

# 株価変動の現象論的統計力学モデル<sup>†</sup>

増 川 純 一\*

**ABSTRACT** In this paper, a statistical physics model for the collective price changes of stock portfolios is proposed. Through the analysis of Dow-Jones industrial portfolio consisting of 30 stock issues, we show that the synchronization of the price changes can be described by the thermal equilibrium distribution of our model and the slight deviation from it. We also point out a non-equilibrium fluctuation mode in the price data of the recent two-and-a-half months.

## 1. はじめに

株価は、時の経済政策や景気、各企業の業績見通しなどへの投資家の期待感あるいは失望感を反映し日々複雑に変動する。株価がいかなる確率過程に従うかという問題は、市場の効率性の問題と密接に関係しているため経済学においては長い歴史を持つ。また、物理学においても、Mandelbrotによるスケール普遍性の概念に基づいた株価変動の分析<sup>1)</sup>に起源する研究が近年盛んに行われている<sup>2)</sup>。特に1995年のMantegnaとStanleyによるS&P500株価指数の膨大なデータの分析<sup>3)</sup>によって、臨界系の揺らぎを暗に意識した金融データ(株価、為替レートなど)の実証分析が物理学者にも広く認知されるようになった。一方、金融データが従うダイナミクスについては、投資家集団の売買行為をモデル化するマルチエージェント・モデルが数多く提案されている<sup>4,5)</sup>。これらは、金融商品の価格をモデルのマクロ変数として説明しようというものである。

この論文では、価格自体(正確には価格変動の符号)をミクロ変数とする現象論的統計力学モデルを提案したい。特に、複数の銘柄が同期して変動する現象に注目する。有意にゼロでない二体相関係数は分散投資理論の基礎となるものであるが、より高次の相関も注目すべきである。例えば、ダウ・ジョーンズ工業平均株30種の1996年から2000年までの3600日余りの取引日中80日ですべての銘柄が同じ方向に値動きしている。これは、30種の値動きの方向をベルヌーイ系列と

みなした場合の確率 $2^{-29}$ より $10^7$ 倍も大きい頻度である。このような株価変動の相関の法則は何であろうか。この論文では、銘柄集合(ポートフォリオ)のこのような共同的価格変動の統計的性質を記述する統計力学モデルを提案する。さらに、このモデルを基礎として、二つの期間におけるダウ・ジョーンズ工業平均株30種のデータの実証的研究を行う。ひとつは2000年8月15日から10月26日までのデータ、もう一つは2001年9月6日から11月23日までデータである。両期間ともにアメリカ経済がすでに後退期に入ってからであるが、前者は2001年9月11日の同時多発テロのほぼ1年前2ヶ月半、後者はテロ直前(3営業日前)から2ヶ月半のデータである。両データには明らかな質的違いが見られた。これもあわせて報告する。

## 2. 株価変動の統計力学モデル

この論文では株価変動の符号にのみ注目し、各銘柄の株価変動時系列を $S_i = \pm 1$  ( $i$ は銘柄)のようにスピンの上向き(株価上昇)と下向き(株価下降)の連鎖にコード化する。モデルを特徴付けるハミルトニアンは、スピングラスのSherrington-Kirkpatrickモデル<sup>6)</sup>と同じくスピン間(銘柄間)の長距離相互作用で表されるものと仮定する。即ち、

$$H[S, h] = -\sum_{i < j} J_{ij} S_i S_j - \sum_i h_i S_i \quad (1)$$

と仮定する。ここで考えているシステム(ポートフォリオ)は株式市場を全体集合とした時の部分集合であり、その補集合は熟溜として働くものとみなす事にする。理論のパラメータである相互作用定数 $J_{ij}$ は実際のデータの共分散から後に自己無撞着的に決定される。外場 $h_i$ は、与件として市場の外部から働く株価の変動

Phenomenological model of statistical physics for stock price fluctuation. By Jun-ichi Maskawa (Dept. of Management Information, Fukuyama Heisei University).

\* 福山平成大学経営学部

† 2001年12月3日受付

要因となりうるもの全てを代表させている。例えば災害や、経済政策、金利の変更などが考えられる。しかしこれらは市場が（完全ではなくとも）効率的に働くならば短時間で価格に織り込まれる筈のものであるから、定常的な外場としては働かないであろう。これについては後述する。システムが熱平衡状態であるとするならば、Thouless-Anderson-Palmer (TAP) の平均場理論<sup>7)</sup>より  $S_i$  の熱力学的平均  $m_i = \langle S_i \rangle$  は次の方程式を満たす。

$$m_i = \tanh \left[ \sum_j J_{ij} m_j + h_i - \sum_j J_{ij}^2 (1 - m_j^2) m_j \right] \quad (2)$$

この方程式の両辺を外場  $h_i$  について偏微分して、

$$\sum_k A_{ik}[\mathbf{m}] \chi_{kj} = \delta_{ij} \quad (3)$$

を得る。ここで、 $\chi_{ij} = \partial m_i / \partial h_j$  は外場に対する感受率であり、 $A_{ij}[\mathbf{m}]$  は

$$A_{ij}[\mathbf{m}] = -J_{ij} - 2J_{ij}^2 m_i m_j + \delta_{ij} \left[ \sum_k J_{ik}^2 (1 - m_k^2) + \frac{1}{1 - m_i^2} \right] \quad (4)$$

のように  $J_{ij}$  の 2 次式で与えられる。感受率  $\chi_{ij}$  と共分散  $C_{ij} = \langle (S_i - m_i)(S_j - m_j) \rangle$  を関係付ける揺動-応答定理

$$\chi_{ij} = C_{ij} \quad (5)$$

を (3) に代入すると、相互作用定数  $J_{ij}$  と共分散  $C_{ij}$  の関係式

$$J_{ij} = \frac{-1 + \sqrt{1 - 8C_{ij}^{-1} m_i m_j}}{4m_i m_j} \quad (6)$$

を得る。ここで、 $C_{ij}^{-1}$  は共分散行列の逆行列の  $(i, j)$  成分である。平均  $m_i$  が極めて 0 に近い時には（実際後述するデータ分析においてはそうである）、近似式  $J_{ij} \approx -C_{ij}^{-1}$  が成り立つ。実際のデータから、 $J_{ij}$  を得るためには熱力学的平均を時間平均で置き換えればよい。

### 3. ダウ・ジョーンズ工業平均株 30 種のデータの検証

ここでは、2. で提案した統計力学モデルを用いてダウ・ジョーンズ工業平均株 30 種のデータの検証を行う。ここで用いるデータは次の二つの期間に、1 分間隔（1 営業日 390 分）で採取した株価である。

(a) 2000 年 8 月 15 日から 10 月 26 日までのデータ

(b) 2001 年 9 月 6 日から 11 月 23 日までのデータ

両期間ともにアメリカ経済がすでに後退期に入ってからであるが、前者は 2001 年 9 月 11 日の同時多発テロのほぼ 1 年前 2 ヶ月半、後者はテロ直前（3 営業日前）から 2 ヶ月半のデータである。

まず、ポートフォリオがハミルトニアン (1) で表さ

れるシステムの熱平衡状態にあるかどうかを検証する。熱平衡状態ではシステムの配位  $S = \{S_1, S_2, \dots, S_{30}\}$  の出現確率はカノニカル分布（Gibbs 分布）

$$P(S) = \frac{e^{-H[S, 0]}}{Z} \quad (7)$$

で与えられる。ここでは、(1) 式のハミルトニアンにおいて外場  $h_i$  をすべて 0 に置いたが、(6) 式より  $J_{ij}$  を求めた後、それらを既知として (2) 式より求める事が出来る。これらの値はデータ (a) (b) については  $m_i$  と同程度の小さい値であり結果にほとんど影響を与えない。 $Z$  は分配関数と呼ばれる規格化因子で、 $Z = \sum_{\text{すべての配位}} e^{-H[S, 0]}$  で与えられるが、ここではこの値を陽に求める必要はない。各配位に対するエネルギー（ポートフォリオのエネルギー）は  $E = H[S, 0]$  で与えられるから、その確率密度関数は

$$p(E) = n(E) \frac{e^{-E}}{Z} \quad (8)$$

で与えられる。ここで、 $n(E)$  はエネルギー  $E$  の状態密度関数で、 $2^{30}$  個の配位のうちでどれだけがエネルギー  $E$  の近傍にあるかを表す関数である。一方確率密度関数はデータの相対度数分布からも

$$p_{\text{emp}}(E) = P(E - \Delta E / 2 \leq H[S, 0] \leq E + \Delta E / 2) / \Delta E \quad (9)$$

のように得られるから、(8) 式の左辺に (9) 式で定義される  $p_{\text{emp}}(E)$  を代入して、

$$\frac{p_{\text{emp}}(E)n(0)}{p_{\text{emp}}(0)n(E)} = e^{-E} \quad (10)$$

を得る。目的の為には、この式をデータから検証すればよい。結果を図 1 に示す。

図を見る限り、両データともに (10) 式は良く成り立っており、システムは熱平衡状態に近いものとみなしてよい。エネルギーがゼロから離れた付近 ( $E < -5$  or  $1 < E$ ) での乖離はイベント数が極端に少ないための統計誤差と考えられる。

次に、システムの磁化率  $m = (1/30) \sum_{i=1}^{30} S_i$  の揺らぎ分布をデータと理論予測双方から調べる。この量は、ポートフォリオの株価変動がどの位同期しているかを知る指標となる。理論予測の為に、メトロポリス法を用いたモンテ・カルロシミュレーションを行う。図 2 に結果を示す。

比較の為配位の出現をランダムとした場合の二項分布を破線で示してある。当然のことながら、データ (a) (b) とともに二項分布よりは裾野の広い分布となっており、データ (b) ではそれが顕著である。分散が大きいほど、株価変動が同期していることを意味している ( $m=1$  と  $m=-1$  に局在した対称分布を考えてみれば明ら

かであろう)。従って、この結果は、同時多発テロの影響かどうかはさておき、1年前に比べて2001年11月現在のほうが株価が連動して動き易くなっていることを示している。また、データ (a) に対しては、理論予測との良い一致が見られるが、データ (b) では原点付近での明らかな乖離がある。これは、期間 (a) におけるダウ・ジョーンズ ポートフォリオは理論の熱平衡状態に極めて近いが、期間 (b) においては熱平衡状態から少し外れていることを意味している。

これを詳しく見るために、TAP方程式 (2) の線形化方程式

$$\sum_j A_{ij}[0]m_j = h_i \quad (11)$$

を考える。対称行列  $A_{ij}[0]$  を対角化すると (11) 式は

$$m_\lambda = \frac{h_\lambda}{A_\lambda} \quad (12)$$

と書ける。ここで、 $A_\lambda$  は  $A_{ij}[0]$  の固有値、 $m_\lambda h_\lambda$  はそれぞれ平均磁化  $m_i$ 、外場  $h_i$  の  $A_\lambda$  に属する固有モードである。これらは、 $\langle \lambda | i \rangle$  を固有値  $A_\lambda$  に属する固有ベクト

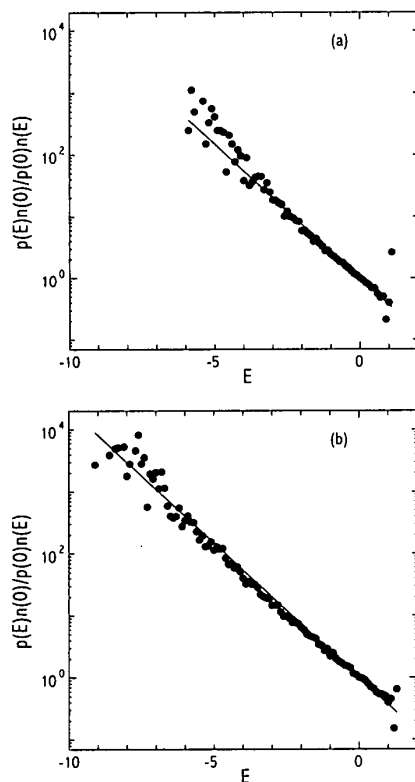


図1  $p_{emp}(E)n(0)/p_{emp}(0)n(E)$  の片対数プロット。  
 $p_{emp}(E)$  はデータの度数分布から本文中の定義を用い得られたもの、 $\Delta E=0.1$  とした。状態密度関数  $n(E)$  は  $2^{30}$  の配位から  $2^{21}$  個を無作為抽出して計算した。実線はモデルの熱平衡曲線  $e^{-E}$ 、パネル (a) (b) はそれぞれ本文中のデータ系列 (a) (b) に対応する。

ルの第  $i$  成分として、それぞれ内積  $m_\lambda = \sum \langle \lambda | i \rangle m_i$ 、 $h_\lambda = \sum \langle \lambda | i \rangle h_i$  で与えられる。(12) 式は  $A_\lambda=0$  がシステムの臨界点であることを意味している。通常の物理系ではこれは温度により決まるが、我々のシステムの場合は温度と相互作用定数を分離できないので、今の所この様な表現しかない。全ての固有値が正であればシステムは通常相 (高温相) にあるので、最小固有値がゼロを正から負に切る時システムは臨界状態にある。データ (a) (b) に対して固有値を求めると、それぞれ 0.42 と 0.15 であり後者は臨界状態により近い。また、両データとも他の固有値は 1 付近に分布していて、臨界点から離れた位置にある。そこで、データ (b) に対して、最小固有値と最大固有値に属するスピンの揺らぎモードを調べることにする。図3は最小固有値と

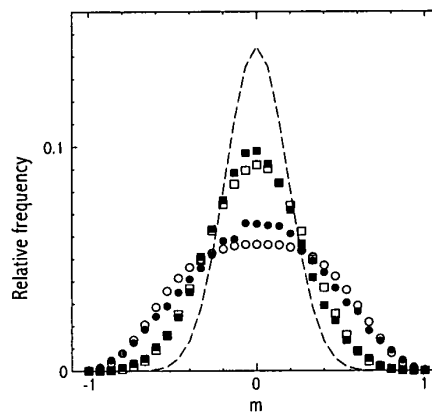


図2 システムの磁化率の相対度数分布。  
■●はそれぞれデータ系列 (a) (b) より得られたもの、□○はそれぞれデータ (a) (b) より相互作用定数  $J_{ij}$  を計算し、メトロポリス法を用いて計算した理論値。破線は二項分布。

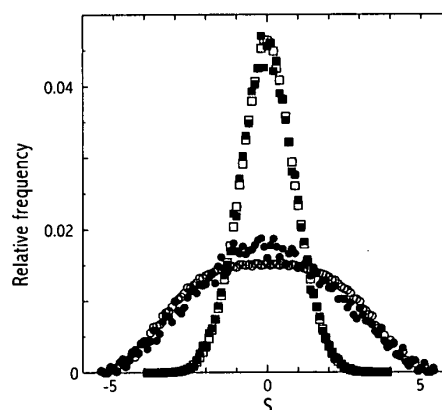


図3 モード  $S_\lambda$  の相対度数分布。  
■●はそれぞれ固有値  $A_\lambda$  の最大値と最小値に属するモードの相対度数  $P(S - \Delta S/2 \leq S_\lambda \leq S + \Delta S/2)$  ( $\Delta S=0.1$ )、□○はメトロポリス法を用いて計算した理論値。

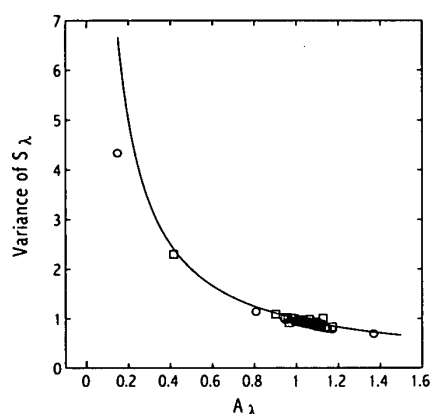


図4 モード  $S_\lambda$  の分散と固有値  $A_\lambda$  の関係。  
 $\square \circ$  はそれぞれデータ (a) (b) より得られた実測値。実線はシステムが熱平衡である場合の理論曲線  $1/A_\lambda$ 。

最大固有値に属するモード  $S_\lambda = \sum \langle \lambda | i \rangle S_i$  の相対度数分布である。

両者の違いは一目瞭然であろう。最大固有値に属するモードはゼロ付近に局在しているのに対し、最小固有値に属するモードは広い裾野を持っている。ここで、遅動-応答定理 (5) を思い出そう。この定理よれば、大きい分散 (高いリスク) は外場に対する応答性が高いことを表している。実際、各モードの応答係数は  $1/A_\lambda$  であるから、固有値と分散の関係は図4の様になる。

図4に示された曲線は、我々のモデルの熱平衡曲線 (理論値) である。図3、図4に共通して言える事であるが、臨界点に近づく程平衡からのずれは大きくなる。データ (a) (b) 総じて、データ (b) の最小固有値以外のモードでは理論値との一致は非常に良い。即ち、これらのモードは熱平衡状態に極めて近いと言える。図2でデータ (b) の相対度数分布が中心部で理論値と乖離していた原因は実はこのたった一つのモードの為だったのである。

#### 4. まとめと考察

この論文では、価格変動の符号をミクロ変数とする現象論的統計力学モデルを発見論的に構築し、ダウ・ジョーンズ工業平均株30種のデータの検証に依ってこのモデルの記述力を実証した。特に株価の共同変動を、統計力学モデルの平衡分布とそこからの少しのずれという物理学的描像で表現した。また、同時多発テロ後の2ヵ月半と1年前の2ヵ月半のデータを比較研究し、両者に質的な違いがある事を指摘した。それは臨

界点に近い所での非平衡揺らぎの存在である<sup>8)</sup>。この揺らぎの意味する事は、外場に対する応答性が非常に高い事である。すなわち、些細な風評で株価が同期して変動し易い状態である。これは遅動-応答定理によるデータの解釈であるが、実際ここ数ヶ月のダウ・ジョーンズ株価指数の上昇下降は激しい。ただしこの様な変化が1年間を掛けて漸近的に起こったものか、テロのショックによって飛躍的に起こったものかについては、更にデータの検証を行わなければならない。また別の機会に報告したい。

ところで、「何故臨界点に近いモードは平衡に達しないのか」という疑問は当然であろうが、これにはまだ何も答えられていない。この疑問に対し極端な例と背理法を用いた考察を行ってみたい。臨界点の極めて近くで、熱平衡に達したならばという仮定を置こう。それは現実の株式市場を我々のモデルが記述するバーチャルな市場に置き換え、少々相互作用定数を微調整した事に相当する。臨界点の直上ではバーチャル市場の応答性は発散する (図4)。これは正にカオス系での「リオデジャネイロの蝶の飛翔」と同じ効果を生む。些細な、ほんの些細な噂が (あるいはそれに依って動いたたった一人の投資家の売買が) 株価を激変させるといふ熱力学的状態である。これは投資家のみならず一般社会が好む状況ではないであろう。この様な状況を回避する為には、臨界点から離れるか平衡からずれるしかない筈である。その機構が市場のデザインにあるのか、投資家の行動に見出せるのかは今後の課題としたい。

#### 参考文献

- 1) B. B. Mandelbrot: The Variation of Certain Speculative Prices, J. Business, 36, 394/419 (1963)
- 2) R. N. Mantegna and H. S. Stanley: An Introduction to Econophysics, Cambridge University Press (2000)
- 3) R. N. Mantegna and H. S. Stanley: Scaling Behavior in the Dynamics of an Economic Index, Nature, 376, 46/49 (1995)
- 4) H. Takayasu ed.: Empirical Science of Financial Fluctuations, Springer-Verlag, Tokyo, (2001)
- 5) B. Verma et al. eds.: International Conference on Computational Intelligence and Multimedia Applications 2001, IEEE Computer Society (2001)
- 6) D. Sherrington and S. Kirkpatrick: Solvable Model of a Spin Glass, Phys. Rev. Lett., 35, 1792/1796 (1975)
- 7) D.J. Thouless and P.W. Anderson and R.G. Palmer: Solution of Solvable Model of a Spin Glass, Phil. Mag., 35, 593/601 (1977)
- 8) J. Maskawa: Ordered phase and non-equilibrium fluctuation in stock market, <http://arXiv.org/abs/cond-mat/0110120> (2001)