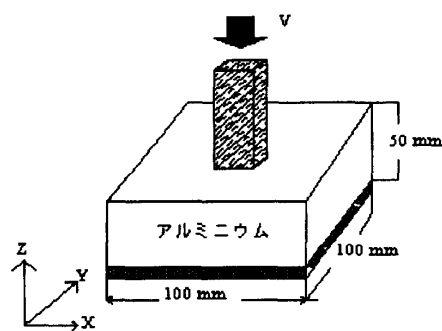
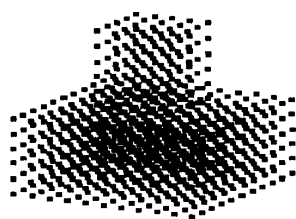


図7 Stress-strain curve at point P.



(a) Analytical model



(b) Particle model

図8 Collision model

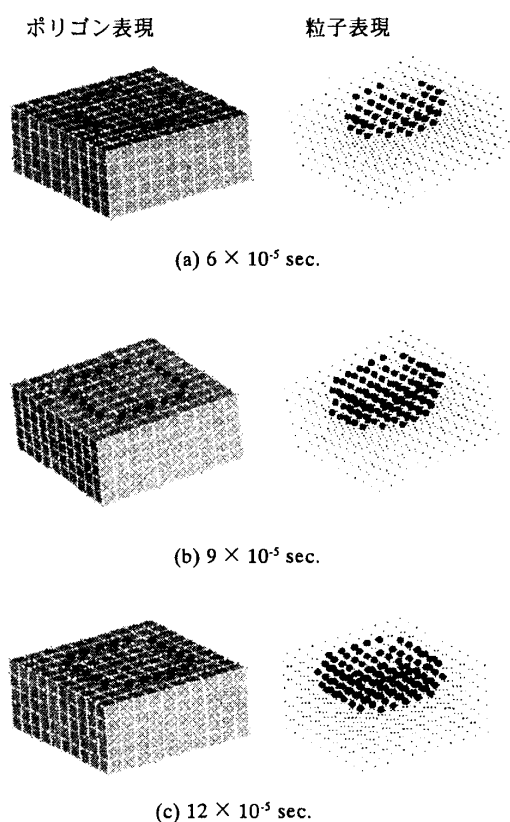


図9 Results of a collision analysis.

る。

同図(b)にその粒子表現を示す。

図9に正対衝突モデルの解析結果を示す。塑性域となった粒子について黒丸印で示している。ポリゴン表現で示した物体表面では接触面の隅部で塑性域が生成され、それが1周して輪を完成するまでの間に、物体内部では非常に大きな塑性域が発達している。

4.3 弾塑性大変形解析

SPH粒子法では物体の変形（粒子の移動）はラグランジェ運動方程式を用いた一般化座標系で表現されているため、大変形解析がそのまま実行できる。

ここでは前節で用いたオフセット衝突と正対衝突モデルを用いて大変形挙動を求めてみた。

図10はそれぞれ 100×10^{-5} 、 300×10^{-5} 、 500×10^{-5} sec 後の物体Bの変形を示している。変形がわかりやすいようにポリゴン表現を用いた。同図であきらかに3次元板の大変形挙動は粒子法により比較的精度よく解析可能であることがわかる。ただし、本解析

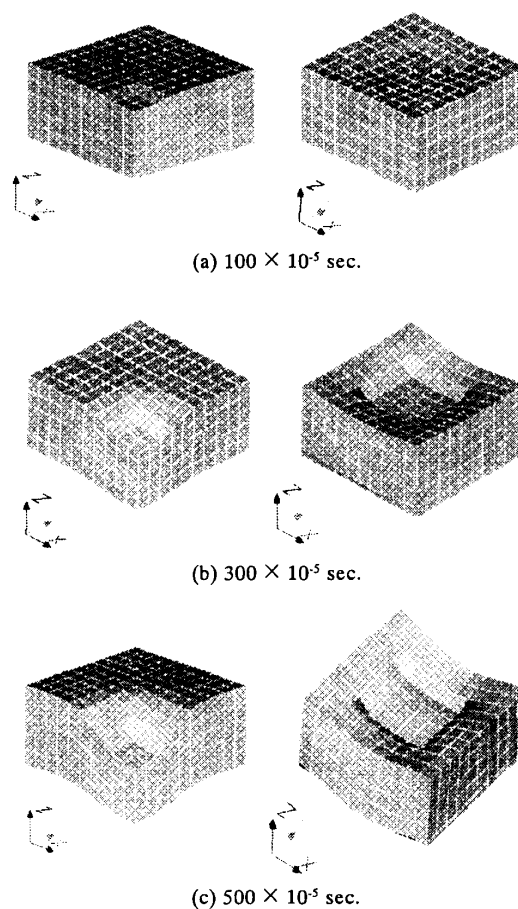


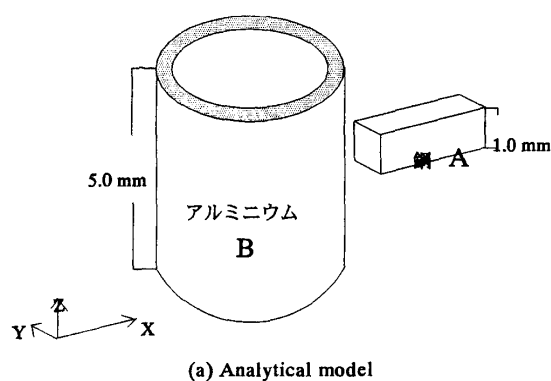
図10 Results of large deformation.

では塑性体積の一定はかならずしも保証されていない。変形速度がおおきくなると粒子は局所的にかたまると傾向が現れたりする。すなわち粒子密度にムラが生じる場合がある。塑性体積不変を解析に組み入れる工夫が必要といえ、その手法を開発中である。

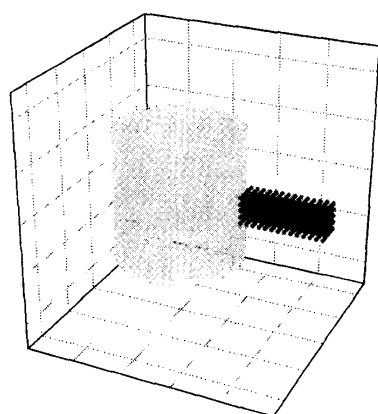
次に大変形破壊解析問題として図11(a)に示すような円筒の側面から衝突する物体の貫通問題を扱ってみる。円管(B)の側面に垂直に物体(A)が衝突し、貫通する挙動であり、同図(b)は粒子モデルである。円管と衝突物体の粒子数はそれぞれ1821と225である。Aは鋼、Bはアルミとし衝突速度は0.1 m/sとする。図12は2物体の相互関係の時間変化にともなう塑性領域の拡大と貫通挙動である。

図12に示した粒子中の黒印は塑性域を示している。時間経過とともに塑性域は拡大してゆく、この先さらに解析を続けると、衝突面が大きく塑性変形し、物体Aが円管Bの壁面を貫通して内部に侵入する様子が求められる。

この解析では、およそ2000個ほどの粒子を用い、



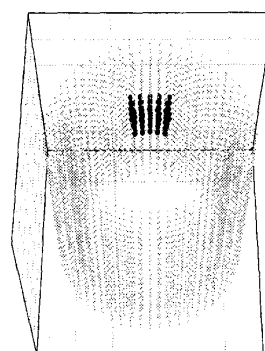
(a) Analytical model



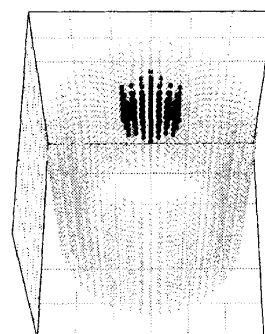
(b) Particle model

図11 Analysis model of aluminum pipe & steel beam.

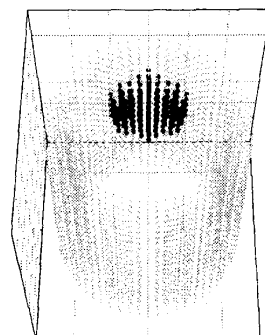
時間増分 10^{-6} で500ステップ程度計算を行ったが、市販の通常のPC (Gateway Performance 800, intel Pentium 3 processor 800 MHz) を用いて60分程度で計算が可能である。この解析速度は有限要素法にくらべてかなりはやいといえよう。(2000節点、動的弾塑性問題を有限要素法であつかうとすると、使用するプログラムにもよるが、上記の数倍の計算時間が必要と思われる。) 粒子法では1粒子の運動を陽解法で解くアルゴリズムであるため、有限要素法(陰解法)にくらべ



(a) 10×10^{-5} sec.



(b) 14×10^{-5} sec.



(c) 16×10^{-5} sec.

図12 Results of analysis.

解析時間は一般にかなり小さくなる。粒子法に使用される評価点（粒子）数は有限要素法の節点数にくらべ数倍大きくなるが、陽解法を用いるため、計算負荷はそれほど大きくならず、むしろ短縮される傾向にある。

5. 結 論

従来、SPH 粒子法は超高速破壊シミュレーション（物体の破片化解析）のための特殊解法であった。粒子法は一種のメッシュレス解析手法であり、これを一般の構造解析手法にまで拡張できればその利便性は非常に大きい。本研究では、SPH 粒子法の 3 次元弾塑性解析手法を検討した。弾塑性解析理論としては有限要素法で用いられる Dp マトリクス法を粒子法に適用してみた。その結果以下のような結論をえた。

- (1) 粒子法では評価点（粒子）位置がすべての物理量を保持しているので、弾塑性判定はその点で行え Dp マトリクス法の適用が容易である。
- (2) 小変形問題では有限要素解析と同程度の精度で解析が可能であると思われる。ただし使用する粒子数は有限要素法の節点数の 2～3 倍は必要

となる。

- (3) 弾塑性大変形問題では、SPH 粒子法は構造物の変形挙動が大規模破壊にいたるまで比較的自由にあつかえる。

本解析では粒子の分布は等密度を仮定している。粒子密度が不均一であったり、密度にムラが生じたりする場合の精度低下やき裂への応力集中の精度などの検討がさらに必要であると思われる。

参 考 文 献

- 1) Monaghan, J. J. and Gingold, R. A.: *J. Comput. Phys.*, 52, 374/389 (1983)
- 2) Lucy, L. B.: *Astronom. J.*, 82, 1013/1024 (1977)
- 3) Johnson G. R., Stryk R. A. and Beissel S. R.: *Comput. Methods Appl. Mech. Engng*, 139, p347 (1996)
- 4) 酒井, 宋, 山下: SPH 法による構造解析の基礎的検討, 本機会学会論文集, 67-659, p1093 (2001)
- 5) 宋, 酒井, 山下: 粒子法による弾塑性解析, 日本機械学会論文集, 投稿中.
- 6) Swedge, J. W., ほか 4 名: SANDIA REPORT, SAND93-2513 UC-705 (1994)
- 7) 鷲津監修: 有限要素法ハンドブック, 培風館 (1983)