《論　文》

論 20-12

階層型領域分割法と力法を用いた大規模並列形状最適化†

吉村　忍*・大塩典彦*・河合浩志*
畔上秀幸**・竹内謙善**

ABSTRACT　This paper describes shape optimization of millions degrees of freedom (DOF) finite element model in a parallel computing environment. Here the Traction method is combined with the parallel finite element analysis system named ADVENTURE, which is based on the hierarchical domain decomposition method (HDDM). The ADVENTURE system is a module-based parallel finite element system for 10^7–10^8 DOF problems. The Traction method is one of shape optimization algorithms, which enables to keep smoothness of the final shape as same as the initial shape without causing undulating phenomenon. The method finds the optimized shape by applying external force, in proportion to the minus value of the shape gradient function, as the Neumann boundary condition. Practical performances of the present approach are demonstrated through some numerical examples with one million DOF mesh.

1. はじめに

高速計算機環境として，汎用品であるPCを多数ネットワーク接続したPCクラスターが脚光を浴びている．その理由として，LinuxやMPIなどの良質でフリーのソフトウエア環境が整ってきたこと，コストパフォーマンスが高いこと，素人でも比較的容易に高性能の並列処理環境を構築できること，比較的大規模なメモリー空間・ディスク空間を実現できること，欲すれば1ユーザーが24時間占有できること，などがあげられる．また，昨今の超並列計算機（MPP：Massively Parallel Processors）も多くが汎用マイクロプロセッサを利用しており，今後のHPC（High-performance Computing）環境の主流の一つになってきている．一方，これまでのところPCクラスター環境で自在に稼動する汎用CAEシステムはほとんど存在しなかった．

著者らは，日本学術振興会未来開拓学術研究推進事業「計算科学」分野のADVENTUREプロジェクトにおいて，任意形状の実用力学問題を，1千万～1億自由度級モデルを用いて解析できる並列CAEシステムの研究開発を進めている[1~2]．さらにその成果を誰でも利用できるように，プレ・メイン・ポストから構成されるADVENTUREシステムVer. βを2000年12月1日にプロジェクトホームページ上から無料公開した[3]．

ADVENTUREシステムでは，1千万～1億自由度級モデルを自由自在に扱えることと同時に，システムの開発・保守を容易にするために，背景知識や理論・アルゴリズム，プログラミングスタイルの異なる多数のプレ処理（パッチ生成，メッシュ生成，メッシュの領域分割）モジュール，メイン処理（応力解析，衝撃解析，熱流体解析，磁場解析等）モジュール，ポスト処理（解析結果の可視化）モジュールを独立なモジュール（ソフトウエア）として構築している．各モジュールには並列アルゴリズムが実装されており，それぞれが単独コードとしてPCクラスター上で稼動する[4,5]．さらに，各モジュールのデータ入出力（I/O）は，並列分散環境での大規模解析を前提とした標準的なI/O（ADVENTURE_IO）によって統一されており，モジュール間の連携を図りながら各種連成解析や最適化解析を行ない易いように設計されている[6,7]．

本研究では，ADVENTUREシステムの機能拡張のひとつとして，畔上らによって提案された形状最適化

Large-Scale Parallel Shape Optimization Using Hierarchical Domain Decomposition with Traction Method. By *Shinobu Yoshimura, Norihiko Oshio, Hiroshi Kawai* (Institute of Environmental Studies, University of Tokyo), *Hideyuki Azegami* and *Kenzen Takeuchi* (Dept. of Mechanical Engineering, Toyohashi University of Technology).
*東京大学大学院新領域創成科学研究科環境学専攻
**豊橋技術科学大学機械システム工学系
†2001年6月25日受付　2001年9月20日再受付

理論（力法）[8,9]とADVENTUREシステムの統合化手法について，メモリ使用量や計算時間の観点から並列化の必要性について検討を行なった．さらにプロトタイプシステムを構築し，100万自由度級の大規模メッシュを用いて並列形状最適化問題が解けることを示した．

2. 領域分割型並列有限要素法解析システム

本研究で採用した並列有限要素法解析システムADVENTUREの概要は文献1,2)に紹介されており，基本ソルバーである階層型領域分割法（HDDM：Hierarchical Domain Decomposition Method）の理論や性能については文献4,5,10)に報告されているので，ここではその要点について述べる．

領域分割法（DDM：Domain Decomposition Method）とは，解析領域に関する連立1次方程式を解くために，解析領域をいくつかの部分領域（Sub-domain）に分けて計算を行なう手法の総称である．本研究では，その中でも特に，部分領域内部の節点に関する自由度をスカイライン法等の直接法を用いて静的縮約し，部分領域間境界上の節点に関する自由度については前処理付き共役勾配法（CG：Conjugate Gradient）等の反復法で解く方法を採用する．本手法はいわゆるサブストラクチャ法と同じ基礎式を用いており，静的縮約後に得られる連立1次方程式（Shur Complement Matrix Equation）を直接法で解くか反復法で解くかが異なる．

領域分割法を超並列計算機上に実装するために考案されたのがHDDMである．この方法では座標，節点コネクティビティあるいは応力，降伏応力等のデータを複数のParentと呼ばれるプロセッサのメモリ上に記憶する．Parent数を増やせば大規模な問題にも容易に対応できる．本手法では解析モデルをParentの数と同じ数のパート（Part）と，各パートの中の部分領域からなる2階層の領域に分割する必要がある．**図1**に簡略化された原子炉圧力容器の階層型（PartsとSubdomains）データ構造への分割例を示す．なお，ADVENTUREプロジェクトでは，Ver. βとしてHDDMを実装した線形及び非線形の静応力解析モジュールADVENTURE_Solidと一体型解析モデル（＝一体型メッシュ＋境界条件＋物性値）を階層型データに自動的に分割するモジュールADVENTURE_Metisをリリースしており，本研究では，後述するように両モジュールを用いた．これ以降，領域分割型データと区別する意味で，領域分割されていない普通の解析モデル及びメッシュを一体型解析モデル及び一体型メッシュと呼ぶことにする．

3. 形状最適化理論：力法

詳細は文献8,9)に譲るとして，ここでは力法の理論とアルゴリズムの概要について述べる．

Direchlet-Neumann混合問題を例とすると，境界変動型形状最適化問題は次のように表すことができる．n次元空間の領域$\Omega\subset R^n$, $n=2,3$，その境界Γ，においてスカラー関数fとgが与えられてスカラー関数uを解く境界値問題：

$$\dot{\nabla}\cdot\dot{\nabla}u(\dot{x})=f(\dot{x}),\ \dot{x}\in\Omega \qquad (1)$$

$$u(\dot{x})=0,\ \dot{x}\in\Gamma_0\subset\Gamma \qquad (2)$$

$$\dot{\nabla}u(\dot{x})\cdot\dot{\nu}=g(\dot{x}),\ \dot{x}\in\Gamma\backslash\Gamma_0 \qquad (3)$$

が定義されているとき，目的汎関数J_0：

$$J_0(\Omega)=\int_\Omega\phi_0(\dot{x},u(\dot{x}))\,dx+\int_\Gamma\varphi_0(\dot{x},u(\dot{x}))\,d\Gamma \qquad (4)$$

が最小となる境界形状を求めよ．ただし制約汎関数J_1：

$$J_1(\Omega)=\int_\Omega\phi_1(\dot{x},u(\dot{x}))\,dx+\int_\Gamma\varphi_1(\dot{x},u(\dot{x}))\,d\Gamma \qquad (5)$$

が与えられた制限値$\bar{J}_1$を超えないこと（$J_1(\Omega)\leq\bar{J}_1$）を制約条件とする．ここでνは領域境界上に立てた外向き単位法線ベクトルである．領域Ωが変動してΩ_sになることはsを変動履歴とする写像の1媒介変数族$\dot{T}_s$：

$$\dot{T}_s(\Omega):\dot{T}\in\Omega\mapsto\dot{x}\in\Omega_s\quad s\geq 0,\ \dot{T}_0(\dot{X})=\dot{X} \qquad (6)$$

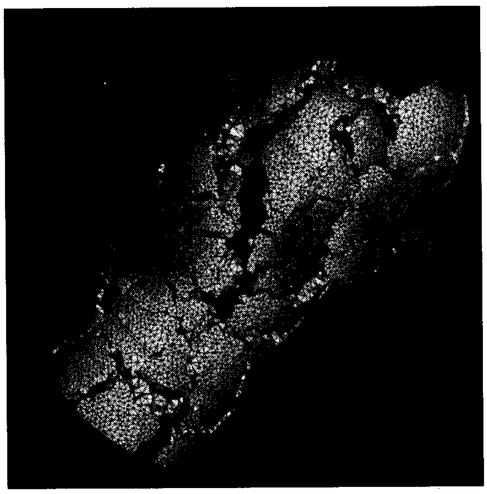

図1　メッシュの階層型領域分割の例

で表現できる．

この問題に，Lagrange 乗数法（随伴変数法）と物質導関数の公式を導入すれば，領域変動（変動履歴 s の変動）に対する目的汎関数の導関数 $\dot{j}_0$ は次の形式で得られる．

$$\dot{j}_0=\int_{\Gamma} G(\vec{x})\vec{v}(\vec{x})\cdot\vec{V}(\vec{x})\,d\Gamma \tag{7}$$

ただし，$\vec{V}$は領域変動速度で次のように定義される．

$$\vec{V}(\vec{x})=\frac{\partial\vec{T}_s}{\partial s}(\vec{T}_s^{-1}(\vec{x})) \tag{8}$$

$\vec{T}_s^{-1}$は$\vec{T}_s$の逆写像を表す．ここで $G\vec{v}$は領域変動速度に対する係数関数になっていることから形状勾配関数，Gは形状勾配密度関数と呼ばれ，通常，状態関数 u と随伴関数 v_0, v_1 および制約条件に対する Lagrange 乗数 Λ の関数となる．随伴関数 v_0, v_1 は次の境界値問題の解として得られる．

$$-\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}v_i(\vec{x})=\frac{\partial\phi_i}{\partial u}(\vec{x}),\ \vec{x}\in\ \Omega\ i=0,1 \tag{9}$$

$$v_i(\vec{x})=0,\ \vec{x}\in\ \Gamma_0\subset\Gamma \tag{10}$$

$$\vec{\nabla}v_i(\vec{x})\cdot\vec{\nu}=\frac{\partial\varphi_i}{\partial u}(\vec{x}),\ \vec{x}\in\ \Gamma\backslash\Gamma_0 \tag{11}$$

畔上らは，楕円型偏微分方程式の境界値問題を対象とした境界変動型領域形状最適化問題の解法を提案した．それは，境界値問題が定義されている領域を線形弾性体とみなして，形状変動に関する拘束条件の下で，形状勾配関数に負号を付けた値を表面力として作用させたときの変位場を速度場（領域の変動方向）として解析する方法である．実際の解析では，この速度場に微小変形理論が有効な範囲内でできるだけ大きな定数（通常，最大ひずみが数%から10%程度となるような定数）を掛けたものを使って領域形状を更新し，感度を評価しながらこの過程を繰り返す．

4. 力法と並列 FEM システムとの統合

4.1 体積制約，剛性最大化問題の場合

力法は，これまで線形弾性問題，固有振動問題，周波数応答問題，応力分布規定問題，変位規定問題，最大変位および最大応力最小化問題，粘性流れ場の散逸エネルギー最小化問題，ポテンシャル流れ場の流速規定問題，音響問題等に適用されている．本研究では，力法の適用対象としては最も基本的な問題である，目的汎関数を外力仕事，制約汎関数を体積に選んだ体積制約付き剛性最大化問題に適用した．簡単のために，外力が作用する境界と変位制約境界は変動しないものと仮定する．この場合，形状勾配密度関数はひずみエネルギー密度の負値と体積制約に対する Lagrange 乗数 Λ の和となる．本問題における力法の具体的なアルゴリズムは次の5ステップから構成される．

ステップ1：初期形状に対して，体積 m_0 を計算し，所定の境界条件を付与した通常の FEM 解析を行なう．これから変位場 u を求め，それから外力仕事（ひずみエネルギー）を計算する．形状変更が2回目以降であれば，外力仕事の収束判定を行なう．

ステップ2：ステップ1の結果から，形状勾配密度関数，すなわちひずみエネルギー密度，を計算する．それに基づいて，ひずみエネルギー密度に領域変動の大きさを制御するための定数 Δs を乗じた外向き法線方向の表面力を求める．それを領域変動の許された部分境界に負荷したときの変位場 V_0 を FEM 解析し，体積変動 Δm_0 を境界積分で計算する．

ステップ3：体積制約が体積制約値 $\bar{m}$ に対して満たされている場合には，領域を Ω 変位場 ΔsV_0 を用いて更新し，ステップ1に戻る．満たされていない場合には，外向き法線方向に -1 の表面力を負荷したときの変位場 V_1 を FEM 解析し，そのときの体積変動 Δm_1 を境界積分で計算する．さらに，$\Delta s(V_0-V_1\Delta m_0/\Delta m_1)$ の最大ひずみが制限値となるように Δs を決定し，Lagrange 乗数 Λ を

$$\Lambda=-\frac{\Delta m_0+m_0-\bar{m}}{\Delta s\Delta m_1} \tag{12}$$

で与え，領域 Ω を変位場 $\Delta s(V_0+\Lambda V_1)$ を用いて更新する．

ステップ4：更新された領域に対して通常の FEM 解析を行ない，*Armijo* の基準[11]が満たされているか判定する．満たされていない場合には，Δs を小さくして，領域を変位場で更新し，ステップ4の最初に戻る．満たされている場合にはステップ5に進む．

ステップ5：更新された領域に対して体積変動 m_0 を評価し，制約が満たされているか判定する．満たされていない場合には，外向き法線方向に -1 の表面力を負荷したときの変位場 V_1 を FEM 解析し，その時の体積変動 Δm_1 を境界積分で計算する．さらに，Lagrange 乗数 Λ を

$$\Delta\Lambda=-\frac{m_0-\bar{m}}{\Delta m_1} \tag{13}$$

だけ変化させて，領域を変位場 $\Delta s(V_0+\Lambda V_1)$ で更新して，ステップ5の最初に戻る．満たされている場合には，ステップ1に戻る．

4.2 並列 FEM との統合化

図2 に力法と並列 FEM との統合化のイメージを示

す．4.1節で述べた力法のアルゴリズムの中では各ステップにおいてFEM解析が必要となる．したがって，大規模モデルを用いて形状最適化を行なおうとすれば，まず，その部分を並列FEMコードで置き換える必要がある．

並列FEM解析には，CADモデル作成，メッシュ作成，境界条件貼付，メッシュの領域分割，力学解析，メッシュ（形状）の更新という6つの基礎過程が存在するので，その力法アルゴリズムへの組み込み方には次の2通りの考え方がある．

図2に示したのはそのうちの1つの考え方であり，今回採用したアプローチである．この場合，CADモデル作成，メッシュ生成，境界条件貼付は，力法の反復ループの外側で行なう．力法の反復ループの中で並列FEM解析（ADVENTURE_Solid）が必要となったら，その都度，境界条件付きメッシュデータを，ADVENTURE_Metisを用いて部分領域データに分割する．ADVENTURE_Metisは境界条件・物性値付き大規模メッシュデータを階層型に領域分割するコードである．また，並列解析終了後は，領域に分割された解析結果を領域統合化ツールhddmmrgを用いて一体型データに変換する．なお，ADVENTURE_SolidとADVENTURE_Metisはともに並列環境で稼動する．第1の方法では，逐次処理に対応したオリジナルの力法プログラムを大きく変更する必要はない．

第2の考え方は，力法内の各種演算もすべて並列化し，メッシュの領域分割過程を反復ループの外側に移し，領域分割型データを直接取り込む方法である．このようにすると，領域分割型データを統合化するhddmmrgは必要ない．本手法の特徴に関しては，4.4節及び5章で再度言及する．

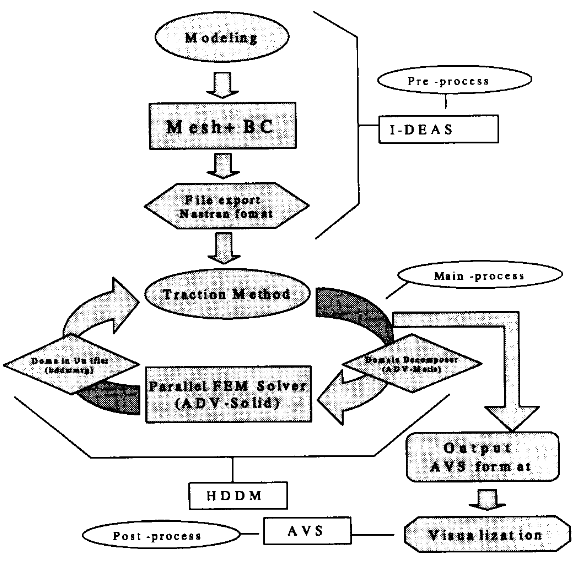

図2　力法と並列FEM, ADVENTUREの統合化

4.3　並列FEMとのインターフェース

1章で述べたように，ADVENTUREシステムでは，システムの開発・保守を容易にするためにモジュール構造を採用している．この方針に基づき，本研究でも並列FEM解析モジュール群と力法モジュールの独立性を確保することを最優先に，両者のインターフェースをファイル入出力ベースで構築した．具体的に力法モジュールは，FEM解析が必要となる毎に，解析モジュール群と以下のようなやり取りを行なう．

(A) 力法モジュールが，一体型メッシュ（すなわち節点座標と要素コネクティビティ），および変位境界条件，荷重境界条件，材料物性をまとめ，一体型解析モデルファイルを一つだけ出力する．

(B) 力法モジュールがADVENTURE_Metisを起動する．ADVENTURE_Metisは一体型解析モデルファイルを読み込み，これを並列に領域分割し，領域毎の解析モデルファイルをプロセッサ数だけ出力する．

(C) 力法モジュールがADVENTURE_Solidを起動する．ADVENTURE_Solidモジュールは領域分割された解析モデルファイルを読み込み，これについてHDDMに基づいて並列FEM解析を行い，領域毎の解析結果ファイルをプロセッサ数だけ出力する．

(D) 力法モジュールが，解析結果統合化ツールhddmmrgを起動する．hddmmrgツールが領域分割された解析モデルおよび解析結果ファイルを読み込み，一体型解析結果ファイルを一つだけ出力する．

(E) 力法モジュールが一体型解析結果ファイルを読み込む．

今回採用したアプローチでは，基本的にADVENTUREの解析モジュール群は力法モジュールから見て従来型のシングルプロセッサ上で動作するようなFEMシステムとして捉えられている．解析モジュール群への直接の入力ファイル，出力ファイルはそれぞれ一つであり，力法モジュールはこれらを入出力している．そのため，力法モジュール内に従来からあった解析機能部分の最小限の書き換えで，これらを比較的容易に接続することに成功した．原理的には，解析コード内に直接力法のロジックを導入し別バージョン

の解析モジュールを作ることもできるが，その場合には，システムの開発・保守の容易さが大きく損なわれることを覚悟しなければならない．

4.4 力法のメモリ消費量

図2に示す統合化法を採用する場合に，力法モジュールにおいて必要となるメモリ量を推定した．ここで4面体2次要素を対象とした．nは節点数を表す．また，4面体2次要素メッシュの要素数は，経験値として0.8nと概算した．

- 節点座標：8×3×n＝24n Bytes
- 要素コネクティビティ：4×10×0.8n＝32n Bytes
- ひずみ：8×6×0.8n＝38.4n Bytes
- 応力：8×6×0.8n＝38.4n Bytes
- 変位：8×3×n＝24n Bytes
- 速度場解析用圧力（剛性評価）：8×3×n＝24n Bytes
- 速度場（剛性評価）：8×3×n＝24n Bytes
- ひずみ（剛性評価）：8×6×0.8n＝38.4n Bytes
- 速度場解析用圧力（体積拘束）：8×3×n＝24n Bytes
- 速度場（体積拘束）：8×3×n＝24n Bytes
- ひずみ（体積拘束）：8×6×0.8n＝38.4n Bytes
- 更新形状時の一時節点座標：8×3×n＝24n Bytes
- 新形状の要素 connectivity：4×10×0.8n＝32n Bytes
- 一時ひずみ：8×6×0.8n＝38.4n Bytes

以上の推定から明かなように，力法モジュールで必要となるメモリ量はモデル規模（メッシュ総節点数）に比例する．100万自由度級メッシュを解析する場合，節点数はおおよそn＝340,000であり，必要メモリ量は約146 MBytesと推定される．したがって，数百MBytesから1 GBytesのメモリを搭載したPCを用いれば，力法アルゴリズムの処理のみに関して言えば，100万～数百万自由度規模でも単一PC上で十分処理できる．しかしながら，その限界を超えるようなより大規模なモデルの形状最適化問題を扱う場合には，メモリ分散の観点から力法自体の並列化が不可避となってこよう．本解析では，10台のCompaq製Alpha 21264（667 MHz, 1 GB）をFast Eatherで接続し，Linuxで稼動するBeowulf型PCクラスターを用いた．なお，計算時間の観点については，5章で考察する．

5. 基本性能の検証

本並列形状最適化手法の基本性能を検証するために，はじめに**図3**に示す逆L型モデルを解いた．ここでは，下面を完全拘束し，上面に一様分布荷重を負荷し，それ以外の面形状を変更する最適化問題を解いた．**図4**に最適化された形状を示す．

図5に，メッシュの自由度を種々変更した場合の，力法の1反復あたりに要した計算時間を示す．同図においてTraction MethodとはFEM関係を除く力法の1反復当たりの計算時間である．ADV_Metis*5とは，1反復中で4～5回のFEM解析が必要となるので，領域分割に要する計算時間を5倍したものである．ADV_Solid*5とは，FEMのみにかかる計算時間を5倍したものである．HDDM*5とは，ADV_Metis*5とADV_Solid*5の和を表す．

図5によれば，Traction Methodの計算時間とADV_Metis*5の計算時間は共に総節点数nに比例して増大している．一方，ADV_Solidの計算時間の増

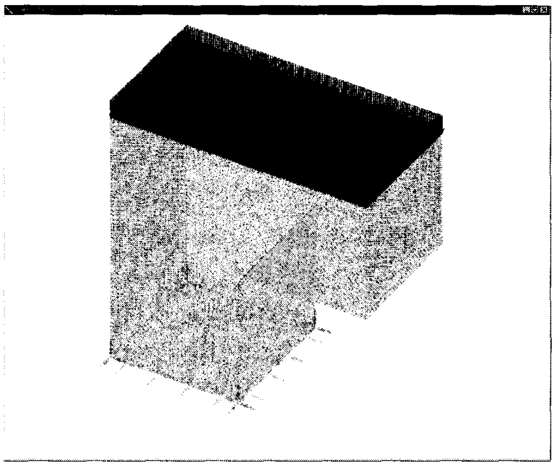

図3 逆L字型モデル

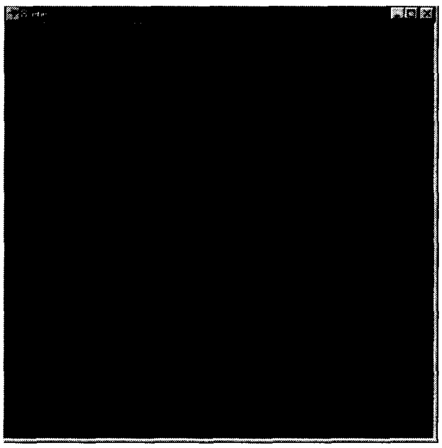

図4 最適形状

え方はほぼ $n^{1.6}$ に比例している．つまり，メッシュ規模が大きくなると，全計算時間の中で，FEM 解析（ADV_Solid）にかかる時間が支配的になり，力法（Traction Method）や領域分割（ADV_Metis）にかかる計算時間は無視できるようになる．したがって，本研究で用いたような PC クラスター環境で 100 万～数百万自由度級問題を解く場合には，計算時間短縮の観点からは，力法の部分を並列化する必要性はないといえる．一方，数百プロセッサを有する MPP を利用するような場合には，並列 FEM 解析の時間が低減し，力法部分の計算時間の割合が相対的に増大してくるので，計算時間短縮の観点から力法の部分を並列化することが有効となろう．なお，力法ロジックを並列化することは，理論的には比較的容易である．これらは，領域間通信が若干必要となるものの，基本的に節点または要素単位，あるいは境界上の要素辺単位の演算であるためである．この場合には，4.2 章で述べたように解析結果統合化ツール hddmmrg は必要なくなる．なお，今回は，4.3 節で指摘したように，モジュール化という観点から，力法モジュールや解析モジュール群をできる限り変更しないという制約を課した．

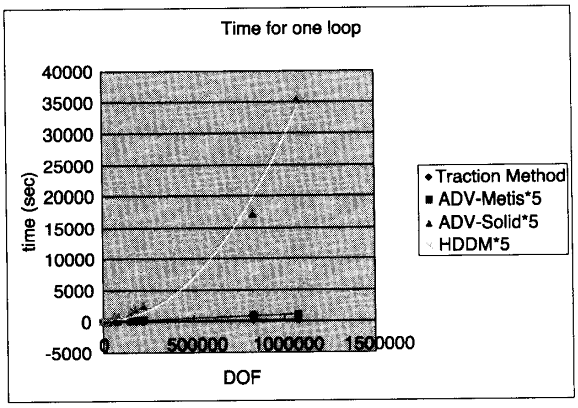

図 5　1 反復における各部の計算時間とメッシュ規模

6. 適用事例

現実の大規模問題への適用事例として，図 6 に示す首都高速の高架の簡略化された CAD モデルをとりあげる．本例題では，支柱の底面は完全に拘束され，支柱の右端は x 方向に拘束され，I ビームの両端は z 方向に拘束されるとした．I ビームの上面に一様分布荷重を負荷した．図 7 に得られた最適形状を示す．本問題では，1 反復当たり力法の部分に 197 秒かかり，FEM 解析の部分に 77,058 秒かかった．ほぼ最適な形状を得るまでに 3 反復（15 回の FEM 解析）必要であったので，計 231,766 秒（約 2.7 日）かかった．一方，力法の部分の使用メモリ量は 144 MBytes であった．

7. おわりに

大規模並列 FEM 解析用 ADVENTURE システムと形状最適化アルゴリズム力法を統合化した．本統合化手法に関して，計算時間及びメモリ消費量に関して評価を行なった．その結果，力法アルゴリズムを並列化しなくても，PC クラスター環境で 100 万自由度級メッシュを用いた形状最適化が可能であることが示された．一方，1 台の PC 搭載メモリを超えるような数百万自由度以上の大規模メッシュを用いた解析を行なうには，メモリ分散の観点から力法アルゴリズムも並列

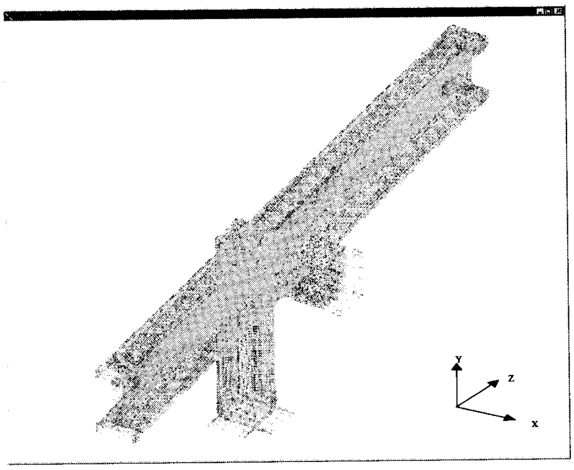

図 6　首都高架の簡易 CAD モデル

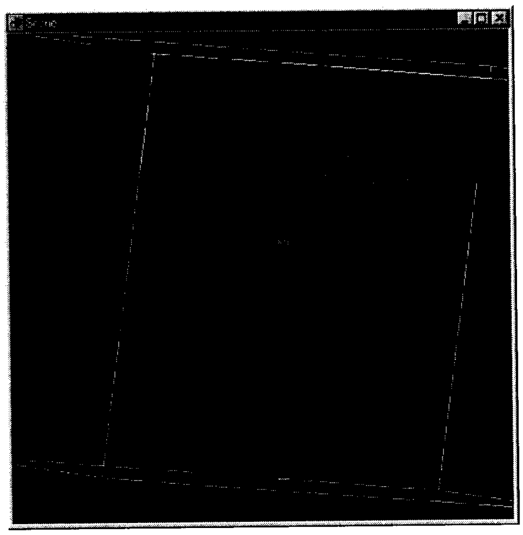

図 7　最適形状

化することが不可欠であることが明らかとなった．また，数百プロセッサを有するMPPを利用するような場合には，力法部分の計算時間の割合が相対的に増大してくるので，計算時間短縮の観点から力法の部分を並列化することが有効となることも明らかとなった．最後に本システムを用いて，100万自由度メッシュを用いて首都高高架の形状最適化解析を行なった．なお，今回は公開前バージョンを用いたが，現在公開されているVer.βでは，線形代数ソルバーのメモリアクセス部分をチューニングしたことにより，最高約3倍の高速化が達成されている．

謝　辞

本研究を行なうにあたって，コンパックコンピュータ㈱よりADVENTUREプロジェクトに貸与いただいたAlpha clusterを利用した．記して謝意を表する．

参　考　文　献

1) 吉村：設計用大規模計算力学システムの開発，計算工学，4-4, 210/218 (1999)

2) S. Yoshimura: Development of Computational Mechanics System for Large Scale Analysis and Design, 日本学術振興会未来開拓学術研究推進事業「計算科学」報告書 (2000-2001), 13/24 (2001)

3) http://adventure.q.t.u-tokyo.ac.jp/

4) 宮村，野口，塩谷，吉村，矢川：階層型領域分割法による超並列弾塑性有限要素解析，日本機械学会論文集，65A-634, 1201/1208 (1999)

5) T. Miyamura, H. Noguchi, R. Shioya, S. Yoshimura, G. Yagawa: Elastic-Plastic Analysis of Nuclear Structures with Millions of DOFs Using the Hierarchical Domain Decomposition Method, Nuclear Engineering & Design, 印刷中

6) 宮村，田中，田久保，吉村，矢川：大規模並列計算力学システムにおける入出力データの標準化，日本計算工学会論文集，2, 219/226 (2000)

7) 田中，和田，吉村，矢川：分散環境におけるCAEシステム統合のためのフレームワーク，計算工学インターネット論文集，No. 19990026 (1999)

8) 畔上，呉：線形弾性問題における領域最適化解析（力法によるアプローチ），日本機械学会論文集，60A-578, 2312/2318 (1994)

9) 畔上：形状最適化問題の解法，計算工学，2-4, 239/247 (1997)

10) 矢川，塩谷：データ分散管理型超並列有限要素法，シミュレーション，14-3, 232/239 (1995)

11) L. Armijo: Minimization of Functions Having Lipschitz-continuous First Partial Derivatives, Pacific Journal of Mathematics, 16, 1/3 (1966)