Japan Society for Simulation Technology

《論　文》

論 21-2

Trefftz 法によるポアソン方程式の境界値問題の解法（非同次項に未知関数の導関数を含む場合）†

池田洋一*・北　英輔**・神谷紀生***

ABSTRACT This paper describes the applicaiton of Trefftz method to the boundary value problem governed with the two-dimensional Poisson equation. Trefftz method is formulated with regular Trefftz functions (T-complete functions) satisfying the governing equation. When Trefftz method is applied to the Poisson equation, it is generally difficult to derive the Trefftz functions for the problem. For overcoming this difficulty, this paper presents the following scheme. A non-homogeneous term containing an unknown function and it derivatives are approximated by the polynomial in the Cartesian coordinates and then, the solution for the Poisson equation is approximated with the superposition of the Trefftz function of the Laplace equation and the particular solutions related to the approximate polynomal. Unknown parameters included in the approximate solution are determined so that the solution satisfies the boundary conditions. The present scheme is applied to some examples in order to study the numerical properties.

1. はじめに

Trefftz 法は，支配方程式を満足する非特異な Trefftz 関数を用いた境界型数値解析法である[1~7]．この方法では，最初に Trefftz 関数を用いて問題の解を線形近似し，近似解が境界条件を満足するように未知係数を決定する．本論文では定式化に選点法を利用するので，未知係数についての連立方程式を導出するときに要素や要素積分を必要としない解析法となる．ところで，Trefftz 法の適用対象はポテンシャル問題や2次元弾性問題など，主として同次微分方程式に支配された問題に限られていた．これは，Trefftz 法をポアソン方程式などの非同次方程式を支配方程式とする境界値問題の解析に適用する場合，一般形で与えられた非同次項を含む支配方程式に対する Trefftz 関数の導出が困難なためである．そこで，本論文では非線形ポアソン方程式に対する Trefftz 法について述べる．

非同次項に関する問題は，同じ境界型数値解析法である境界要素法でも生じる．境界要素法では，非同次項を含む支配微分方程式から境界積分方程式を導出すると積分方程式に領域積分項が含まれるので，解析に領域メッシュを必要とし，境界の要素分割だけで解析できる境界要素法の利点を失うことになる．この問題を解決するために，境界要素法では多重相反法（Multiple Reciprocity Method, MRM）[8,9]，二重相反法（Dual Reciprocity Method, DRM）[10]，計算点解析法[11,12]などが提案されている．多重相反法では相反定理を繰り返し適用し，領域積分項を境界積分の無限級数に変換する．二重相反法では，非同次項を比較的簡単な関数で近似し，近似非同次項に対応する特解と相反定理を適用することで領域積分を境界積分に変換する．一方，計算点解析法では，最初に未知関数を含む非同次項を直交座標系の完全多項式で仮定し，相反定理を適用することで領域積分項を境界積分に変換する．これらの方法では支配微分方程式から導出した積分方程式に相反定理を適用することで，領域積分項を境界積分に変換している．しかし，本論文で述べる Trefftz 法の定式化では積分方程式を用いないので，上記の方法をそのまま適用することはできない．

そこで，Trefftz 法を用いた非線形ポアソン方程式の

Trefftz Solution of Boundary-Value Problem with Poisson Equation (In Case of Non-homogeneous Term Including Derivatives of Unknown Function). By *Youichi Ikeda* (Department of Mechanical Engineering, Daidoh Institute of Technology), *Eisuke Kita* (School of Informatics & Sciences, Nagoya University) and *Norio Kamiya* (Graduate School of Human Informatics, Nagoya University).

* 大同工業大学機械工学科
** 名古屋大学情報文化学部
*** 名古屋大学人間情報学研究科

† 2001 年 9 月 11 日受付　2001 年 12 月 12 日再受付

NII-Electronic Library Service

Japan Society for Simulation Technology

解法として，著者らは神谷ら[11]が提案した計算点解析法をTrefftz法に組み合わせた方法を提案している[13]．この方法では，最初に未知関数を含んだ非同次項を直交座標系について完全多項式で近似し，境界値問題の解を同次方程式（ラプラス方程式）のTrefftz関数と近似非同次項に対する特解の重ね合わせで近似する．この近似解を用いて，非同次方程式についての境界値問題を同次方程式についての境界値問題に変換する．そして，同次方程式についての境界値問題を解いて問題の解を決定し，非同次項を満たすように近似多項式の係数を更新する．同様な目的で，真鍋ら[14]はTrefftz法に二重相反法を適用したポアソン方程式の解法を提案している．しかし，彼らの方法は非同次項に未知関数が含まれない問題だけを扱っている．これに対して，著者らは先の論文で非同次項が未知関数の関数である場合への適用を示し，本論文では非同次項が未知関数を含むだけでなく，未知関数の導関数についての関数として与えられる場合への拡張について述べる．非同次項に未知関数の導関数を含む問題を境界要素法で解析する場合について二重相反法や計算点解析法を適用すると，未知関数の導関数を計算するためだけに別の定式化を必要とする．これに対して，Trefftz法では未知関数がTrefftz関数の線形結合で近似されているので，これを直接微分するだけで未知関数の導関数を求めることができて，同じ境界型解析法である境界要素法よりも定式化が簡単となる．

最後に，提案する方法をいくつかの解析例に適用し，解析結果を厳密解と比較することで解法の特徴について議論する．

2. 2次元ラプラス方程式の境界値問題に対するTrefftz法の定式化

本論文で提案する方法では，2次元ポアソン方程式の境界値問題が2次元ラプラス方程式の境界値問題に変換される．そこで，最初に，2次元ラプラス方程式の境界値問題に対するTrefftz法の定式化について述べる．

2.1 2次元ラプラス方程式の境界値問題とTrefftz関数

2次元ラプラス方程式の境界値問題は次のようになる．

$$\nabla^2 u = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} u &= \bar{u} \quad (\text{on } \Gamma_u) \\ q &= \bar{q} \quad (\text{on } \Gamma_q) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

ここで$q \equiv \partial u / \partial \boldsymbol{n}$であり，$\Omega, \Gamma_u, \Gamma_q$はそれぞれ解析対象領域，ポテンシャル$u$とフラックス$q$の指定境界である．$\boldsymbol{n}$は境界単位法線ベクトル，$(\bar{\cdot})$は既定値を示す．

Trefftz法では定式化にTrefftz関数とよばれる非特異な関数群（T-cocmplete function）を用いる．T-complete関数は支配方程式を満足するように決定されており，2次元閉領域における2次元ラプラス方程式について次のように与えられる[4]．

$$\begin{aligned} u^{*T} &= \{u_1^*, \cdots, u_{2\mu-1}^*, u_{2\mu}^*, \cdots\} \\ &= \{1, \cdots, \Re[r^u e^{j\mu\theta}], \Im[r^u e^{j\mu\theta}], \cdots\} \end{aligned} \tag{3}$$

ここでr, θは平面極座標であり，その原点は任意にとられる．

2.2 選点法による定式化

ポテンシャルuをTrefftz関数u_j^*の線形結合で次のように近似する．

$$\begin{aligned} u \simeq \tilde{u} &= a_1 u_1^* + a_2 u_2^* + \cdots + a_N q_N^* \\ &= \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{u}^* \end{aligned} \tag{4}$$

ここでNはTrefftz関数の総数を，$\boldsymbol{a} = \{a_1, \cdots, a_N\}^T$は未知係数ベクトルを示す．この式を境界の法線方向に偏微分すれば境界でのフラックスの近似式を得る．

$$\begin{aligned} q \simeq \tilde{q} \equiv \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} &= a_1 q_1^* + a_2 q_2^* + \cdots + a_N q_N^* \\ &= \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{q}^* \end{aligned} \tag{5}$$

これらを式（2）に代入すると境界条件は完全には満足されないので残差が生じる．つまり，

$$\left.\begin{aligned} R_u &\equiv \tilde{u} - \bar{u} = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{u}^* - \bar{u} \neq 0 \quad \text{on } \Gamma_u \\ R_q &\equiv \tilde{q} - \bar{q} = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{q}^* - \bar{q} \neq 0 \quad \text{on } \Gamma_q \end{aligned}\right\}$$

Trefftz法では境界条件を満足するように係数ベクトル$\boldsymbol{a}$を定める．選点法による定式化では境界選点P_iで，上式の残差を0とおく．つまり，

$$\left.\begin{aligned} R_u(P_i) &= \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{u}^*(P_i) - \bar{u}(P_i) = 0 \quad (P_i \in \Gamma_u) \\ R_q(P_i) &= \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{q}^*(P_i) - \bar{q}(P_i) = 0 \quad (P_i \in \Gamma_q) \end{aligned}\right\}$$

上式を整理すると，

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f} \tag{6}$$

ここで，

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} u_{11}^* & \cdots & u_{1N}^* \\ \vdots & & \vdots \\ u_{M_u 1}^* & \cdots & u_{M_u N}^* \\ q_{11}^* & \cdots & q_{1N}^* \\ \vdots & & \vdots \\ q_{M_q 1}^* & \cdots & q_{M_q N}^* \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{f} = \{\bar{u}_1, \cdots, \bar{u}_{M_u}, \bar{q}_1, \cdots, \bar{q}_{M_q}\}^T \tag{8}$$

ただし，$u_j^*(P_i) \equiv u_{ij}^*, q_j^*(P_i) \equiv q_{ij}^*, \bar{u}(P_i) \equiv \bar{u}_i, \bar{q}(P_i) \equiv \bar{q}_i$である．また，$M_u, M_q$はそれぞれ$\Gamma_u, \Gamma_q$上にとられた選点の総数である．係数マトリックス$\boldsymbol{K}$において，行数は選点総数に等しく，列数はTrefftz関数の総数に等しいので，選点総数をTrefftz関数の総数以上に取り，LAPACK

NII-Electronic Library Service

Japan Society for Simulation Technology

ソフトウェアの特異値分解[15]を適用して連立方程式を解くことにする.

3. 2次元ポアソン方程式の境界値問題に対するTrefftz法の定式化

3.1 境界値問題

ここでは，ポアソン方程式の境界値問題の支配方程式と境界条件が次式で与えられる場合を考える.

$$\nabla^2 u + b(x,y,u,u_{,x},u_{,y}) = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} u &= \bar{u} \quad (\text{on } \Gamma_u) \\ q &= \bar{q} \quad (\text{on } \Gamma_q) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

ここで$u_{,x} \equiv \partial u/\partial x, u_{,y} \equiv \partial u/\partial y$である.

3.2 境界値問題の変数変換

最初に，非同次項$b(x, y, u, u_{,x}, u_{,y})$を直交座標系$x,y$の5次完全多項式を用いて近似する．つまり，

$$\begin{aligned} b(x,y,u,u_{,x},u_{,y}) &= c_1 + c_2 x + c_3 y + \cdots \\ &\quad + c_{20} x y^4 + c_{21} y^5 \\ &= \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{r} \end{aligned} \tag{11}$$

ここで，$\boldsymbol{c}$と$\boldsymbol{r}$は未知係数ベクトルと完全多項式の各項から成るベクトルであり，それぞれ次式で与えられる.

$$\boldsymbol{c}^T = \{c_1, c_2, \cdots, c_{21}\} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}^T &= \{r_1, r_2, \cdots, r_{21}\} \\ &= \{1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2 y, xy^2, \\ &\quad y^3, x^4, x^3 y, x^2 y^2, xy^3, y^4, \\ &\quad x^5, x^4 y, x^3 y^2, x^2 y^3, xy^4, y^5\} \end{aligned} \tag{13}$$

式(11)を用いると解くべき支配微分方程式は次式で近似される.

$$\nabla^2 u + \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{r} = 0 \tag{14}$$

ところで，一般に完全多項式の次数は大きいほど高い近似精度を期待できる．しかし，$\boldsymbol{c}$の更新量を求めるための連立方程式の係数行列の特異性は近似多項式の次数に依存するので，ここでは連立方程式の特異性と連立方程式を解くために用いる特異値分解法の精度の点から5次までの完全多項式で非同次項を近似している.

式（14）の同次解をu^h，r_iに対応する特解をu_i^pとすれば，境界値問題の解uは次式で近似される.

$$\begin{aligned} u &= u^h + c_1 u_1^p + c_2 u_2^p + \cdots + c_{21} u_{21}^p \\ &= u^h + \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{u}^p \end{aligned} \tag{15}$$

ここで$\boldsymbol{u}^p = \{u_1^p, u_2^p, \cdots, u_{21}^p\}^T$であり，$u^h, u_i^p$は次式を満足する.

$$\nabla^2 u^h = 0 \tag{16}$$

$$\nabla^2 u_i^p + r_i = 0 \tag{17}$$

r_iは多項式の項であるから，u_i^pを容易に求めることができる．なお，特解u_i^pの具体形を付録に示す.

式(15)を支配方程式と境界条件に代入すると境界値問題は次式に変形できる.

$$\nabla^2 u^h = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{18}$$

$$\left.\begin{aligned} u^h &= \bar{u} - \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{u}^p \quad (\text{on } \Gamma_1) \\ q^h &= \bar{q} - \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{q}^p \quad (\text{on } \Gamma_2) \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

ここで，$q^h \equiv \partial u^h/\partial n, q^p \equiv \partial u^p/\partial n$である.

このように，問題は同次解u^hについてのラプラス方程式の境界値問題に変形されたので，未知係数$\boldsymbol{c}$があらかじめ決定できれば，先に述べたTrefftz法の定式化に従って2次元ラプラス方程式の境界値問題を解析することでu^hを決定することができる．ひとたびu^hが決定されれば，解uは式（15）より決定される．しかし，この場合$\boldsymbol{c}$は未知関数uの関数なので，あらかじめ定めることができないので反復収束計算が必要となる．つまり，最初に$\boldsymbol{c}$を仮定して解析を行い，得られたuから非同次項を計算して，式（11）を満足するように未知係数を変更することになる．この方法について以下に説明する.

3.3 未知係数の更新法

まず，式（11）を繰り返し計算kと$(k+1)$回目について考えると次式となる.

$$b^{(k+1)} = \boldsymbol{r}^T \boldsymbol{c}^{(k+1)}$$

$$b^{(k)} = \boldsymbol{r}^T \boldsymbol{c}^{(k)}$$

左辺と右辺をそれぞれ引き算すると次式となる.

$$\begin{aligned} b^{(k+1)} - b^{(k)} &= \boldsymbol{r}^T (\boldsymbol{c}^{(k+1)} - \boldsymbol{c}^{(k)}) \\ &\equiv \boldsymbol{r}^T \Delta \boldsymbol{c} \end{aligned} \tag{20}$$

そして，境界上と領域内に取られたいくつかの評価点（これを，計算点と呼ぶ）において式（20）を選点法的に満足するように$\Delta \boldsymbol{c}$を決定することを考える．つまり，計算点Q_iについて式（20）を考えると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}^T(Q_i)\Delta \boldsymbol{c} &= b^{(k+1)} - b^{(k)} \\ &= b(u^{(k)}) - \boldsymbol{r}^T \boldsymbol{c}^{(k)} \\ &\equiv \Delta b(Q_i) \end{aligned}$$

となり，全ての計算点Q_iで上式を考えて連立方程式とすると次式になる.

$$\boldsymbol{D}\Delta \boldsymbol{c} = \boldsymbol{f} \tag{21}$$

ここで$\boldsymbol{D}$と$\boldsymbol{f}$は，それぞれ完全多項式の項から成る行列と非同次項に関する係数ベクトルである．式（21）をLAPACKソフトウェアの特異値分解[15]によって解いて$\Delta \boldsymbol{c}$を決定し，それを用いて$\boldsymbol{c}$を次式で更新する.

$$\boldsymbol{c}^{(k+1)} = \boldsymbol{c}^{(k)} \Delta \boldsymbol{c} \tag{22}$$

収束判定条件を次式のように定義する.

$$\eta \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} |\Delta b(Q_i)| < \eta_e \tag{23}$$

ここで，Mは計算点の総数を，η_eはユーザーによって定義された正の定数を示す.

NII-Electronic Library Service

Japan Society for Simulation Technology

ところで，非同次項に未知関数 u の導関数を含む場合，式（21）の右辺項を計算するために，u の導関数を計算する必要がある．Trefftz 法では，u は式（4）で表されるので，これを直接微分すれば導関数を評価できる．つまり，

$$u_{,x} = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{u}^*_{,x} \tag{24}$$

$$u_{,y} = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{u}^*_{,y} \tag{25}$$

$\boldsymbol{u}$ は非特異な関数なので，これを x,y で解析的に微分することは容易である．

なお，境界要素法における多重相反法（DRM）あるいは計算点解析法では，非同次項に未知関数の導関数を含む場合には，非同次項の近似表示とともに未知関数自体の近似表示を必要とする．これに対して，本論文で提案する Trefftz 法では式（4）に示されるように未知関数 u が Trefftz 関数の線形結合で近似されるので，それを直接微分するだけで導関数の表示式を得ることができる．この点において，境界要素法における二重相反法あるいは計算点解析法を用いる方法よりも，計算がかなり簡素化されることになる．

3.4 解析アルゴリズム

上記の計算アルゴリズムを示すと以下のようになる．

(1) $k \leftarrow 0$ として，$\boldsymbol{c}^{(0)}$ を仮定する．

(2) 式（18）と式（19）で与えられる境界値問題を解き，計算点での非同次項 b を計算する．

(3) 収束判定を行う．条件を満足すれば結果を出力し，満足しなければ次へ進む．

(4) 連立方程式（21）を解いて $\Delta \boldsymbol{c}$ を決定する．

(5) $\boldsymbol{c}$ を更新して k をインクリメントし，(3) へ進む．

4. 解析例

4.1 例題 1

最初の例題として，支配方程式が次式で与えられる場合を考える．

$$\nabla^2 u + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

境界条件は**図1**に示されたように与える．この問題の解析解は次式で与えられる．

$$u^{ex} = \frac{1 + e^2 - 2e^{1-x}}{e^2 - 1}$$

解析のために境界上に選点を 44 個等間隔に配置する．かどのところには，2つの選点をいわゆる2重選点として配置する．この場合1つのかど点上に2つの選点が配置され，それらは同一座標を持つとともに，異なる境界法線と境界条件値を与えられる．それ以外に内点をそれぞれ M_c=0,1,5,17,21 個配置する場合を比較する．境界選点と内点は**図2**に示すように均等に配置される．境界選点や内点の配置は未知パラメータを求めるための連立方程式の係数行列の特異性と関連しているので注意が必要である．未知パラメータを求めるための連立方程式の係数行列の特異性を考慮して，この問題では図のような配置を用いる．計算点として全ての境界点と内点をとり，解析に用いる Trefftz 関数の総数は 44 個である．また，係数 c_i の初期値は全て 0 とする．

領域全体での計算精度を検討するために，25 個の精度評価点を境界と領域内に均等に配置し，計算精度指標として次式を用いる．

$$E_u = \frac{1}{25} \sum \left| u - u^{ex} \right|$$

η の収束状況を**図3**に示す．横軸には繰り返し計算の

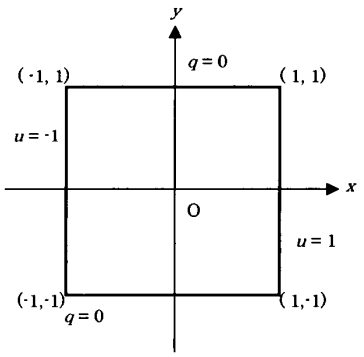

図1　解析例 1

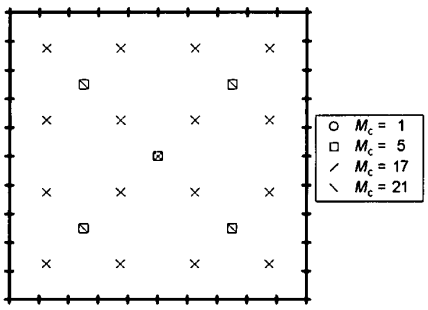

図2　境界選点と計算点の配置

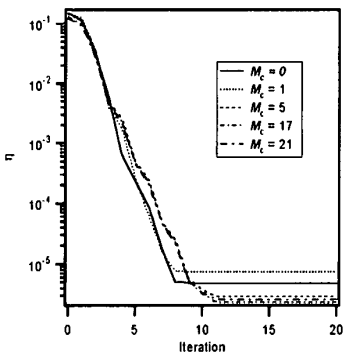

図3　η の収束状況

NII-Electronic Library Service

Japan Society for Simulation Technology

回数を，縦軸にはηの値をとる．内点数M_c=0,1の場合8回の繰り返し計算で収束しているが，ηの最終値はM_c=0の場合の方が小さい．M_c>1の場合は11回目で収束しており，ηの最終値は内点数が多いほど小さくなっている．次に，E_uの収束状況を**図4**に示す．横軸には繰り返し計算の回数を，縦軸にはE_uの値をとる．この場合は内点数が多いほど収束に至る回数は多くなるが，E_uの最終値も内点数が多いほど小さい．M_c=0と21で解析を行い，十分収束したときのuの分布を**図5**と**図6**に示す．横軸には，精度評価点のx座標を取り，縦軸にはu値を取る．これよりM_c=0よりもM_c=21のほうがuの最終値が理論解に良く一致していることがわかるが，その違いはわずかである．

最後に，M_c=21の場合における未知係数c_iの収束状況を**図7**に示す．グラフから分かるように，未知係数c_iの収束状況は早いことが確認できる．そして，係数の最終的な値はc_1=0.851,c_2=−0.851,c_4=0.425,c_7=−0.142,c_{11}=0.0373で，それ以外の数値はほぼ0に収束した．従って，これらの値を式(11)へ代入すると非同次項は次式に収束していることがわかる．

$$b = c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 x^2 + c_5 xy + c_6 y^2 + c_7 x^3 + c_8 x^2 y + c_9 xy^2 + c_{10} y^3 + c_{11} x^4 + \cdots$$
$$\simeq 0.851 - 0.851x + 0.425x^2 - 0.142x^3 + 0.0373x^4$$

ところで，この問題の解析解は$u^{ex}=(1+e^2-2e^{1-x})/(e^2-1)$で与えられるので，非同次項の理論式を求めると次式となる．

$$b^{ex} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2e^{1-x}}{e^2-1}$$

これらをグラフ表示して比較すると**図8**のようになる．ここで実線は理論的な非同次項を破線は収束計算により求められた非同次項を示している．これにより，解析領域$-1 \le x \le 1$において収束計算で求めた非同次項は解析解から求めた非同次項と良く一致していることがわ

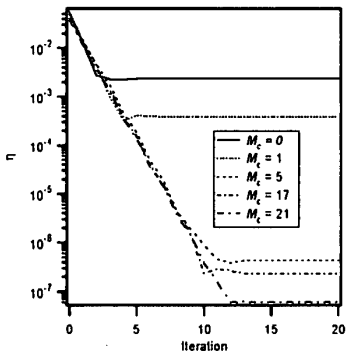

図4　E_uの収束状況

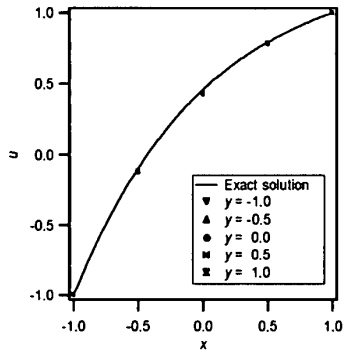

図5　ポテンシャルの分布（M_c=0）

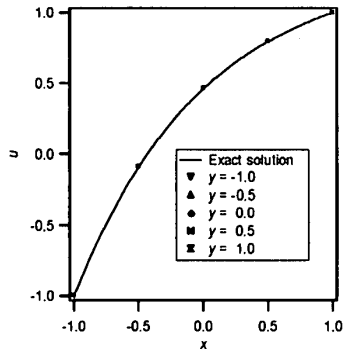

図6　ポテンシャルの分布（M_c=21）

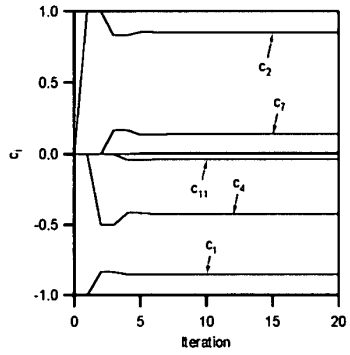

図7　係数c_iの収束状況（M_c=21）

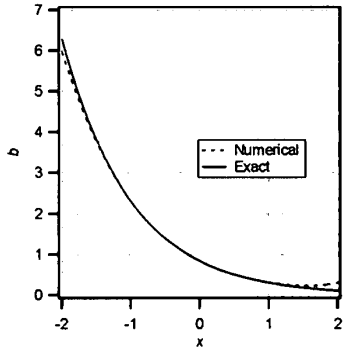

図8　非同次項の比較（M_c=21）

NII-Electronic Library Service

Japan Society for Simulation Technology

かる.

4.2 例題2

次の例題として，支配方程式が次式で与えられる場合を考える.

$$\nabla^2 u - 6\sqrt{y}\sqrt{\frac{\partial u}{\partial x}} = 0$$

解析領域を**図9**に示す．境界条件は，解析解が次式で与えられるように指定する.

$$u^{ex} = 3x^3 y$$

解析のために境界上に選点を44個等間隔に配置する．かどのところには，2つの選点をいわゆる2重選点として配置する．この場合，1つのかど点上に2つの選点が配置され，それらは同一座標を持つとともに，異なる境界法線と境界条件値を与えられる．それ以外に内点をそれぞれM_c=0,1,5,9個配置する場合を比較する．境界選点と内点は，**図10**に示すように均等に配置される．未知パラメータを求めるための連立方程式の係数行列の特異性を考慮して，この問題では図のような配置を用いる．均等に配置することで，未知パラメータを求めるための連立方程式の係数行列の特異性をある程度改善できる．計算点としては全ての境界点と内点をとり，係数c_iの初期値は全て0とする.

領域全体での計算精度を検討するために，25個の精度評価点を境界と領域内に均等に配置し，計算精度指標として次式を用いる.

$$E_u = \frac{1}{25}\sum \left| u - u^{ex} \right|$$

ηの収束状況を**図11**に示す．横軸には繰り返し計算の回数を，縦軸にはηの値をとる．これより，ηは内点数によらず10回程度の繰り返し計算で十分収束しているとみなせる．次に，E_uの収束状況を**図12**に示す．横軸には繰り返し計算の回数を，縦軸にはE_uの値をとる．これらより内点数が多いほど最終的な値が小さくなることがわかる．そこで，内点数9個で解析を行い，十分に収束した場合の関数値の分布を解析解と比較すると，**図13**のようになる．横軸には精度評価点のx座標を，縦

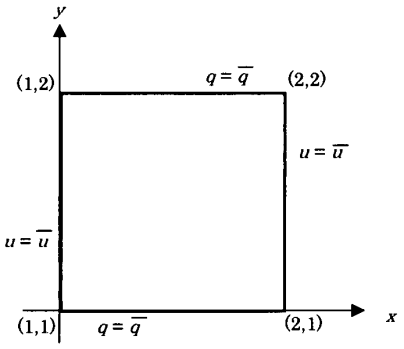

図9　解析例2

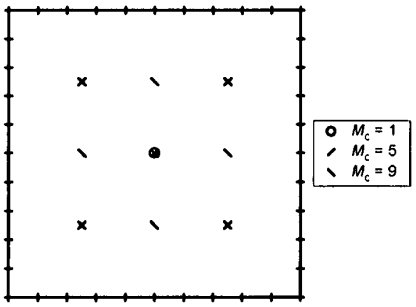

図10　境界選点と計算点の配置

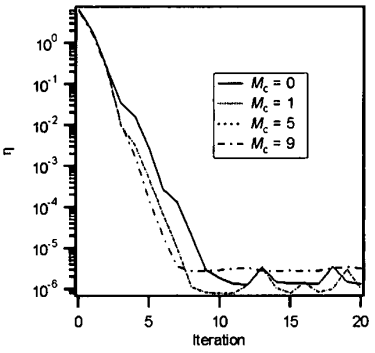

図11　ηの収束状況

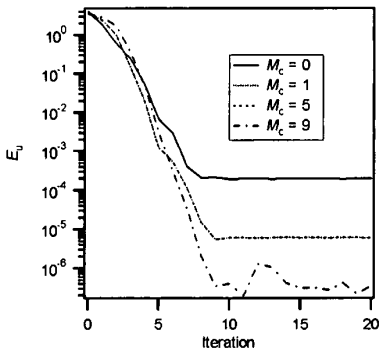

図12　E_uの収束状況

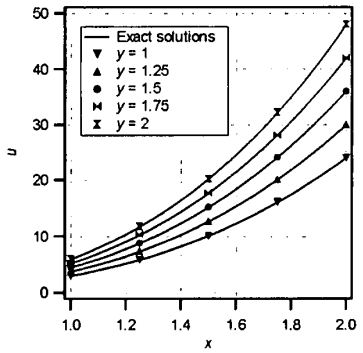

図13　ポテンシャルの分布（M_c=9）

NII-Electronic Library Service

Japan Society for Simulation Technology

軸にはポテンシャル値をとる．これより，数値解と解析解は全体に良く一致していることがわかる．

最後に，M_c=9の場合における係数c_iの収束状況を**図14**に示す．グラフから分かるように，最初の段階で係数値は激しく変化しているが，5回目の繰り返し計算でおおむね一定値に収束した．そして，係数の最終的な値はc_5=-18.1で，それ以外の数値の絶対値は0.5以下であった．従って，式（11）より，解析によって非同次項は次式に収束していることがわかる．

$$b(x,y,u,u_{,x},u_{,y}) = c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 x^2 + c_5 xy + \cdots \simeq -18.1xy$$

ところで，この問題の解析解はu^{ex}=3x^3yで与えられるので，非同次項の理論式を求めると次式となる．

$$b^{ex}(x,y,u,u_{,x},u_{,y}) = -6\sqrt{y}\sqrt{\frac{\partial u^{ex}}{\partial x}} = -6\sqrt{y}\sqrt{9x^2 y} = -18xy$$

これより，数値的に求めた非同次項は理論的な非同次項と一致したことがわかる．

5. まとめ

本研究では，2次元ポアソン方程式の非線形境界値問題に対するTrefftz法の定式化法について述べた．Trefftz法は支配方程式を満足する非特異なTrefftz関数を用いる解析法である．2次元ポアソン方程式には非同次項が存在するので，このような支配方程式に対するTrefftz関数を導出することは一般的に困難であり，そのためTrefftz法のこれら問題に対する適用は進んでいなかった．この問題を解決するために，本論文では次のような方法を提案した．まず，非同次項を5次までの完全多項式で近似し，近似多項式の係数は境界点といくつかの内点で非同次項を一致させるようにした．そして，完全多項式で近似された非同次項を含むポアソン方程式に対する特解を用いて，ポアソン方程式をラプラス方程式に変換して解析した．ラプラス方程式に対するTrefftz関数は容易に導かれるので，ラプラス方程式の境界値問題を解くことで同次解を得ることができる．解析対象として，非同次項が未知関数の導関数について線形と非線型で与えられる問題を考えた．どちらの例題についても，ηは内点数が多いほど高い計算精度が得られた．そして，収束計算で最終的に決定された非同次項は解析解から求めた非同次項とよく一致した．

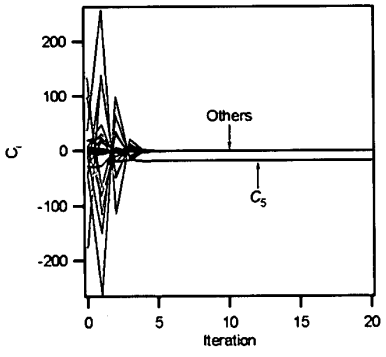

図14　係数c_iの収束状況（M_c=9）

Trefftz法は境界要素法と同様に境界型の解析法であるが，境界要素法による非線形問題に用いられている二重相反法（DRM）あるいは計算点解析法と比べると提案した方法には以下のような利点がある．まず，境界要素法における上記の方法では，非同次項に未知関数の導関数を含む場合，非同次項の近似表示とともに未知関数自体の近似表示を必要とする．これに対して，Trefftz法では未知関数uがTrefftz関数の線形結合で近似されるので，それを直接微分するだけで導関数の表示式を容易に得ることができる．この点において，境界要素法における二重相反法（DRM）あるいは計算点解析法を用いる方法よりも，計算がかなり簡素化されることになる．これらの特長を生かして，今後，実用的な問題への適用を検討していきたいと考えている．

付　録

完全多項式の各項を非同次項とするポアソン方程式に対応する特解u_i^p

$$u_1^p = -\frac{x^2+y^2}{4}$$

$$u_2^p = -\frac{x^3+xy^2}{8}$$

$$u_3^p = -\frac{x^2y+y^3}{8}$$

$$u_4^p = -\frac{x^4+x^2y^2-y^4/6}{14}$$

$$u_5^p = -\frac{x^3y+xy^3}{12}$$

$$u_6^p = -\frac{-x^4/6+x^2y^2+y^4}{14}$$

$$u_7^p = -\frac{x^5+x^3y^2-xy^4/2}{22}$$

$$u_8^p = -\frac{x^4y+x^2y^3-y^5/10}{18}$$

$$u_9^p = -\frac{-x^5/10+x^3y^2+xy^4}{18}$$

$$u_{10}^p = -\frac{-x^4y/2+x^2y^3+y^5}{22}$$

NII-Electronic Library Service

Japan Society for Simulation Technology

$$u_{11}^{p}=-\frac{x^6+x^4y^2-x^2y^4+y^6/15}{32}$$

$$u_{12}^{p}=-\frac{x^5y+x^3y^3-3xy^5/10}{26}$$

$$u_{13}^{p}=-\frac{-x^6/15+x^4y^2+x^2y^4-y^6/15}{24}$$

$$u_{14}^{p}=-\frac{-3x^5y/10+x^3y^3+xy^5}{26}$$

$$u_{15}^{p}=-\frac{x^6/15-x^4y^2+x^2y^4+y^6}{32}$$

$$u_{16}^{p}=-\frac{x(3x^6+3x^4y^2-5x^2y^4+y^6)}{132}$$

$$u_{17}^{p}=-\frac{35x^6y+35x^4y^3-21x^2y^5+y^7}{1260}$$

$$u_{18}^{p}=-\frac{-x^7/21+x^5y^2+x^3y^4-xy^6/5}{32}$$

$$u_{19}^{p}=-\frac{-x^6y/5+x^4y^3+x^2y^5-y^7/21}{32}$$

$$u_{20}^{p}=-\frac{x^7-21x^5y^2+35x^3y^4+35xy^6}{1260}$$

$$u_{21}^{p}=-\frac{y(x^6-5x^4y^2+3x^2y^4+3y^6)}{132}$$

参 考 文 献

1) E. Trefftz: Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren, *Proc. 2nd Int. Cong. Appl. Mech., Zurich*, 131/137 (1926)

2) Y. K. Cheung, W. G. Jin and O. C. Zienkiewicz: Direct solution procedure for solution of harmonic problems using complete, non-singular, Trefftz functions, *Communications in Applied Numerical Methods*, **5**, 159/169 (1989)

3) W. G. Jin, Y. K. Cheung and O. C. Zienkiewicz: Application of the Trefftz method in plane elasticity problems, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, **31**, 1147/1161 (1990)

4) I. Herrera: Theory of connectivity: A systematic formulation of boundary element methods, In C. A. Brebbia, editor, *New Developments in Boundary element methods (Proc. 2nd Int. Seminar on Recent Advances in BEM, Southampton, England, 1980)*, 45/58, Pentech Press (1980)

5) J. Jirousek and N. Leon: A powerful finite element for plate bending, *Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering*, **12**, 77/96 (1977)

6) N. Kamiya and S. T. Wu: Generalized eigenvalue formulation of the Helmholtz equation by the Trefftz method, *Engineering Computations*, **11**, 177/186 (1994)

7) A. P. Zielinski and O. C. Zienkiewicz: Generalized finite element analysis with T-complete boundary solution function, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **21**, 509/528 (1985)

8) A. J. Nowak and A. C. Neves: *The Multiple Reciprocity Boundary Element Method.* Comp. Mech. Pub. / Springer Verlag (1994)

9) A. J. Nowak: Application of the multiple reciprocity BEM to nonlinear potential problems, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **18**, 323/332 (1995)

10) T. W. Partridge, C. A. Brebbia and L. C. Wrobel: *The Dual Reciprocity Boundary Element Method.* Comp. Mech. Pub. / Springer Verlag (1994)

11) 神谷紀生, 許松青: 非同次・非線形問題に対する境界要素解析の一定式と解法, 日本機械学会論文集, **A64**, 147/154 (1998)

12) 許松青, 神谷紀生: 非同次・非線形問題に対する境界要素解析の一定式と解法（続報：未知関数の導関数を含む非同次項の場合）, 日本機械学会論文集, **A64**, 1341/1347 (1998)

13) 北　英輔, 池田洋一, 神谷紀生: Trefftz 法による非線形ポアソン方程式の解法, 情報処理学会論文誌（投稿中）.

14) 真鍋　尚, 福本容子, 登坂宣好: Trefftz 法の 2 次元ポアソン方程式への適用, 計算工学会講演論文集, **5**, 289/292 (2000)

15) E. Anderson, A. Bai, C. Bischof, J. Demmel, J. Dongarra, J. DuCroz. A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney, S. Ostrouchov and D. Sorensen: *LAPACK User's Manual*, SIAM. 2nd edition (1995)

NII-Electronic Library Service