

リンク機構を有する鉄道車両のための 運動方程式自動生成プログラム‘EXPRESS’の開発†

谷 藤 克 也*・鈴木 元**

ABSTRACT For the numerical analysis of a dynamic system, it is necessary to have equations of motion for the system. Up to now, Lagrange's method has been used to derive equations of motion for a rail vehicle. However, it needs much time and labor to derive the equations of motion because the analytical model has a number of degrees of freedom. Moreover, when the vehicle has a linkage mechanism like a forced steering one, the derivation becomes more burdensome. This paper deals with the development of automatic forming program of equations of motion ‘EXPRESS’ for rail vehicles containing complex linkage mechanisms, and also deals with the dynamic analyzing system that uses this program. As an application example, the equations of motion of a forced steering rail vehicle are formed and the calculations of numerical simulation, frequency response and eigenvalue analysis are performed. The obtained results represent well the characteristics of a forced steering rail vehicle, and thus the equations of motion formed by the program ‘EXPRESS’ are confirmed to be valid. And it is shown that the use of the program ‘EXPRESS’ has possibility for reducing time required to examine a new type vehicle containing complex mechanism.

1. はじめに

機械系の動特性を解析するためには、その系の運動方程式を必要とする。ここで対象とする鉄道車両の場合、従来は、ラグランジェ法などによって運動方程式が導出されてきたが、その解析モデルは多くの要素からなる自由度の大きい系となり、その運動方程式導出には時間と労力を要してきた。また、系にリンク機構が含まれる場合、机上での式の導出には煩雑さを伴う場合が多い。なぜならば、リンク機構は系の構成要素間の結合を複雑にするとともに、剛体同士を直接結合するピン結合を含む場合が多いからである。そのため、近年では、マルチボディソフト (MBS) による運動方程式の自動生成が採用されるようになってきた。しかし、特殊な機械構造を対象とする場合、市販の汎用ソフトでは容易に対応できないことも多い。鉄道車両についても同じことが言えて、欧米諸国では、鉄道車両を対象とする独自のソフトも各所で開発され

ている状況にある¹⁾。その中には、モデル化の対象を特定せずに運動方程式の生成を主体として、それを用いた解析が分離できるものから、運動方程式の生成から解析までが一体になったものまで、多様なソフトウェアが存在する。前者には AUTOSIM や NEWEUL, MESA VERDE などがあり、運動方程式は記号表現で出力され、後段の数値処理ソフトに移される。ここでは、MATLAB などの汎用解析ソフトの利用も可能である。しかし、これらは鉄道車両を直接モデル化の対象としていないため、鉄道車両固有の現象を容易に取扱うことができない。また、前者に含まれるソフトとして、鉄道車両をモデル化の対象にできる A'GEM がある、その運動方程式は数値でのみ出力される。一方、後者には ADAMS, DADS など市販の汎用ソフトも含まれるが、運動方程式を記号表現ではなく、行列形式の数値でのみ出力するものが多い。また、鉄道車両を主な対象とする VAMPIRE や NUCARS などは、それぞれの国で使用される代表的車両構成を前提として作られているため、我が国の車両への応用が容易とは言えない。上にあげた MBS それぞれの概要は文献 1) で紹介されている。

本論文は、鉄道車両への適用を考慮して著者らが構築した剛体系運動方程式自動生成プログラムの利用システムについて報告するものである。近年、在来線鉄

Development of Automatic Forming of Equations of Motion ‘EXPRESS’ for Rail Vehicles with Linkage Mechanism. By Katsuya Tanifuji (Faculty of Engineering, Niigata University) and Hajime Suzuki (Graduate School, Niigata University).

*新潟大学工学部

**新潟大学大学院

†2000年12月28日受付 2001年8月3日再受付

道においては曲線通過速度向上のため、種々のリンク機構を備えた強制操舵式車両の導入が進められている。開発したプログラムは、このようなリンク機構を含む系の運動方程式を、数値表現ではなく記号表現のままて出力し、導出された運動方程式を視覚的に検討が加えられるものになっている。なお、鉄道車両の場合、その運動に大きく影響する固有な力として車輪・レール間の相互作用があげられるが、それは既存の関係式から別途モジュールとして付加される。従って、このプログラムでは、車輪から上の構成要素を主体とする運動方程式の導出を主な目的としている。本報では、適用例として、着目する強制操舵式車両の一つを取り上げ、本プログラムにより自動生成した式を用いて曲線通過のシミュレーションを含む数値解析を行い、その妥当性を検討するとともに、本プログラムの活用の可能性が示される。

2. 運動方程式の自動生成

2.1 剛体間が剛性と減衰のみで結合される場合

2.1.1 生成理論²⁾

一般に、運動方程式はマトリクス形式により、次のように表すことができる。

$$M\dot{Q} + C\dot{Q} + KQ = F \quad (1)$$

ここで、 M は質量マトリクス、 C は減衰マトリクス、 K は剛性マトリクス、 F は外力ベクトル、 $Q = [q_1 q_2 \dots q_i \dots]^T$ は一般化座標ベクトルである。 q_i は*i*番目の一般化座標を表す。

例として、剛性マトリクス K の導出法は以下の通りである。まず、ばね要素によるポテンシャルエネルギー U を次のように表す。

$$U = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N k_p \delta_p^2 \quad (2)$$

ここで、 k_p は p 番目のばね要素の剛性、 δ_p はその変形量、 N はばね要素の数を表す。各剛体を結合するばね要素の変形量が、一般化座標の線形結合で表される場合、これらのばねの変形により、 i 番目の自由度に影響する力が $\partial U / \partial q_i$ で表され、さらに、その影響力において j 番目の自由度の単位量の変位の寄与を K_{ij} で表すと、次式が得られる。

$$K_{ij} = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial U}{\partial q_j} = \sum_{p=1}^N k_p \frac{\partial \delta_p}{\partial q_i} \frac{\partial \delta_p}{\partial q_j} \quad (3)$$

同様に、減衰マトリクス C は、散逸関数 D と一般化速度 \dot{q}_i の関係から導出が可能である。さらに、質量マトリクス M は、慣性項が連成しないように、回転中心を物体重心位置に合わせて一般座標を選ぶこと

により、対角のみとなるため、対応する項に質量または慣性モーメントを挿入することにより生成可能である。このようにして、式(1)中の M, C, K 各マトリクスにおけるすべての項が決定される。

2.1.2 変形量の算出

前節で述べたように、式(1)中の剛性マトリクスはばね要素の変形量、減衰マトリクスは減衰要素の変形速度を基に算出される。従って、その導出のためには、各結合要素の変形量と変形速度を自動的に算出することが必要となる。変形量を求める手順は、解析モデルを図1に示すように、剛体 (Body)、地面 (Ground)、結合点 (CP) および結合要素 (TSD) の四つの基本要素で記述する。ここで、地面とは結合要素を介してモデルと結合され、外部からの作用を与える可動面である。このようにすると、結合要素の変形量は、要素両端の結合点間の相対変位となる。剛体が一つの並進または一つの回転運動の自由度を持つとした場合、各結合点の変位は次式で表される。

$$z_n = a_m z_m + b_m l_{mn} \theta_m \quad (4)$$

ここで、 z_n は結合点 n の変位、 z_m は剛体 m の変位、 l_{mn} は剛体 m の回転中心から結合点 n までの距離、 θ_m は剛体 m の角変位、 a_m, b_m は剛体 m の自由度の有無により以下のように決定される変数である。

$$\begin{aligned} \text{並進の自由度: } & \text{ 有りの場合 } a_m = 1, \\ & \text{ 無しの場合 } a_m = 0 \\ \text{回転の自由度: } & \text{ 有りの場合 } b_m = 1, \\ & \text{ 無しの場合 } b_m = 0 \end{aligned}$$

式(4)で各要素両端の結合点変位を求めることにより、結合要素の変形量 δ_p は、それらの相対変位として次式により与えられる。

$$\delta_p = z_n - z_{n+1} \quad (5)$$

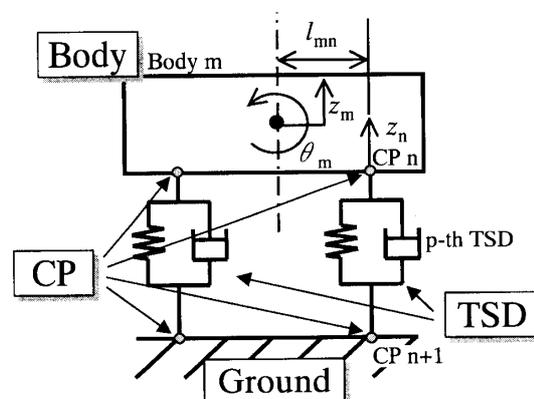


図1 Base element for model description

また、減衰要素の変形速度 δ_p は、式(5)を時間微分することにより得られる。

なお、上で述べた方法を3次元に拡張し、一つの剛体が三つの並進運動と三つの回転運動の6自由度を持つ系にも対応させることができる。

2.2 剛体間にピン結合が含まれる場合

例として、図2の左側に示すような、回転自由度 q_1 を持つ剛体1に、同じく回転自由度 q_2 を持つレバーの剛体2がピン結合され、剛性 k_{LU}, k_{LL} のばねで壁から拘束された2自由度系を考える。前節の方法によってこの系の運動方程式を導出するためには、剛体間で相対変位を生ずるような結合要素が必要となる。そこで、同図右側に示すように、仮想自由度 q_3^* を加え、仮想のばね k_{inf} により結合されているとした3自由度系のモデルに変更する。これにより、仮想自由度 q_3^* を含んだ運動方程式が導出され、質量、減衰、剛性の各マトリクス M, C および K が得られる。ここで、剛性マトリクスは式(6)で表される。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} b^2 k_{inf} & 0 & -b k_{inf} \\ 0 & l_{LU}^2 k_{LU} + l_{LL}^2 k_{LL} & l_{LU} k_{LU} - l_{LL} k_{LL} \\ -b k_{inf} & l_{LU} k_{LU} - l_{LL} k_{LL} & k_{LU} + k_{LL} + k_{inf} \end{bmatrix} \quad (6)
 \end{aligned}$$

ここで、3行目と3列目が仮想自由度 q_3^* に関する要素として含まれている。今、これらの剛体の関係をピン結合に戻すと、二つの剛体間の結合点には並進の相対変位が生じない。そこでは、仮想自由度 q_3^* が実際の自由度 q_1 または q_2 により表される。

$$q_3^* = \alpha q_1 + \beta q_2 \quad (7)$$

ここでは、このような自由度間の関係を従属と呼ぶことにする。 α と β は従属関係の係数で、図2の例の場合、 $\alpha = b, \beta = 0$ となる。このとき、仮想自由度 q_3^* は次の手順により運動方程式中から消去される。

(1) 式(6)の仮想自由度 q_3^* に関する第3行に従属関係の係数 b を掛ける。

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} b^2 k_{inf} & 0 & -b k_{inf} \\ 0 & l_{LU}^2 k_{LU} + l_{LL}^2 k_{LL} & l_{LU} k_{LU} - l_{LL} k_{LL} \\ -b^2 k_{inf} & b(l_{LU} k_{LU} - l_{LL} k_{LL}) & b(k_{LU} + k_{LL} + k_{inf}) \end{bmatrix}$$

(2) (1)で得られた行列の q_3^* に関する第3列に、同じく係数 b を掛ける。

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} b^2 k_{inf} & 0 & -b^2 k_{inf} \\ 0 & l_{LU}^2 k_{LU} + l_{LL}^2 k_{LL} & b(l_{LU} k_{LU} - l_{LL} k_{LL}) \\ -b^2 k_{inf} & b(l_{LU} k_{LU} - l_{LL} k_{LL}) & b^2(k_{LU} + k_{LL} + k_{inf}) \end{bmatrix}$$

(3) (2)で得られた行列において、従属関係を規定する自由度 q_1 に関する第1行に第3行を足し合わせる。

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & b(l_{LU} k_{LU} - l_{LL} k_{LL}) & b^2(k_{LU} + k_{LL}) \\ 0 & l_{LU}^2 k_{LU} + l_{LL}^2 k_{LL} & b(l_{LU} k_{LU} - l_{LL} k_{LL}) \\ -b^2 k_{inf} & b(l_{LU} k_{LU} - l_{LL} k_{LL}) & b^2(k_{LU} + k_{LL} + k_{inf}) \end{bmatrix}$$

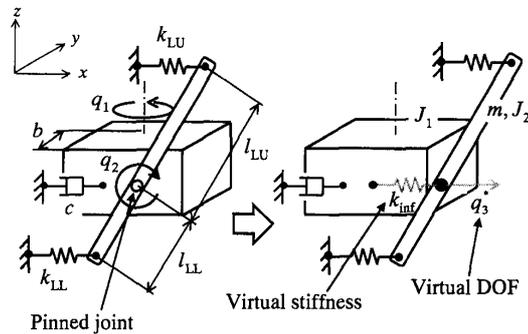
(4) 同様に、(3)で得られた行列において、第1列に第3列を足し合わせる。

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} b^2(k_{LU} + k_{LL}) & b(l_{LU} k_{LU} - l_{LL} k_{LL}) \\ b(l_{LU} k_{LU} - l_{LL} k_{LL}) & l_{LU}^2 k_{LU} + l_{LL}^2 k_{LL} \\ b^2(k_{LU} + k_{LL}) & b(l_{LU} k_{LU} - l_{LL} k_{LL}) \end{bmatrix}$$

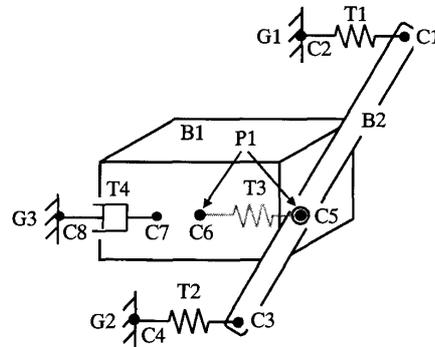
(5) (4)で得られた行列から、実際の自由度 q_1 と q_2 に関する $[2 \times 2]$ の行列を取り出す。

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} b^2(k_{LU} + k_{LL}) & b(l_{LU} k_{LU} - l_{LL} k_{LL}) \\ b(l_{LU} k_{LU} - l_{LL} k_{LL}) & l_{LU}^2 k_{LU} + l_{LL}^2 k_{LL} \end{bmatrix}$$

ここには、仮想のばね k_{inf} は現れない。次に、質量マトリクス、減衰マトリクスも、同様の操作で2自由度系に修正される。



(a) Addition of DOF



(b) Number of base element

図2 Example of modeling of a mechanism with pinned joint

$$M = \begin{bmatrix} J_1 + b^2 m & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} b^2 c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ここで、これら運動方程式の各マトリクスが正しく求められていることを示すため、シミュレーションで確認する。図2で示す系において、 q_1 が正の方向に回転したとき、レバーが、てこ長さとはね定数の条件により正負どちらの方向に回転するかを考える。その条件は表1に示すように3つに分けられ、各条件を満たすてこ長さとはね定数が例示される。レバー上部のてこ長さとはね定数を掛けた値 $l_{LU}k_{LU}$ が、レバー下部の値 $l_{LL}k_{LL}$ より小さい場合（条件1）はレバーは正の方向に回転し、反対に、 $l_{LU}k_{LU}$ が $l_{LL}k_{LL}$ より大きい場合（条件2）は負の方向に回転、そして、両者が等しい場合（条件3）はレバーは回転しないことになる。図3は、 q_1 にステップ入力を与えたときの q_2 のシミュレーション結果を示したものである。条件1の場合、 $q_2^{(1)}$ は正に、条件2の場合、 $q_2^{(2)}$ は負に、そして、条

表1 Cases of leverage condition

Case	$l_{LU}[m]$	$l_{LL}[m]$	$k_{LU}[kN/m]$	$k_{LL}[kN/m]$	
1	$l_{LU}k_{LU} < l_{LL}k_{LL}$	0.30	0.06	500	5500
2	$l_{LU}k_{LU} > l_{LL}k_{LL}$	0.06	0.30	5500	500
3	$l_{LU}k_{LU} = l_{LL}k_{LL}$	0.06	0.30	1000	5000

件の3の場合は $q_2^{(3)} = 0$ となり、予想される結果と一致していることが分かる。以上の結果より、ピン結合が含まれる場合の運動方程式が正しく求められていることが確認される。

3. 計算システムの構成

本計算システムは、図4に示すように、運動方程式自動生成プログラム EXPRESS と汎用の数値計算ソフトで構成される。プログラム EXPRESS は、前章で述べた理論を用いて運動方程式中の質量、減衰、剛性の各マトリクス M, C および K を生成し、それらを記号表現で書き込まれたファイルとして生成する。生成されたファイルはテキスト形式であり、汎用のテキストエディタにより印刷出力や他のアプリケーションへの貼り付けが可能である。なお、本プログラムシステムでは、数値計算ソフトとして汎用の MATLAB を

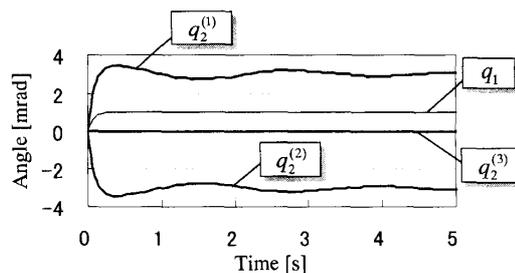


図3 Step response for leverage angles of example mechanism

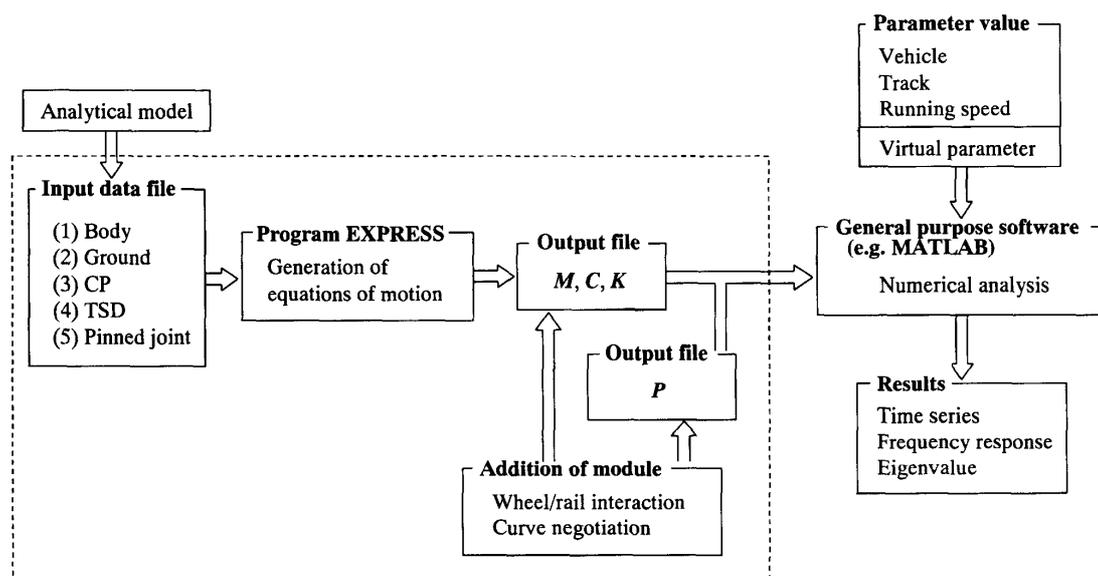


図4 System configuration

使用しており、出力ファイルへの書き込みはMATLABの書式に準じてなされる。そのため、数値計算においては生成された運動方程式をそのまま利用することができ、シミュレーション等による解析までの時間が短縮される。

計算結果を得るまでの流れは以下の通りである。まず、解析モデルをもとに、EXPRESSの入力データファイルをテキストエディタにて作成する。図5は入力データの例であり、図2の2自由度系の場合を示している。入力するデータは、2.1.2節で述べた4つの基

(1) Body										
Number,	Mass	Inertia,			Translation,		Rotation,			
		x,	y,	z,	x,	y,	z,	x,	y,	z,
B1,	0,	0,	0,	J1,	0,	0,	0,	0,	0,	1,
B2,	m,	0,	J2,	0,	1,	0,	0,	0,	1,	0,

(2) Ground	
Number,	
G1,	
G2,	
G3,	

(3) CP					
Number,	on Body,	Length,			
		x,	y,	z,	
C1,	B2,	0,	0,	lLU,	
C2,	G1,	0,	0,	0,	
C3,	B2,	0,	0,	-lLL,	
C4,	G2,	0,	0,	0,	
C5,	B2,	0,	0,	0,	
C6,	B1,	0,	-b,	0,	
C7,	B1,	0,	-b,	0,	
C8,	G3,	0,	0,	0,	

(4) TSD					
Number,	Stiffness,	Damping,	CP Number,		Direction
			S_End,	T_End,	
T1,	kLU,	0,	C1,	C2,	1,
T2,	kLL,	0,	C3,	C4,	1,
T3,	kinf,	0,	C5,	C6,	1,
T4,	0,	c,	C7,	C8,	1,

(5) Pinned Joint		
Number,	CP Number,	
	Virtual,	Non-Virtual,
P1,	C5,	C6,

図5 Input data for EXPRESS

本要素とピン結合部に関するもので、質量やばね定数などの特性と、各要素の結合の状態を入力する。それぞれの入力データの詳細は以下の通りである。

- (1) 剛体：剛体番号，質量， x, y, z 各軸回りの慣性モーメント，各軸方向の並進自由度の有無，各軸回りの回転自由度の有無（自由度の有無は，有りの場合1，無しの場合0）
- (2) 地面：地面番号
- (3) 結合点：結合点番号，当該結合点が置かれている剛体番号（結合点が置かれている剛体が地面の場合，番号の頭にGを付ける），各軸方向における回転中心からの距離
- (4) 結合要素：結合要素番号，ばね定数，減衰係数，始端結合点番号，終端結合点番号，作用方向（ x 方向は1， y 方向は2， z 方向は3）
- (5) ピン結合：ピン結合番号，仮想自由度を有する剛体上の結合点番号，同じく有しない剛体上の結合点番号

次に、プログラム EXPRESS は作成されたデータファイルを読み込み、運動方程式の各マトリクス M , C および K を生成し、図6に示すような記号表記のファイルを出力する。剛性マトリクスには仮想ばね k_{inf} が含まれているが、これは記号のままでの加減演算をしていないためである。この仮想変数は、テキストエディタ上で消去することも可能である。ただし、そのままでも数値解析ソフト上で任意の数値を代入することにより、数値表記された行列内で消去される。

生成された運動方程式の各マトリクスは、数値計算ソフトのプログラムファイルに記号表記のまま貼り付けられる。その後、別途用意された車輪・レール間相互作用力モジュールおよび曲線通過モジュールを付加し、計算プログラムが完成する。次いで、検討する車両、軌道および走行速度の各パラメータの数値、また、必要な場合には仮想パラメータの数値を入力すれば数値計算が実行され、時系列波形、周波数応答、固有値などの計算結果が得られる。

Mass matrix $M = \begin{bmatrix} J1 + b*b*m & 0 \\ 0 & J2 \end{bmatrix};$	Damping matrix $C = \begin{bmatrix} b*b*c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$
Stiffness matrix $K = \begin{bmatrix} b*b*kinf + b*(-b*kinf) + b*(-b*kinf + b*(kLU + kLL + kinf)) & b*(lLU*kLU - lLL*kLL) \\ b*(lLU*kLU - lLL*kLL) & lLU*lLU*kLU + lLL*lLL*kLL \end{bmatrix};$	

図6 Generated matrices for equations of motion

4. 強制操舵式車両への適用

4.1 強制操舵機構と車両モデル

操舵式鉄道車両とは、曲線軌道において車輪軸のヨー回転を容易にして曲線通過性を向上させる何らかの機構を備えた車両であり、自己操舵、強制操舵、アクティブ操舵などの方式がある。図7はボギー角連動式の強制操舵車両を例示しており、本報で着目するリンク機構を有する車両である。曲線中では、車輪フランジがレールに接触するため、台車はほぼ曲線に沿って進行する。これに対し、前後の二つの台車から支持、拘束される車体は台車中心間を結ぶ弦の方向を向くことになり、車体とそれぞれの台車の間に相対ヨー角（ボギー角 ψ_{BT} ）を生ずる。この操舵機構は、このボギー角に連動して操舵レバーを回転させ、前後の輪軸に“ハ”の字のラジアル姿勢をとらせることにより、良好な曲線通過性能を実現しようとする仕組みである。

図示するように、操舵レバーは車体に固定した操舵はり、および前後の輪軸とはそれぞればねを介して結合、台車枠とはピンで結合されており、ボギー角に従って機械的に動作する。すなわち、台車中心間隔を

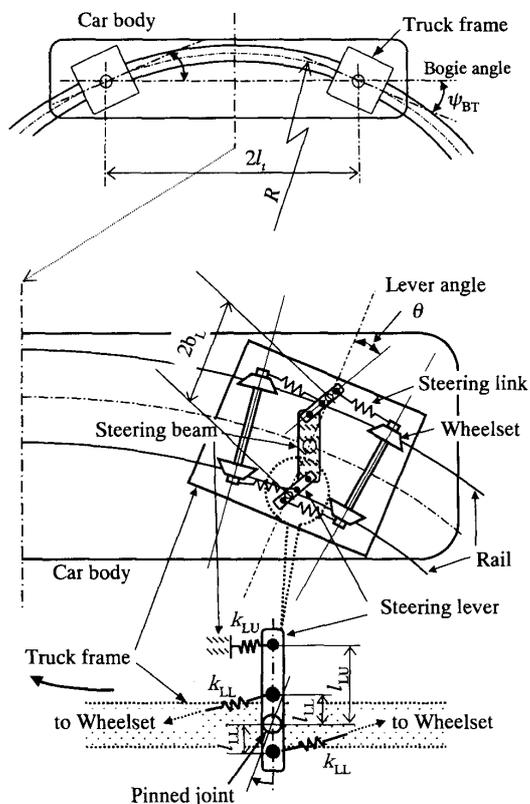


図7 Linkage mechanism for forced steering rail vehicle

$2l_T$ としてフランジ遊間（車輪フランジとレールの間の隙間）を無視すれば、半径 R （曲率 $\rho=1/R$ ）の曲線中では幾何学的に $\psi_{BT}=l_T/R$ となる。これにより、台車枠上の操舵レバーピン結合部は車体に対し前後方向におおよそ $\Delta x_T=b_L\psi_{BT}$ だけずれるため、上部長さが l_{LU} の操舵レバーは $\theta=\Delta x_T/l_{LU}=b_L l_T/(R l_{LU})$ だけ回転することになる。実際には、操舵レバーと車体側操舵はりとの結合部が剛性 k_{LU} のばねで支持されているため、ばねの伸びにより θ はこれより小さなものとなる。操舵レバーの回転 θ は、てこ比 $\gamma_L=l_{LL}/l_{LU}$ に応じた $\Delta x_A=\theta\gamma_L$ の前後変位により、剛性 k_{LL} のばねを介して前後の輪軸を逆方向に動かす。このような機構の動きは、外軌側では輪軸間隔を広げるように、また内軌側ではそれを狭めるように作用し、輪軸がそれぞれ曲線半径（ラジアル）方向に向かって操舵される。なお、台車内輪軸間距離を $2a$ とすると、てこ比の値としては幾何学的に $\gamma_L=a/l_T$ が理想の条件となるが、機構内のばねによる影響を考慮してやや大きめの値に設定される。

図8に本報で用いる車両モデルを示す。曲線通過性の検討を目的として、左右・ヨー・ロール系の運動自由度のみを考慮している。一般に車両構成が前後と左右方向にそれぞれ対称であれば、その運動方程式は上下・ピッチング・前後系と左右・ヨー・ロール系とに分離できる。また、ここでの検討の主対象が曲線通過性能を代表する車輪横圧であり、上下系の自由度に起

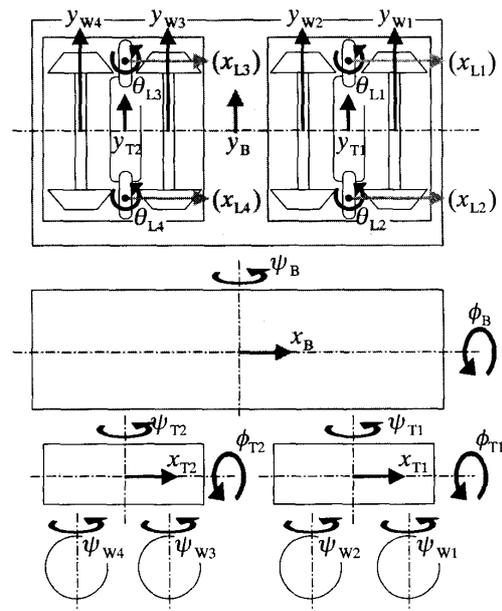


図8 Vehicle model

因する車輪荷重（輪重）の変動等の影響は小さいことを前提とする。

モデルの自由度は、車体で前後動 x_B , 左右動 y_B , ロール ϕ_B , ヨー ψ_B の 4 自由度, 前後 2 台車でそれぞれ前後動 x_{T1}, x_{T2} , 左右動 y_{T1}, y_{T2} , ロール ϕ_{T1}, ϕ_{T2} , ヨー ψ_{T1}, ψ_{T2} の 8 自由度, 4 本の車輪軸でそれぞれ左右動 $y_{W1} \sim y_{W4}$, ヨー $\psi_{W1} \sim \psi_{W4}$ の 8 自由度, 4 本の操舵レバーでそれぞれ回転 $\theta_{L1} \sim \theta_{L4}$ の 4 自由度の計 24 自由度である。左右の操舵レバー両方に回転の自由度を与えるのは、車体および台車が前後方向の自由度を持つためである。

ここで用いる車両モデルは、図 8 に示すように車体 1 個, 台車 2 個, 車輪軸 4 個, 操舵レバー 4 個の計 11 個の剛体からなるので、入力データファイルの作成において、まず各剛体 B1~B11 の自由度の有無を図 5 のフォーマットに従って指定する。ただし、ここでの自由度の指定では、4 本の操舵レバーがピン結合を含むので、それぞれ前後方向の仮想の自由度 $x_{L1} \sim x_{L4}$ を含めて指定しなければならない。

次に、地面は剛体と外部の可動面とが結合要素により結合されるときに設けられるが、ここで対象とするモデルの場合、剛体としての車輪軸とレールの間ではそのような結合とならないため、レールが地面として記述されない。したがって、このモデルでは地面は定義されない。

各剛体はばねやダンパを介して結合される。この車両モデルではこのような結合が 42 個所存在するが、ピン結合部の仮想ばねによる結合も加えると、合計で 46 個所となる。結合点はこれら結合個所の始端と終端に設けられるため、その個数は C1~C92 の 92 個となり、それぞれの結合点が置かれている剛体番号または地面番号、剛体の回転中心からの距離が指定される。

前述したように、剛体間の結合は 46 個所あるので、結合要素の個数は T1~T46 の 46 個となり、ばね定数、減衰係数、始端および終端の結合点、作用方向が指定される。ここで、結合要素はばね・ダンパ並列系を基本の単位としているが、ばねまたはダンパ単独による結合も可能である。この場合、存在しない要素には零が指定される。図 5 の例では仮想ばねの変数名を k_{inf} としているが、他の変数名と重複しない任意のものを使用できる。

ピン結合は 4 本の操舵レバー上にひとつずつあるので、その個数は P1~P4 の 4 個となり、それぞれ仮想側および非仮想側の結合点が指定される。

このように作成されたデータファイルが読み込まれ

ると、プログラム EXPRESS は 4 個の仮想自由度を含めた 28 元の運動方程式を生成した後、ピン結合データに基づいて仮想自由度の消去を行い、24 元に修正した運動方程式の各マトリクス M, C および K が出力される。

4.2 「車輪・レール間相互作用力」および「曲線」モジュールの付加

鉄道車両の横方向の運動に必要とされる車輪・レール間相互作用力と曲線それぞれのモジュールは既存の関係式³⁾より導かれ、プログラム EXPRESS により導出された運動方程式に付加される。

曲線中における車輪・レール間の相互作用力、いわゆるクリープ力は、輪軸の状態量と外乱である左右方向の軌道不整量 y_{Rn} （添え字の n は各輪軸位置を表す、以下も同じ）、軌道曲率 ρ_n により決定される。前後方向の縦クリープ力は左右の車輪で逆方向を向くので、輪軸に対してはモーメントとして作用する。第 n 輪軸に作用する縦クリープによるモーメント M_n は次式により計算される。

$$M_n = -2bf_1 \left(\frac{\Gamma}{r_0} (y_{Wn} - y_{Rn}) + \frac{b}{v} \dot{\psi}_{Wn} \mp b\rho_n \right) \quad (8)$$

ここに、 $(\dot{\quad})$ は時間による微分を表し、 f_1 は縦クリープ係数、 Γ は車輪の踏面勾配、 r_0 は中正位置での車輪転がり半径、 b は左右の車輪・レール接触点間隔の半分、 v は前進速度である。なお、式中の複号は曲線が右回りの場合に上号、左回りの場合に下号を用いる。

横クリープ力は左右の車輪で同方向に作用するので、第 n 輪軸に作用する左右方向のクリープ力 F_{2n} は次式となる。

$$F_{2n} = -2f_2 \left(\frac{1}{v} \dot{y}_{Wn} - \psi_{Wn} \right) \quad (9)$$

ここに、 f_2 は横クリープ係数を表す。なお、 $y_{Wn}, \dot{y}_{Wn}, \psi_{Wn}$ および $\dot{\psi}_{Wn}$ が車輪軸の左右動とヨーに関する状態である。

なお、輪軸の左右動変位がフランジ遊間（車輪フランジとレール間の隙間） $\pm\delta$ を越える場合には、その押付け量 Δy_{Wn} に対してレールの等価横剛性 k_R によるレール反力 F_{Rn} が輪軸に作用する。

$$F_{Rn} = -k_R \Delta y_{Wn} \quad (10)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \Delta y_{Wn} &= (y_{Wn} - \delta - y_{Rn}) : y_{Wn} > \delta + y_{Rn} \\ \Delta y_{Wn} &= (y_{Wn} + \delta - y_{Rn}) : y_{Wn} < -\delta + y_{Rn} \\ \Delta y_{Wn} &= 0 : -\delta + y_{Rn} \leq y_{Wn} \leq \delta + y_{Rn} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

次に、曲線を高速で通過すると、車両を構成する各

質量に超過遠心力が作用する。超過遠心力とは、カント（曲線軌道に設ける傾斜で、内軌レールに対する外軌レールの高さ S_S によって表す）による補償分を超えた遠心力である。例えば、質量 m_B の車体に作用する超過遠心力 F_{CB} は次式で計算される。

$$F_{CB} = \pm m_B v^2 \rho_B \mp m_B g S_B / G \quad (12)$$

ここに、 g は重力加速度、 G は軌間（左右レールの間隔）であり、 ρ_B と S_B はそれぞれ車体重心位置における軌道曲率およびカントを表す。式中の複号は曲線が右回りの場合に上号、左回りの場合に下号を用いる。車両を構成する他の6個の質量（台車枠2台、輪軸4本）についても同様にして計算される。

以上より、「車輪・レール間相互作用力」モジュールでは、式(8)および(9)から、各輪軸状態量の速度 \dot{y}_{Wn} , $\dot{\psi}_{Wn}$ に関する項の係数は減衰マトリクス C の、同じく変位 y_{Wn} , ψ_{Wn} に関する項のそれは剛性マトリクス K の該当要素にそれぞれ付加される。各輪軸位置の軌道不整量 y_{Rn} に関わる項の係数、および式(10), (11)のレール押付け量 Δy_{Wn} に関する係数のために、新たな入力マトリクス P が生成される。また、曲線通過を検討するモデルの場合、「曲線」モジュールによって、式(8)と式(12)にある ρ_n , ρ_B などの軌道曲率や S_B などのカント量に関わる項の係数が入力マトリクス P に付加される。このとき、式(1)右辺の外力ベクトル F は Pu で置き換えられる。なお、外乱ベクトル u の要素は、曲線通過用モデルとして、軌道不整 y_{Rn} が4個、レール押付け量 Δy_{Wn} が4個、軌道曲率 ρ_n , ρ_B などが各質量重心位置で7個、同じくカント量 S_n , S_B などが7個で、合計22個となる。

$$u = [y_{R1} \dots y_{R4} \Delta y_{W1} \dots \Delta y_{W4} \rho_1 \dots \rho_4 \rho_B \dots S_1 \dots S_4 S_B \dots]^T \\ = [y \ \Delta y_w \ \rho \ S]^T \quad (13)$$

ここに、軌道不整 y_R 、曲率 ρ およびカント S は軌道条件として前もって与えるものであり、レール押付け量 Δy_w はシミュレーションの過程で式(11)により計算される。

4.3 数値計算ソフト上の処理

数値計算ソフトを用いて解析を行うため、MATLAB上に貼り付けられた運動方程式の各マトリクス M, C, K および P は状態方程式の係数マトリクスに変換される。ここで、 M, C, K はそれぞれ $[24 \times 24]$ の行列、 P は $[24 \times 22]$ の行列であり、状態方程式は次式で表される。

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (14)$$

ここで、 $x = [q_1 q_2 \dots q_1 \dots q_{24} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \dots \dot{q}_1 \dots \dot{q}_{24}]^T$ は状態変数ベ

クトルである。状態方程式の係数マトリクスへの変換は以下の式により行われる。

$$A = \begin{bmatrix} 0_A & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}_{48 \times 48} \quad (15)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0_B \\ M^{-1}P \end{bmatrix}_{48 \times 22} \quad (16)$$

ここに、 0_A は $[24 \times 24]$, 0_B は $[24 \times 22]$ の零行列、 I は $[24 \times 24]$ の単位行列である。

4.4 数値解析例

プログラム EXPRESS で生成された強制操舵式車両の運動方程式を検証するため、数値シミュレーション（時系列波形）、周波数応答および固有値解析の計算を行う。車両諸元の基本値には在来線特急車両を想定した数値を使用する⁴⁾。

図9は先頭（第1）輪軸の走行距離 d_1 を横軸にとり、シミュレーションで得られた時系列波形の一例を示している。軌道条件は、直線から半径 $R = 400$ m

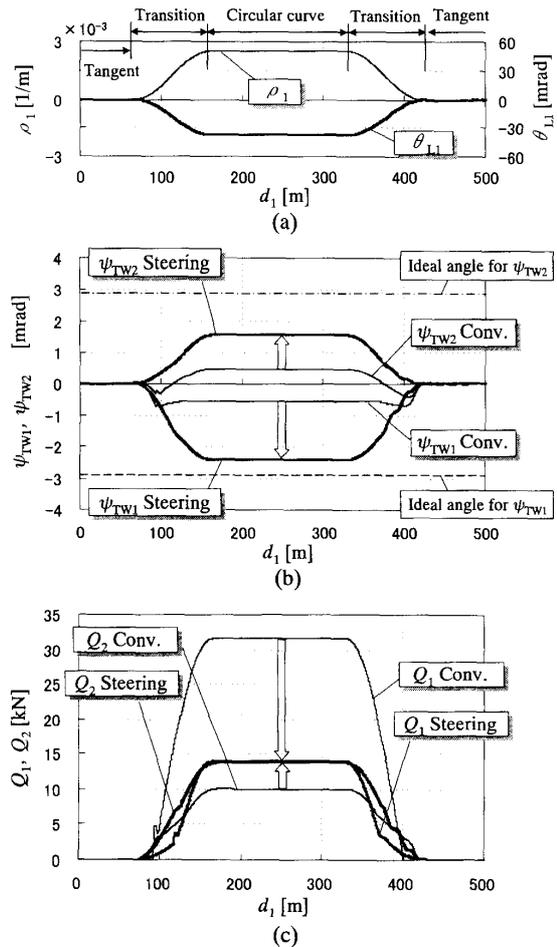


図9 Simulation of curve negotiation (R = 400 m, V = 120 km/h)

(曲率 $\rho=0.025$)、カント $S=95$ mm の曲線を通り直線へ至るものである。曲線は長さ 170 m の定常曲線 (曲率一定) と、定常曲線の両側に設けられる長さ 95 m の緩和曲線から構成される。緩和曲線では、定常曲線と直線を接続するために曲率とカントが滑らかに変化する。これは、図 9(a) に示す先頭輪軸位置の軌道曲率 ρ_1 の波形が変化している区間に相当する。なお、このシミュレーションでは、フランジ遊間を $\delta=6$ mm としてフランジ接触によるレール反力が考慮される他、クリープ力が摩擦力に飽和する特性⁵⁾も含まれている。曲線通過性能を明示するため軌道不整を考慮していない。走行速度の $V=120$ km/h は、当該半径における非振り子車両に対する制限速度より 45 km/h 速い条件となっており、今後、その実現が期待される速度である。

図 9(a) に示す前台車の操舵レバー回転角 θ_{L1} からは、軌道曲率 ρ_1 の変化に合わせてレバーが回転していることがわかる。当該車両は、左右の操舵レバーピン結合部間隔が $2b_L=2.0$ m、台車中心間距離が $2l_T=14.4$ m、レバー上部長さが $l_{LU}=0.3$ m であり、 $R=400$ m における幾何学的な操舵レバー回転角は $\theta=\Delta x_T/l_{LU}=b_L l_T/(R l_{LU})=0.06$ rad である。図示されるように、 θ_{L1} は約 0.04 rad にとどまっているが、これは 4.1 節で述べたように、操舵レバーと車体側操舵はりとの結合する剛性 k_{LU} のばねの伸びによるものである。

図 9(b) は、同じく d_1 に対する第 1 輪軸および第 2 輪軸の台車枠・輪軸間相対ヨー角 (操舵角) ψ_{TW1} 、 ψ_{TW2} を操舵の有無で比較したものである。操舵の無い従来車両の場合、輪軸間距離が $2a=2.3$ m の台車における理想の角度 $\psi_{TW}=a/R=0.0029$ rad に比べ、両軸ともに操舵角は絶対値でより小さなものとなる。これに対し、操舵車両の場合、両軸とも相対ヨー角の絶対値が増加して理想の角度に近づいている。これは、両輪軸がそれぞれ曲線半径方向を向き、曲線に沿う方向に操舵されていることを示している。なお、ここでの操舵でこ比は $\gamma_L=l_{LL}/l_{LU}=0.02$ であり、幾何学的な理想条件 $a/l_T=0.016$ に対して 1.25 倍の値を用いている。また、1 軸に対し 2 軸の相対ヨー角の絶対値が小さいのは、2 軸に作用するクリープモーメントが 1 軸に作用するそれより大きく、2 軸側の操舵レバー下部連結ばね k_{LL} (図 7 参照) の変形量が大きくなるためである。

図 9(c) は、同じく d_1 に対する第 1 輪軸および第 2 輪軸の横圧 Q_1 、 Q_2 を操舵の有無で比較したものであ

る。操舵の無い場合に 32 kN あった 1 軸の横圧が、操舵車両では約 14 kN まで低減している。反対に、2 軸の横圧は増加してはいるものの、両者の値はほぼ等しいものとなっている。以上の結果より、本プログラムが強制操舵式車両に期待される挙動を再現することが示される。

次に、図 10 は当該車両が振幅 $Y_R=1$ mm の正弦波状の左右不整がある軌道を走行したときの周波数応答である。ここでは、第 1 (先頭) 輪軸位置の不整量を $y_{R1}=Y_R \sin 2\pi f t$ とすれば、各輪軸位置のそれは、先頭軸からの距離と速度 v で決まる時間遅れ t_{dn} により、 $y_{RS}=Y_R \sin 2\pi f (t-t_{dn})$ で与えられる。すなわち、台車輪軸間距離 $2a$ と台車中心間距離 $2l_T$ を用いて、第 2 輪軸位置で $t_{d2}=2a/v$ 、第 3 輪軸位置で $t_{d3}=2l_T/v$ 、第 4 輪軸位置で $t_{d4}=2(a+l_T)/v$ である。これらの軌道不整 y_{Rn} は式 (8) にしたがって縦クリープ力によるモーメントとして車輪軸に作用する。周波数応答計算では、車両モデルの各状態量 q_i が軌道不整入力と同じ周波数 f で振動するものとして $q_i=X_i \sin 2\pi f t$ と置き、周波数 f ごとにその複素振幅 X_i が求められる。これは直線軌道上の走行条件であり、外乱を軌道不整のみとし、クリープ力も摩擦力への飽和特性は考慮しない。図の応答は、車体床面での大きさに換算した前後の各台車中心位置上の加速度振幅 a_{fr} と a_{tr} を示している。一般に、加速度は車両の乗り心地評価に用いられるものであるが、車体の振動モードである左右動、ヨー、ロール間相互の位相差で車体前側と後側の加速度の大きさに違いを生じていることが図示される。これは鉄道車両の走行振動の特徴を表すものである。

最後に、固有値解析により安定走行の限界速度 V_c を求める。一般に鉄道車両の輪軸では、車輪が車軸と

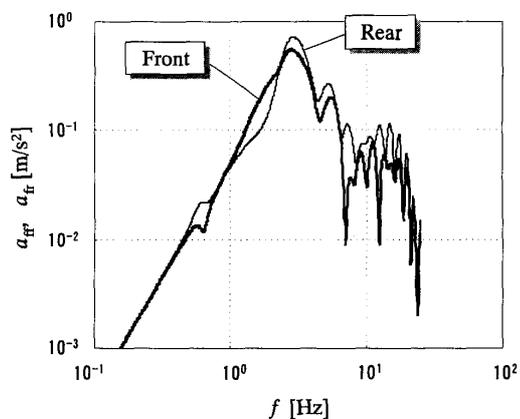


図10 Frequency response of car body acceleration

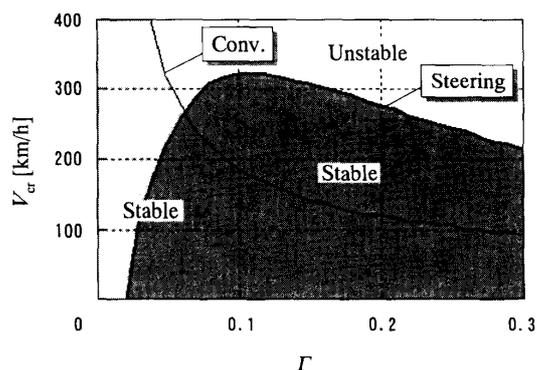


図11 Eigenvalue analysis of critical speed for running stability

一体で固定されている。この車輪踏面は勾配を有し、輪軸が左右に変位すると左右車輪の転がり半径に差を生じ、縦クリープ力によるモーメントが輪軸を一方方向に変位させながら中立位置に戻ろうとする作用を与え、輪軸に蛇行運動を生じさせる。この蛇行運動の安定性は走行速度に依存し、低速では時間の経過とともに蛇行運動は減衰するが、高速になると不安定化し発散する傾向がある。安定限界速度とは、このような蛇行運動が減衰せず、振幅が一定となる速度である。ここでは、式(15)のA行列を用いて振動系の固有値を求める。A行列の要素には、すでに式(8)、式(9)からクリープ力中の輪軸状態量に関わる項が付加されており、そこには速度(秒速) v が含まれる。固有値解析では、この速度 v を増加させながら24個の運動自由度に対応する固有値 $\lambda_i = Re_i + j \cdot Im_i$ を求める。求めた固有値のいずれかで、初めて実部 Re_i の符号が負から正に変わるときの速度が限界速度 v_{cr} であり、 V_{cr} はそれを時速で表したものである。図11では、車輪踏面勾配 Γ をパラメータとした上で、この限界速度を操舵機構の有無で比較したものである。操舵の無い従来車両の場合、 Γ が大きくなるほど V_{cr} が低くなるのに対し、操舵車両の場合には、 V_{cr} は Γ が0.1付近で最大となり、従来車両とは反対に Γ が0に近づくと急減することが示される。このような操舵機構の付加による限界速度の特徴は、これまでに報告された例⁶⁾とも一致するものである。

以上の計算例により、プログラム EXPRESS によ

って生成された運動方程式が妥当なことが示されたものとする。

5. おわりに

振動系にリンク機構を含む鉄道車両への適用を考慮した剛体系運動方程式自動生成プログラム EXPRESS を作成し、汎用数値計算ソフトとの組み合わせによる運動解析システムを構築した。EXPRESS には、「車輪・レール間の相互作用力」と「曲線」のモジュールが用意され、鉄道車両の曲線通過を模擬するための運動方程式を記号表現で生成することができる。その適用例として、強制操舵式車両の運動方程式を自動生成し、それらを用いて数値シミュレーション、周波数応答、および固有値解析の計算を行った。そこで得られた計算結果は強制操舵式車両の特徴をよく模擬するものであり、本プログラムにより自動生成された運動方程式の妥当性が示された。本プログラムの活用により、複雑な機構を有する新方式車両を数値解析するまでの時間を短縮する事が可能となる。本運動解析システムでは、運動方程式生成手順の簡便性だけでなく、これまでに作成した鉄道車両の運動解析・評価プログラムをそのまま利用できることが特長である。

なお、本報で報告した範囲は、システムとしてはまだ基本部分のみで、対象とする車両構造が限定されている。今後、プログラム EXPRESS の適用性を高めるために、さらなるモジュール追加と使い易さの向上のための改善を進める予定である。

参考文献

- 1) W. Cortum and R. S. Sharp: Multibody Computer Codes in Vehicle System Dynamics, Vehicle System Dynamics, Suppl. to 22, 1/267 (1993)
- 2) R. J. Anderson: A General, Multi-body Approach to Dynamic Modeling of Rail Vehicles, Proc. 1983 ASME International Computers in Engineering Conference, No.G00230, 223/228 (1983)
- 3) 丸山, 景山: 機械技術者のための鉄道工学, 122/138, 丸善株式会社 (1981)
- 4) 日本機械学会編: 鉄道車両のダイナミクス, 30, 電気車研究会 (1994)
- 5) 例えば, 文献3)の27/29ページ
- 6) R. E. Smith and R. J. Anderson: Characteristics of Guided-Steering Railway Trucks, Vehicle System Dynamics, 17, 1/36 (1988)