《論　文》　論 21-5

ボラティリティと市場モデル
— 経済物理から経済科学へ —†

藤原義久*・海蔵寺大成**

ABSTRACT Recent advent of econophysics has been revealing interesting phenomenologies about speculative markets. Specifically, price fluctuations in such markets possess, while serially uncorrelated, long-memory in the magnitude or *volatility*, quite contrary to what is expected from efficient market hypothesis. The phenomenon is known as volatility clustering, and appears in the time-scales from minutes to months, or even a year. Additional property can be universally observed in the strongly correlated regime as relation between volatilities for different time-scales, or self-similarity. Though such properties have significant and practical implication in financial markets, little is known about the dynamical origin of them. We consider that these properties are manifestation of interdependent agents' aggregate dynamics involving a wide range of time-scales. By using a minimal but interesting model of interacting spins proposed by Bornholdt, we attempt to bridge between market model and phenomenologies concerning volatility by studying the statistical properties of simulation results. It is implied that long-memory and self-similarity are found but in a limited range of time-scales.

1. Introduction

資産価格の変動が，ランダム・ウォークするという理論を最初に提出したのはバシェリエ[1]であった．彼は，株価の時間変化のプロセスをブラウン運動で特徴つけた．その後，何十年も経って，彼のランダム・ウォーク理論は，サミュエルソン[2]，ファマ[3]によって，「効率的市場」という考え方と結び付けられた．

資本市場の本来の機能は，資金およびリスクの社会的配分を行うことである．それゆえ，理想の資本市場とは，各個人への資金配分が効率的に行われる市場である．新古典派経済学では価格がこの効率的資金配分の役割を果たすと考える．*Fama*[3]は資本市場の効率性について「価格が常に利用可能な情報を「完全に反映している」市場のことを「効率的」という」と述べている．彼が考える効率的市場では，価格はその時点で利用可能なあらゆる情報をすべて反映して正しく評価されており，さらに価格は新しい情報に対して即時に調整される．効率的市場では，現在時点で公表されている情報はすでに価格に反映されているため無価値である．価格は新しく起きた予期せぬ出来事にのみ反応して変動する．情報の起こり方がランダムである限り，過去の価格系列は将来の価格変動を予測する上で役に立たず，価格変動は情報の変動を反映してランダム・ウォークする．したがって，市場の効率性の検証では，しばしば過去の価格系列による将来価格の予測不可能性を表現したランダム・ウォーク仮説を検証する．

ところで効率的市場が達成されるためには，すべての投資家が合理的でなければならない．彼等は新しい情報をいち早く収集し，情報の意味を正しく判断し，同時に行動を起こさなければならない．このような合理的投資家像は，新古典派経済学の「合理的経済人」と同じである．同質な合理的経済人が構成する効率的市場を前提とする限り，「代表的な経済主体」の投資行動を考えれば市場における価格決定を論じるには十分であり，多くの投資家が参加する市場を考えることは単純に論じられる問題を複雑にするだけであるとされる．

一方，効率的市場とは全く異なる資本市場の見方が，イギリスの経済学者，ケインズによって提案されている．ケインズは，美人投票のアナロジーを使って株式市場の投資行動を説明している．「(株式市場における投資家の投資行動は）投票者が 100 枚の写真のう

Volatility and market model -from econophysics to econo-science-. By *Yoshi Fujiwara* (Keihanna Center, Communications Research Laboratory) and *Taisei Kaizoji* (International Christian University).
*通信総合研究所 けいはんなセンター
**国際基督教大学 社会科学科
† 2002 年 1 月 29 日受付

ちから最も容貌の美しい6人を選択し，その選択が投票者全体の平均的な好みに最も近かった者に賞金が与えられる新聞投票に見立ててもよいだろう．この場合には各投票者は彼自身が最も美しいと思う容貌を選ぶのではなく，他の投票者の好みに最もよく合うであろうと思う容貌を選択しなければならないのであって，しかもどの投票者もすべてこの同じ見方でこの問題を眺めているのである．それは1人の人物が自己の最善の判断にたって，真に最も美しい容貌を選ぶケースでもなければ，また平均的な意見が真実最も美しいと考える容貌を選択するケースでもないのである．我々は平均的な意見がどのような平均的意見を期待するかを予見するだけにすぎない.」さらに，ケインズは，投資行動がこのような投資家の予見にもとづいて行われているならば，「社会全体にとって最も望ましい資金配分」が，資本市場によって達成されるという明白な証拠は得られないと述べている．(「雇用，利子および貨幣の一般理論」).

資本市場における価格は投資家の意見の相互作用によって決定されるとするケインズの資本市場論は長い間忘れ去られていたが，最近になって効率的市場論に異議を唱える研究者によって再び復活した．効率的市場論に異議を唱える研究者の主張は次の2点である．(1) 効率的市場による投資家の意思決定は，客観的な情報の評価のみによって行われるが，実際の資本市場(例えば，株式市場）では，投資家の意思決定は市場のムードによって大きく左右される．つまり，投資家の意思決定は互いに影響し合っている[1]．(2) 投資家は様々な投資戦略を駆使して将来価格の予測を行っており，その意味で異質性を持っている．この (1) と (2) が事実であるとすれば，資本市場における価格決定は効率的市場論が考えるような社会的にみて効率的なものではなくなる可能性がある．

それではどのようにすれば，上記のようなシナリオのいずれが投機的市場の本質を捉えていると言えるだろうか．ここ数年「経済物理」という名前で呼ばれるアプローチでは，社会経済現象を現実のデータからきちんと見ていくという方法論をとる．実際，市場には価格・取引高・取引時間等に関する膨大なデータが存在する．これらのデータの中から，特定のリスク資産（株式/為替）や市場（Tokyo/New York）に依存する部分と，普遍的に見られる性質を腑分けしていくという現象論の構築を，非平衡統計力学を含めた様々な手法を用いて行う．それにより投機的市場に欠かすことのできない要素を明らかにして，それを必要最小限のモデルで理解し表現しようということが経済物理の本質であろう．(レビューとして例えば，文献5～8)がある.)

市場のダイナミックスを考える上で，最も興味あるデータは，価格のゆらぎ（時間的な変化）であろう（そのほかに取引時間とその間隔，株式市場では取引量も重要な観測量となる)．最も顕著な性質として

(i) 価格ゆらぎの線型相関（自己相関）は数分で消える[9]；また低次元カオスという形での非線型構造に対する強い証拠もない[10,11]

(ii) ゆらぎの大きさには長期的な記憶があり，数分から数ヵ月（あるいは1年）にまで及ぶ[12～15]

(iii) その時間スケールにおいて，ゆらぎの大きさには自己相似性がある[16～19]

があげられる（詳しくは次節参照)．(i) は単純な線型予測が市場では役に立たず，また比較的単純な非線型予測も使えないという事実の反映であるが，自明でない市場ダイナミックスの性質である．(ii) は，価格変動の大きさ，すなわちボラティリティ（volatility）が大きい時期が非常に長い期間にわたって続くことを示し，volatility clustering として知られている．したがって，株や為替の価格変動は時間的に高次相関を持っていることになり，明らかにブラウン運動ではないことに注意しよう．(iii) は，数分から数ヵ月の時間スケールに対するボラティリティには，時間と大きさをスケールさせると，同じ統計的性質が存在することを意味する．これは本論文でも見るように，市場モデルに非常に強い制約を課すことになる．このようにボラティリティは，数分から数ヵ月という経済学的にも実務的にも重要な中間の時間スケールにおいて，強相関性を持っていることになる．我々はその起源が，上述したような市場参加者間の相互依存性にあると考えた．

株式市場における投資家の意思決定の相互依存性を最初に研究したのは，*William Brock* であると思われる．*Brock* は統計物理で用いられるスピン・モデルのアナロジーを使って，投資家間の投資行動の相互作用を説明するモデルを提案した[20]．同様のアイディアはその後，*Kirman*[21,22]，*Aoki*[23]，*Lux*[24～26]らによって研究された．経済物理的な立場からこれまでに提案されている投機価格のスピン・モデルの例をあげると，*Cont* and *Bouchaud*[27]，*Cremer*[28]，*Iori*[29]，*Chowdhury* and *Stauffer*[30]，*Roehner* and *Sornette*[31]，*Kaizoji*[32]，*Bornholdt*[33]，

[1] 新古典派経済学が前提としている「代表的経済主体」に対して，「相互依存的経済主体」という考え方を提唱した論文に *Kirman*[4]がある．

Yamano [34]などがある．

本研究では，投資家の意思決定の相互依存性を必要かつ最小限に捉えたと考えられる，*Stefan Bornholdt* のスピン・モデル[33]を取り上げる．*Bornholdt*はイジング・モデルの自発磁化の絶対値の対数変化を株価変化率，いわゆる，log-returnsの時間変化であると考えたが，自発磁化がなぜ価格変化率の結び付けられるのか詳しい説明はなされなかった．本稿では彼のモデルを株価変動のモデルとして再定式化する．そして，シミュレーションから得られる価格のゆらぎと上記の統計的な性質を比較する．

2. 価格ゆらぎの統計的性質

流動性の高い通常の投機的市場において，最も短い時間スケールは取引間隔であり，例えば以下にデータを示すニューヨーク証券取引所（NYSE）での個別銘柄の典型的な取引間隔は約10数秒である．そのような時間スケールでの取引ダイナミックスは，市場の詳細な構造（取引方式など）に依存する部分が大きいであろう．一方，価格変動の線型相関が消える数分より長い時間スケールでは，1節で述べたような性質が普遍的に成り立っていることが観測されている[13～19]．

時間ステップsにおけるリスク資産の価格を$P(s)$で表わし，その変動を時間スケールtで観測した量として，いわゆる（対数）収益率$r_t(s)=\log(P(s)/P(s-t))$で観測しよう（変動が小さければ対数収益率は近似的に価格変化率に等しい）．NYSEのティック（各取引）データから典型的な銘柄を取り，t=1 分に対する収益率の自己相関関数（ACF）をプロットした**図1**から，線型相関が数分で消えていることが分かる．一方，収益率の絶対値$|r_t|$の自己相関関数を見ると（**図2**），数ヵ月にわたって相関がべき的に記憶を持っている（NYSEの1営業日は約390分である）．すなわち価格のゆらぎは，変動自身が線型相関が消えるのに対して，ボラティリティ（価格変動の大きさ）が数分から数ヵ月の時間スケールについて記憶を持っているという形での，強相関領域を持っている[13～15]．

次に，価格変動を考える時間スケールtを強相関領域（$t_s<t<T$と表わすことにする）で変化させて，ボラティリティ$v_t\equiv|r_t|$を観測する．時間的な粗視化の「レベル」を$t=t_n\equiv Te^{-n}$ for $n=0, 1,\cdots, N$ ($N\equiv\log(T/t_s)\gg 1$)と導入し，対応するボラティリティを$v_n\equiv v_{t_n}$とする．自己相似性とは，粗視化のレベルnを変えることによるボラティリティの変化がnに依存しないこと，すなわち

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}\equiv e^{z_n}, \qquad (1)$$

とすると，z_nがnに統計的によらないことを意味する．これから，異なる時間スケールにおけるボラティリティが互いに関係している：

$$v_n=v_0\exp\left[\sum_{k=0}^{n-1}z_k\right]. \qquad (2)$$

ことがすぐに導かれる．自己相似性はボラティリティの高次モーメントに対するスケーリングとある条件の下で等価であることが分かっている[19]ので，現実の市場でそれが成り立っているかどうかを確かめることができる．高次モーメントに対するスケーリングとは

$$\left\langle v_t^{\,q}\right\rangle\propto t^{\phi(q)} \qquad (3)$$

（〈・〉は平均）となるスケーリング関数$\phi(q)$が存在す

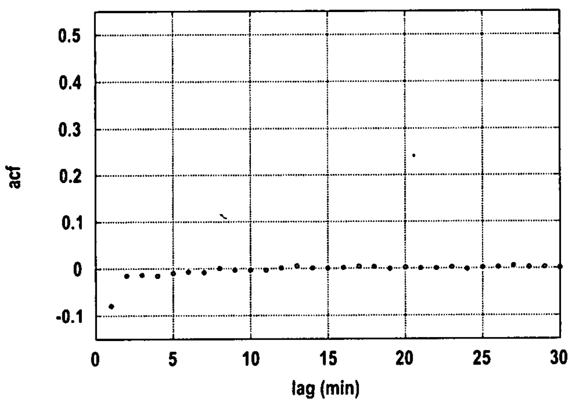

図1 NYSEにおける一つの銘柄の，t=1 分に対する収益率r_tの自己相関関数（ACF）．横軸：ラグ（分）．

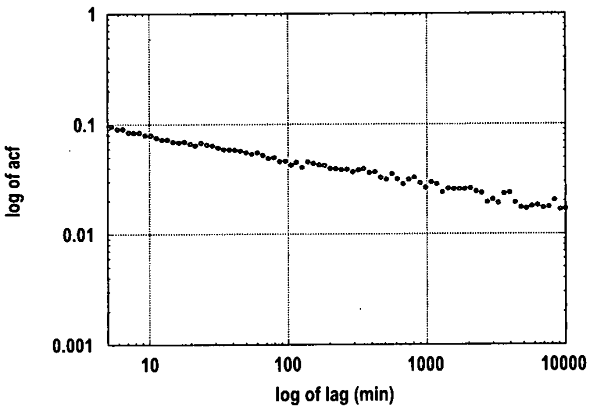

図2 同じ銘柄の，t=1 分に対する収益率の絶対値$|r_t|$の自己相関関数（ACF）．横軸：ラグ（分）．両対数スケールに注意．

ることである[16~18]．実際に**図3**に，上と同じデータからのスケーリング関数の存在を示した（直接式（1）を観測する方法とその有用性については[19]）．これは強相関領域での価格ゆらぎの著しい性質であり，市場モデルに対して非常に強い制限を与える．

現在のところ，価格ゆらぎとボラティリティについての以上の性質がどのように市場モデルから理解されるかまだ分かっていないと思われる．そこで我々は，これらの観測事実と最も親和性の高い極小モデルとして，33)を次節で取り扱う．

3. モデル

そもそも投機的市場において価格がなぜ揺らぐのだろうか．需要と供給の不釣り合いが価格を変動させる原動力であり，だれもそれについて完全情報を持っているわけではない．市場における各エージェントの戦略とは，過去の価格と他の情報にもとづいて，将来に自分がその資産に対して取るポジション（どれくらいのシェアをどれくらいの時間スケールで持つのか）に従って，売買を行うことである．需要と供給について完全な情報を持っていない以上，各戦略にとって重要なことは，価格の予測を直接行うことではなく，市場参加者全体の需要と供給の集団的な不釣り合いを予測することであろう（ケインズの美人投票）．ここでいう，各参加者のポジションにとっての「将来」には，様々な時間スケールが含まれているはずである．従って市場における参加者の行動とその集団的な振る舞いにおいては，時間スケールが単純に分離できない．前節でみた統計的性質はその反映であると我々は考える．そこでそのような相互依存性のモデルとして，必要かつ最小限であると考える「短期的な」トレンドフォローと「長期的な」リスク回避的行動の2つの要素が市場の強相関領域の振る舞いの理解のために最も重要であるとして，以下のようにモデル化を行う（ここでいう短期的・長期的とは単純な時間スケールの分離を意味しない）．現在，現実の市場でみられる上記のような性質の起源が最も単純な形でさえ理解されていない以上，極小モデルを考えることが重要であると考える．

単純化のために，日経平均株価のような株価指数が取り引きされる株式市場を考える．市場には，典型的な2種類の投資家グループ，すなわち，ファンダメンタリスト・グループと相互依存的投資家のグループが参加すると仮定する[2]．各投資家グループの投資決定がどのようになされるかは以下で説明する．（以降時間ステップを t で表わす．）

3.1 ファンダメンタリスト

ファンダメンタリストは，効率的市場論が考える「合理的経済人」としての投資家である．標準的なファンダメンタリストの投資戦略は次のようなものである．ファンダメンタリストは株価 $p(t)$ に影響を与える情報を毎期収集し，適正な株価，いわゆる，ファンダメンタル価格 $p^*(t)$ を計算する．しかし，市場にはファンダメンタリスト以外に相互依存的投資家が参加するため，必ずしもファンダメンタル価格と一致するとは限らない．つまり，異質な投資家集団が共存する株式市場では，効率的市場論の命題は成立しない．そこで，ファンダメンタリストは，市場で決まる株価 $p(t)$ がファンダメンタル価格 $p^*(t)$ を比較し，株価 $p(t)$ がファンダメンタル価格 $p^*(t)$ を上回っているなら，今期の株

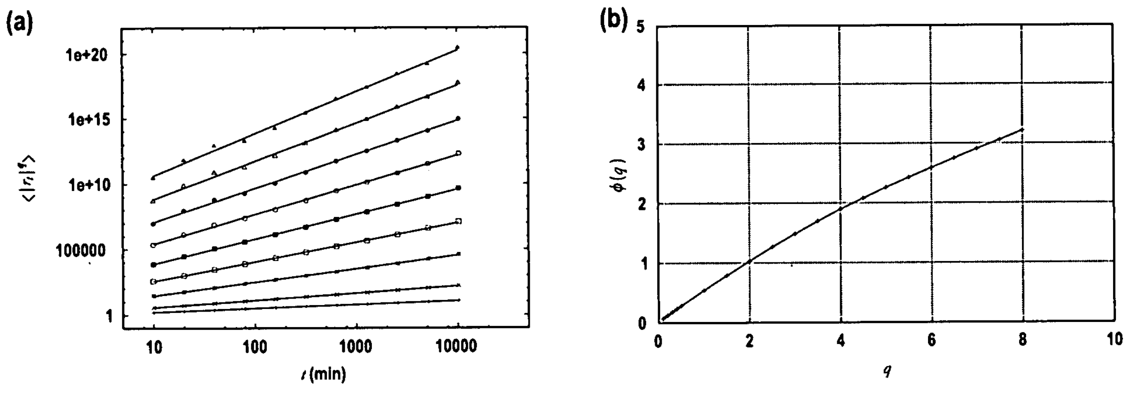

図3　(a) 高次モーメント $\langle v_t^q \rangle$ に対するスケーリング式（3）（図中下から q=0.5, 1.0, …, 8.0）．(b) 関係 $\langle v_t^q \rangle \propto t^{\phi(q)}$ からのスケーリング関数 $\phi(q)$．

[2] 相互依存的投資家は一種のノイズ・トレーダーであると考えることができる．

価は市場で過大評価されており，いずれ株価はファンダメンタル価格に向かって下落すると判断する．従って，$p(t)>p^{*}(t)$のとき，ファンダメンタリストは株を売ろうとする．反対に，株価$p(t)$がファンダメンタル価格$p^{*}(t)$を下回っている場合（$p(t)<p^{*}(t)$），ファンダメンタリストは市場は株価を過小評価していると考え，株を売ろうとする．本稿では，ファンダメンタリストの投資行動を次のような単純な式で表わすことにする．

$$x^{f}(t)=a\log\left(\frac{p^{*}(t)}{p(t)}\right) \tag{4}$$

$x^{f}(t)$はt期におけるファンダメンタリストの株式に対する超過需要を表わす．aは株価のファンダメンタル価格からの乖離に対するファンダメンタリストの反応の強さを表わすパラメータである．

3.2 相互依存的投資家

相互依存的投資家は，ファンド・マネージャーを通じてインデックス・ファンドつまり株価指数の売買を行う．この場合売買するファンドは株価指数を構成する株式になる．各投資家はインデックス・ファンドを買うか，売るかをファンド・マネージャーに知らせる．分析の単純化のため，売りあるいは買いの単位は1期当たりbで一定と仮定する．$S_i(t)$をi番目の相互依存的投資家の投資態度であるとしよう．もし，彼が売り手なら，$S_i(t)=+1$，彼が買い手なら，$S_i(t)=-1$である．

相互依存的投資家の平均的投資態度は，

$$M(t)=\frac{1}{N_I}\sum_{i=1}^{N_I}S_i(t) \tag{5}$$

と表わされる．N_Iは相互依存的投資家の総数である．スピン・モデルの言葉で言えば，$M(t)$は磁化に当たる．相互依存的投資家グループのインデックス・ファンドに対する総需要は，

$$X^{I}(t)=bN_I M(t) \tag{6}$$

相互依存的投資家の投資行動は以下の3つの情報によって左右されると仮定する．(1) 近くにいる（相互依存的）投資家の行動，(2) インデックス・ファンドに参加する投資家の売買のバランス，(3) ファンダメンタルズの変化に関する情報．(2) に関する情報はファンド・マネージャーが彼の顧客である相互依存的投資家に知らせるものと考えることができる．

Bornholdt[33]に従って，相互依存的投資家の投資態度を次の式にしたがって，スイッチすると考える．

$$s_i(t+1)=+1 \quad \text{with } p=\frac{1}{1+\exp(-2\beta h_i(t))} \tag{7}$$

$$s_i(t+1)=-1 \quad \text{with } 1-p \tag{8}$$

$$h_i(t)=\sum_{j=1}^{m}Js_j(t)-\alpha s_i(t)\left|M(t)\right| \tag{9}$$

$h_i(t)$の第1項は，第i投資家の近隣にいる投資家の投資態度が彼の投資態度に与える影響を表わしている．第2項は，ファンド・マネージャーから得られる相互依存的投資家の平均的投資態度が第i投資家の意思決定に与える影響を表わしている．

ここで，上式の意味を考えてみよう．まず，相互依存的投資家は，彼の親しい投資家の意見を聞き，彼等と同じ行動をとろうとする．次に，現在時点で，多数派に属する相互依存的投資家は，次期に株価が今期以上に高く（低く）なる可能性を，平均的投資態度から読み取ろうとする．今期よりさらに株価が上昇（下落）するためには，少なくとも$M(t)$が次期にむけて上昇（下落）することが必要である．つまり，今期より多くの相互依存的投資家が買い手（売り手）になる必要がある．彼は，$M(t)$が上昇（下落）する可能性は，$M(t)$絶対値が1に近づくにつれて，小さくなると考える．したがって，多数派に属する相互依存的投資家は，$M(t)$絶対値が1に近づくにつれて，キャピタル・ロスを避けるために，投資態度を変化させる確率が高まる．次に，現時点で少数派に属する相互依存的投資家を考えよう．彼等が次期の取引から利益を得るためには，まず，多数派になることが必要である．そこで，少数派に属している投資家は，$M(t)$絶対値が1に近づくにつれて，キャピタル・ゲインを狙って，投資態度を変化させる確率が高まると考えられる．経済学の言葉でいえば，売り手買い手のバランスが崩れるにしたがって，多数派に属する投資家はキャピタル・ロスを恐れて，危険回避的行動を取り，逆に，少数派に属する投資家は，キャピタル・ゲインを求めて，危険愛好的になる．

一方 (3) に関しては，様々なモデルが考えられる．もしファンダメンタルズの変化による相互依存的投資行動を考慮しなければ，次節で述べる価格決定から分かるように，相互依存的投資家は基本的にファンダメンタルズとは独立したダイナミックスをもつ．我々は極小モデルとして，そのようなダイナミックスを本論文で調べる．

3.3 価格決定

ファンダメンタリスト・グループと相互依存的投資家グループの株価指数に対する，売買の総和，すなわち，総超過需要$X(t)$は次のように与えられる．

$$X(t)=aN_F(\log p^{*}(t)-\log p(t))+bN_I M(t) \tag{10}$$

N_Fはファンダメンタリストの総数である．総超過需要

がゼロの時（$X(t)$=0），つまり，株に対する需要と供給は一致するとき，取引は実行される．総超過需要がゼロの時に価格水準は均衡価格と呼ばれる．以下では，この均衡価格が市場で決まる価格であると考える．簡単な計算を行うと，均衡価格は次にようになる．

$$\log p(t) = \log p^*(t) + \lambda M(t), \quad \lambda = \frac{bN_I}{aN_F} \qquad (11)$$

また，t 期の取引量は，$bN_I(|M(t)|+0.5)$ と表わされる．言い換えると取引量は磁化の絶対値に比例して増減する．最初に，相互依存的投資家が市場に参加していないケースを考える．この場合，株価はファンダメンタル価格に等しくなることがわかる．もし，ファンダメンタル価格がランダムに起きる情報によって決まってきているとすれば，株価もランダム・ウォークすることになる．したがって，市場にファンダメンタリストのみがいる場合，効率的市場が成立することになる．次に，ファンダメンタリストと相互依存的投資家が共に市場に参加している場合を考えよう．この場合，次のことがわかる．もし，$M(t)>0$ なら，$\log p(t)>\log p^*(t)$ である．反対にもし，$M(t)<0$ なら，$\log p(t)<\log p^*(t)$ である．これらの関係は次のことを意味している．相互依存的投資家集団の超過需要がある場合，株価はファンダメンタル価格を上回っている．（このとき，ファンダメンタリスト・グループは将来に株価の下落を見越して，株の売り手になっている．）このような状態を「強気相場」と定義することにする．反対に，相互依存的投資家集団の超過供給がある場合，株価はファンダメンタル価格を下回っている．このような状態を「弱気相場」と定義することにする．

次に，株価の変動は次の式に従うことも容易にわかる．

$$\log p(t) - \log p(t-1) = \log p^*(t) - \log p^*(t-1) + \lambda(M(t) - M(t-1)) \qquad (12)$$

株価収益率は，ファンダメンタル価格の収益率と相互依存的投資家集団の超過需要の変化の和に比例して動くことがわかる．今，相互依存的投資家がいないケースを考えてみる．もし，ファンダメンタル価格の変化率 $\log p^*(t)-\log p^*(t-1)$ が正規分布に従う確率変数であるとすれば，株価収益率 $\log p(t)-\log p(t-1)$ も正規分布に従う確率変数になる[3]．すなわち，ファンダメンタリストのみが市場に参加する場合，やはり，効率的市場が成立することが容易にわかる．一方，ファンダメンタリストとともに相互依存的投資家集団が取引に参加する場合，株価は必ずしも，ファンダメンタル価格と同じ方向に動かされなくなる．もし，相互依存的投資家集団の超過需要が時間とともに増加してゆくような場合，価格がファンダメンタル価格を離れて持続的に上昇する，いわゆる「バブル現象」が観察され得る．

以上のように，このスピン・モデルを経済学的に見た場合，どのようにして株価変動と自発磁化の間の関係が自然と見なせるかを示した[4]．

4. シミュレーション

我々は最も極小なモデルとして，相互依存的投資家のみからなる市場モデルのシミュレーションを行い，価格ゆらぎの統計的性質を観測した．

極小なモデルは少数のパラメーターしか持っておらず，システムのサイズ N，式（9）における各スピンと全体の磁化との結合定数 α，スピンの反転確率式（7）式（8）にあるノイズレベルを表わす「温度」（の逆数）β が基本的なパラメータである．以下では，時間ステップの1とは，確率的にほぼ全スピンがスピン反転の（可能な）遷移過程を受ける時間を表わす．

まず典型的な振る舞いを $N=64\times64$，$\alpha=50$，$\beta=2$ の場合の，時系列データを**図4**に示した．磁化 $M(t)$ が0の近くで各投資家の売買スピンは温度により決まるレベルで揺らいでいるが，局所的なイジング相互作用のために増幅機構が働く．いったんゆらぎが大きくなると，大局的な相互作用として磁化の絶対値 $|M(t)|$ との結合のために，多数派の人が少数派へ，少数派の人が多数派へ遷移する確率が高くなるので，今まで売買が

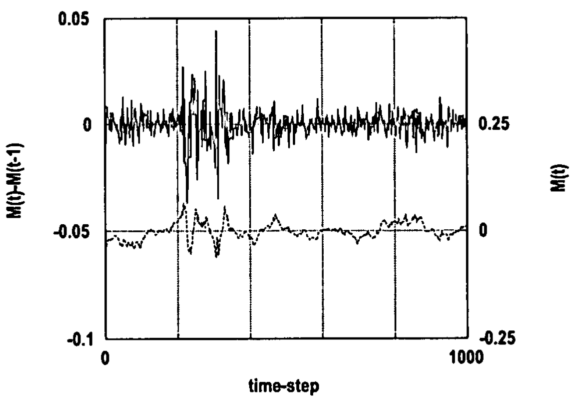

図4 スピンモデルの典型的な時系列データ．横軸：時間ステップ．上の実線（左縦軸）が $M(t)-M(t-1)$，下の点線（右縦軸）が $M(t)$ を表わす．

[3] 株価収益率の分布が正規分布に従うという仮定がファイナンスではしばしば使われる仮説である．例えば，オプション価格のモデルとして有名なBlack-Scholze modelは株価変化率の分布が正規分布に従うことを仮定している．

[4] 以下のシミュレーションでは，λ=1と固定し，ファンダメンタル価格 $p^*(t)$ は時間を通じて一定であると仮定した．

ほぼバランスしていた相からスピンがバタバタと暴れだしてゆらぎが大きくなる．そのために，成長した$|M(t)|$ はキャンセルして小さくなり，多数派と少数派間の遷移確率は小さくなるので，大局的な相互作用は収まる．このようなプロセスを様々な時間スケールで繰り返すことが特徴である．

次に，式（12）から価格ゆらぎとして磁化の変動を取り，その自己相関関数と絶対値の自己相関関数をプロットしたものが，それぞれ**図5**，**図6**である．線型相関は数ステップで消えている一方で，ボラティリティに対応する変動の大きさには，かなり長い記憶が残る．これは上記のダイナミックスにおいて，局所的なイジング相互作用による増幅機構と多数派と少数派間の遷移過程の拮抗によると考えられる．

しかしながら，長期記憶の時間領域はそれほど長くはない．システムサイズを変化させても長期記憶の典型的な時間スケールは長期にわたってべき的に振る舞わないことが分かった．これは *Lux* らのモデルにおいても同じような観測結果がある[25,26]．

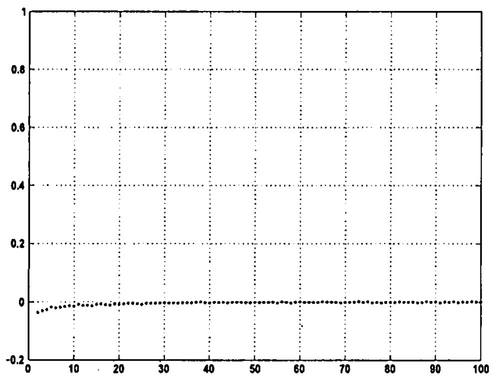

図5 スピンモデルからの価格ゆらぎ（磁化変動 $M(t)-M(t-1)$）に対する自己相関関数．

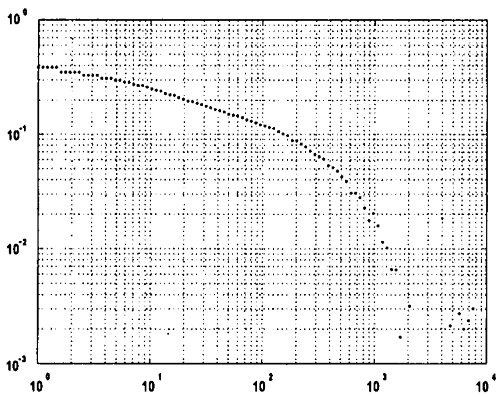

図6 スピンモデルからの価格ゆらぎの絶対値（磁化変動 $|M(t)-M(t-1)|$）に対する自己相関関数．

さらに自己相似性を確認するために，異なる時間スケールに対するボラティリティの間の関係をモーメントのスケーリング式（3）を用いて調べた．**図7**に，磁化の変化の絶対値に対して異なる時間スケールについて，モーメントを調べた結果を示す．ボラティリティの長期記憶が観測される時間スケールに対応して，スケーリング式（3）は成り立っているが，それより長い時間スケールで破れていることが分かる．

実際の市場における時間とどのように対応づけるかは今後の課題であるが，強相関領域と自己相似性が成り立つ現象論的性質を説明するには，前節で述べたようなファンダメンタルズの変化による相互依存的投資行動への影響を含めたダイナミックスを考える必要があることを示唆する．

5. まとめ

市場の需要と均衡の実際の釣合点は参加者には未知であり，だからこそ価格は揺らぐ[35]．市場では誰も完全情報など持っておらず，参加者は価格を含む過去の情報をもとに，株のシェアについて将来どのようなポジションを取るべきかという戦略をもとに注文を出し，これらの集積的な効果により次の価格が決まる．したがって，参加者にとって重要な予測とは，株価を予測するということではなく（線型モデルでも低次元カオスでもない），他の参加者が何を期待するかということの予測である．(これを標語的に述べたのが，ケインズの「美人投票」であり，シラーの「根拠なき熱狂（irrational exuberance)」はそれを実証しているであろう)．収益をあげリスクを回避するこれらの戦略は時間スケールを持っているはずだが，互いに互いを予測し合い，戦略の自由度の生成と退場を繰り返す市場

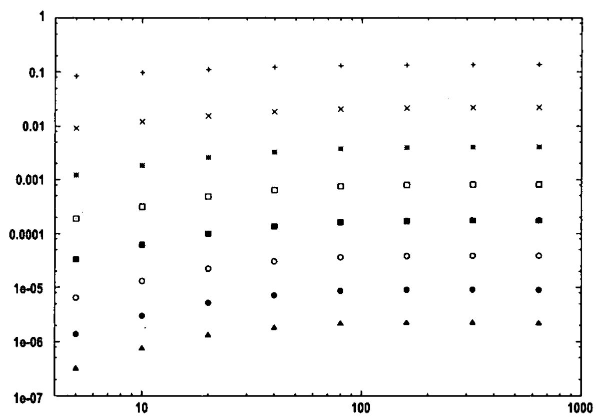

図7 高次モーメント $\langle |M(t)-M(t-1)|^q \rangle$ に対するスケーリング（上から q=0.5, 1.0, …, 4.0）．

では，これらの時間スケールは分離できない．ある固定されたクラスの戦略だけが常に高い適応度を保持することはあり得ないので，まさに前節で述べたような，「腑分け」が容易でない現象であることが分かる．一方，人の心理的行動と無関係ではないからといって，心理的要因が微に入り細に入り市場のマクロな振舞いに影響を及ぼすようであれば，そのような現象をモデル化することは不可能であろうが，実際の価格データは数分から数ヵ月の中程度の時間スケールにおいて，強相関性と自己相似性が普遍的に成り立っている．この事実は価格ゆらぎのモデル化が可能であることを強く示唆している．

我々はスピンモデルを取り上げて，価格ゆらぎの統計的性質を調べた．特に，強相関性と自己相似性について調べ，系がボラティリティの長期記憶を持っているものの，上記の現象論と合わせるには，さらにモデルに要素を入れる必要があることを示唆した．このように経済物理学的な知見が，市場のモデルの理解と制御を考える上で強い制約を課すことができることはencouragingであり，今後の展開が期待される．

謝辞

Stefan Bornholdt 博士との有益な議論に感謝します．

参考文献

1) L. Bachelier: Theory of speculation, in Cootner, P. H. ed., The Random Character of Stock Prices, MIT Press (1964)
2) P. A. Samuelson: Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly, Industrial Management Review, 6, 41/50 (1965)
3) E. F. Fama: Efficient capital market: a review of theory and empirical work, Journal of Finance, 25, 383/417 (1970)
4) A. Kirman: Whom or what does the representative individual represent?, Journal of Economic Perspectives, 6, 117/136 (1992)
5) B. B. Mandelbrot: Fractals and Scaling in Finance: Discontinuity, Concentration, Risk, Springer-Verlag (1997)
6) J. P. Bouchaud and M. Potters: Theory of Financial Risk, Cambridge Univ. Press (2000)
7) R. N. Mantegna and H. E. Stanley: Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance, Cambridge Univ. Press (1999)
8) J. D. Farmer: Physicists attempt to scale the ivory towers of finance, Computing in Science & Engineering, 1, 26/39 (1999)
9) J. Y. Campbell, A. W. Lo and A. C. MacKinlay: The Econometrics of Financial Markets, Princeton University Press (1997)
10) J. D. Farmer and J. J. Sidorowich: Can new approaches to nonlinear modeling improve economic forecasts?, in ed. P. W. Anderson, K. J. Arrow and D. Pines, The Economy as an Evolving Complex System, (Addison-Wesley, 1988)
11) B. LeBaron: Chaos and Nonlinear Forecastability in Economics and Finance, Phil. Trans. Royal Soceity of London, 348, 397/404 (1994)
12) Z. Ding, C. W. J. Granger and R. Engle: J. Empirical Finance, 1, 83/106 (1993)
13) M. M. Dacorogna, U. A. M"uller, R. J. Nagler, R. B. Olsen and O. V. Pictet: A Geographical model for for the daily and weekly seasonal volatility in the foreign exchange market, J. Inter. Money and Finance, 12, 413/428 (1993)
14) Y. Liu, P. Gopikrishnan, P. Cizeau, M. Meyer, C. -K. Peng and H. E. Stanley: Statistical properties of the volatility of price fluctuations, Phys. Rev. E, 60, 1390/1400 (1999)
15) P. Gopikrishnan, V. Plerou, Y. Liu, L.A.N. Amaral, X. Gabaix and H.E. Stanley: Scaling and correlation in financial time series, Physica A, 287, 362/373 (2000)
16) B. B. Mandelbrot, A. Fisher and L. Calvet: Cowles Foundation Discussion Papers 1164, 1165, 1166, Yale University (1997)
17) U. A. M"uller et al.: Volatilities of different time resolutions, J. Empirical Finance, 4, 213/239 (1997)
18) A. Arneodo, J.-F. Muzy, D. Sornette: Direct causal cascade in the stock market, Eur. Phys. J. B, 2, 277/282 (1998)
19) Y. Fujiwara and H. Fujisaka: Coarse-graining and self-similarity of price fluctuations, Physica, A294, 439/446 (2001)
20) W. Brock: Pathways to randomness in the economy: Emergent nonlinearity and chaos in economics and finance, Estudios Economicos, 8 (1) (1993)
21) A. Kirman: Epidemics of opinion and speculative bubbles in financial markets, In M. Taylor (ed.), Money and financial markets chap 17, Macmillan, London (1991)
22) A. Kirman: Ants, Rationality, and Recruitment, The Quarterly Journal of Economics, 108, 137/156 (1993)
23) M. Aoki: New Approaches to Macroeconomic Modeling, Cambridge University (1996)
24) T. Lux: Herd Behavior, Bubbles and Crashes, The Economic Journal, 105, 881/896 (1995)
25) T. Lux: The socio-economic dynamics of speculative markets: interacting agents, chaos, and the fat tails of return distribution, J. Economic Behavior and Organization, 33, 143/165 (1998)
26) T. Lux, T., and M. Marchesi: Scaling and Criticality in a Stochastic Multi-Agent Model of a Financial Market, Nature, 397}, 498/500 (1999)
27) R. Cont and J. P. Bouchaud: Macroeconomic Dynamics, 4, 170 (2000)
28) J. Cremer, Physica A, 246, 377 (1999)
29) G. Iori: Avalanche dynamics and trading friction effects on stock market returns, Int. Mod. Phys. C, 10, 1149/1162 (1999)
30) D. Chowdhury and D. Stauffer: A generalized spin model of financial markets, Eur. Phys. J. B, 8, 477/482 (1999)
31) B. M. Roehner and D. Sornette: Thermometers of speculative frenzy, Eur. Phys. J. B, 16, 729/739 (2000)
32) T. Kaizoji,: Speculative bubbles and crashes in stock markets: An interacting-agent model of speculative activity, Physica A
33) S. Bornholdt: Int. J. Mod. Phys. C, 12, 667/674 (2001)
34) T. Yamano: forthcoming in Int. J. Mod. Phys. C (2002)
35) D. Sornette, D. Stauffer, and H. Takayasu: Market fluctuations II: multiplicative and percolation models, size effects and predictions. in workshop "Facets of Universality: climate, biodyamics and stock markets" (Giessen University, 1999)