

エージェントシミュレーションによる GARCH モデルと Prospect 理論の関連性の分析[†]

高橋 大志*・寺野 隆雄**

ABSTRACT GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) is a macro level model to estimate the volatility of financial markets. Prospect theory explains micro level characteristics of decision making agents in socio-psychology. Although both concepts are very fundamental in the financial and economic domain and agent-based simulation, however, there are some contradictions among the assumptions of finance theories, agents' internal states, and the behaviors of real markets. In order to bridge the two macro- and micro-level concepts, this paper develops agent-based simulation models. The model consists of simple agents with rational and/or irrational decision making functionalities for investment. The experimental results using both rational and irrational agents have shown that the behaviors of the agents with the characteristics of prospect theory coincide with the estimation by GARCH model. These results have suggested the effectiveness of the agent-based approach to the domain.

1. はじめに

ファイナンス分野において資産価格を導出するモデルとして広く知られている Capital Asset Pricing Model (以下 CAPM と呼ぶ) は、投資家の意思決定、市場条件などに一定の仮定をおき、解析的手法により均衡資産価格を導くモデルである。例えば、投資家については von Neumann and Morgenstern の期待効用最大化に基づき意思決定を行う合理的投資家を仮定し、市場については税金等のない完全な市場を仮定している。しかし、CAPM をはじめとする従来のファイナンス理論^⑧のモデルは、「仮定が非現実的である」、「モデルでは説明できないアノマリーと呼ばれる現象が存在する」、など数多くの問題点が指摘されている。とりわけ近年、従来のファイナンス理論に対し疑問を投げかける研究が多く報告されており、特に投資家の意思決定の合理性からの乖離が資産価格に与える影響に注目した“行動ファイナンス”^{⑩,⑪}と呼ばれる分野の研究が盛んになっている。Prospect 理論は、従来のファイナンス理論が仮定している期待効用理論に代わる理論として

認知心理学の分野において Kahneman^⑬らによって報告された理論であり、行動ファイナンスの研究が盛んになるにつれ、近年ファイナンスの分野においても注目されはじめてきた理論である。

一方、金融工学の分野において資産価格変動を記述するモデルは多数報告されているが、その中でボラティリティを推定するモデルとして広く知られたモデルとして GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) モデルが挙げられる^⑨。GARCH モデルは、時系列分析に基づく極めて高度な推計手法であり、一般に OLS (Ordinary Least Squares) などの手法に比べ良好な推定精度を得ることができる。しかし、GARCH モデルをはじめとする金融工学の多くのモデルの関心は、統計的な推定精度の向上に向けられ、資産価格変動が発生するメカニズム自体にはほとんど関心が向けられてこなかった。このように価格変動が生じる内部モデルをブラックボックスとして取扱う分析は、いわゆる「理論なき計測」となってしまう懸念がある。

従来より行動ファイナンスおよびボラティリティに関する分析は数多く報告されているが、両者の関連性について分析した報告はなされていない。本稿は、まずエージェントシミュレーションによって Prospect 理論など行動ファイナンスに基づく投資家行動（ミクロな挙動）がマクロな挙動を発現させることを示した。

Bridging GARCH Model and Prospect Theory in Financial Market Behaviors. By Hiroshi Takahashi (Mitsui Asset Trust and Banking) and Takao Terano (University of Tsukuba).

*三井アセット信託銀行

**筑波大学

† 2001 年 12 月 18 日受付 2002 年 3 月 15 日再受付

更に発現したマクロな挙動が金融工学で用いられる GARCH モデルなどにより説明できることを示した。本論文の主要な成果はこのようなミクロな挙動とマクロな挙動の関連性について分析を行ったことである。

2. 関連研究

2.1 合理的な意思決定について

従来のファイナンス理論は、投資家が期待効用最大化に基づく合理的な意思決定を行うことを仮定した上で、資産価格や多期間最適消費戦略を導出している¹⁾。また、時間の経過と共に新しい情報が到達する場合、対象事象の事前確率分布と新規情報を基に事後的な確率分布を推定する必要がある。Howson¹⁰⁾らは、このような信念の更新を行うケースにおいては、ベイズに基づく方法が合理的な意思決定の基準であるとの報告を行っている。ファイナンスの分野においてベイズを利用した例としては、Black⁴⁾らにより報告されたモデルが挙げられる。当モデルは、株式のリスクなどから算出される期待収益率と短期的な期待収益率からベイズ修正により統合期待収益率を算出した上で、リスクとリターンを考慮した最適な資産配分を決定するモデルであり、資産運用の実務においても広く用いられている⁴⁾。本稿に登場する全ての投資家は Black⁴⁾のモデルに基づき構築されており、その意味で本稿の投資家は現実的かつ合理的な投資行動を行う。

2.2 人間の意思決定について

認知心理学の分野において Kahneman^{13,14)}らは、人間の意思決定が期待効用最大化から乖離する傾向のあることを報告している。彼らは期待効用理論に代わる理論として、プロスペクト理論を提示し、人間の意思決定に関し、(1) 人間の意思決定は参照点からの変化に基づき行われる、(2) 損失の受け取り方は利得と比較して大きい、などの特徴があることを示唆している^{12,13)}。意思決定の合理性からの乖離に関しては、人間は自分の意思決定や能力に対して過剰な自信を持つ Over Confidence や、同じ情報をみても自分に都合良く情報を受け取ってしまうセルフ・サービング・バイアス、ランダムな変動にもトレンドを見出してしまうバイアスの存在などが報告されている³⁾。

これらの報告は合理的な意思決定から乖離を指摘したものであるが、本稿では、それら人間の認知バイアスのいくつかを、Black⁴⁾の枠組みの中でモデル化した。

本稿においては、Black⁴⁾の枠組みの中で理論価格に基づき予測を行う投資家を合理的投資家とし、それ以外の予測を行う投資家を合理的でない投資家と呼ぶこ

ととする。合理的でない投資家は、H.A.Simon のいう限定合理性と同様のものである。

2.3 ボラティリティの分析

価格のボラティリティに関しては、Shiller¹⁶⁾が資産価格変動がファンダメンタルズでは説明できない程大きいことを指摘したのをはじめとし、株価変動の大きい時期は継続する傾向があることや、ボラティリティ変動の非対称性（価格の上昇後と下降後でボラティリティの大きさが異なること）など、数多くの報告がなされている。金融工学の分野において、ボラティリティを推定するモデルは数多く報告されており、最も簡単な最小自乗法 (OLS) によるものをはじめとし、ボラティリティに自己相関のあることを取り込んだ ARCH モデル、GARCH モデル、ボラティリティ変動の非対称性を取り込んだ GARCH モデルなどが代表的なものとして挙げることができる^{5,6,9)}。

$$\text{OLS: } y_t = c + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \quad (1)$$

$$\text{ARCH: } y_t = c + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2) \quad (2)$$

$$\sigma_t^2 = a + \sum_{i=1}^p a_i \varepsilon_{t-i}^2$$

$$\text{GARCH: } \sigma_t^2 = a + \sum_{i=1}^p a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q b_i \sigma_{t-i}^2 \quad (3)$$

非対称性を取り込んだ GARCH モデル:

$$\sigma_t^2 = a + \sum_{i=1}^p (a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma_i S_{t-i} \varepsilon_{t-i}^2) + \sum_{i=1}^q b_i \sigma_{t-i}^2$$

$$S_{t-i} = \begin{cases} 1 & \text{if } \varepsilon_{t-i} < 0 \\ 0 & \text{if } \varepsilon_{t-i} \geq 0 \end{cases} \quad (4)$$

y_t は t 時点における株式の収益率、 ε_t は誤差、 c, a, a_i, b_i, γ_i は推定されるパラメータである。株式の収益率 (y_t) を定数項 (c) と誤差 (ε_t) の和により表現している点は、全ての式 (1) - (4) において共通であるが、ボラティリティ (σ) の推定については各式毎に取り扱いが異なる。OLS は、最もシンプルな推定方法であり、ボラティリティ (σ) は時間によらず一定と仮定して推定を行う。ARCH モデルおよび GARCH モデルは、株価変動の大きい時期が継続する傾向がある場合に当てはまりのよいモデルであり、ARCH モデルにおいては直近の誤差 (ε_{t-1}) が、GARCH モデルにおいては直近の誤差 (ε_{t-1}) および過去のボラティリティ (σ_{t-j}) が、推定値 (σ_t) に対して影響を与える。非対称性を取り込んだ GARCH モデルは、価格上昇時と下降時においてボラティリティのレベルが異なる傾向がある場合に当てはまりのよいモデルであり、直近の誤差 (ε_{t-1}) および過去のボラティリティ (σ_{t-j}) に加え、誤差 (ε_{t-1}) の符号も推定値 (σ_t) に対し影響を与える。式 (2) - (4) に現れるパラメータ p, q は、直近の誤差 (ε_{t-1}) および

誤差の標準偏差 (σ_{ϵ_j}) が推定値に対し影響を与える期間を指定する次数であり、一般に $(p, q) = (1, 1)$ が用いられることが多い。また、複数のモデルの中から適切なモデルを選択する手法としては、AIC (Akaike Information Criterion) に基づく方法が広く用いられており、本稿においても AIC によるモデル選択を採用した。

2.4 仮想市場に基づく分析

エージェントベースシミュレーションを金融市場の分野に応用したものとして、仮想市場に基づく分析が挙げられる。本論文のアプローチは、価格発生メカニズムをより明示的に取扱っている点が金融工学と比較した際の大きな特長となっている。

仮想市場を用いた分析においては、適応的に投資行動を変化させる異質な投資家が資産価格のバブルやクラッシュが生じるさせることや、価格は均衡に到達しないことなど、数多くの示唆に富んだ報告が行われている^{2,7)}。また、出口¹⁷⁾らによりマシンエージェントと人間の共存するより現実に近い環境における分析についても意欲的に行われている。

従来の人工市場に基づく分析の多くは、エージェントの行動を KISS 原理¹⁸⁾に従い記述しているが、本稿は投資家の意思決定をより現実に近いものとしており、その意味で KISS 原理とは異なるものである。また、仮想市場を用い、行動ファイナンスに基づく投資家行動 (ミクロな挙動) とボラティリティ変動モデル (マクロな挙動) との関連性について分析した事例は、今まで報告されておらず、本稿の新規性の一つとなっている。

3. 金融市場の設計

本市場は、1000 人の投資家からなるコンピュータ上の仮想市場であり、株式と無リスク資産の 2 資産が取引可能である。市場には複数のタイプの投資家が存在し、各自の投資ルールに基づき取引を行う。本市場は、企業利益の発生、投資家予測の形成、取引価格の決定の各ステップにより構成される。金融市場のしくみについて次節以降詳細な説明を行う。また、本分析に用いたモデルの主要なパラメータについては本稿の末尾に一覧表を掲載した。

3.1 市場において取引可能な資産

本市場には、無リスク資産とリスク資産の 2 種類が存在し、リスク資産としては、得られた利益の全てを株主に対し毎期配当として支払う証券が一つ存在するものとする^{2,15)}。企業の利益 (y_t) は、(5) 式に示すようにブラウン運動に従い発生するものとし¹⁵⁾、株式取引は当期利益公表後に行われるものとする。なお、本

市場の投資家は無限に貸借が可能であり、初期保有資産額は株式 1000、無リスク資産 1000 である (全投資家共通)。

$$y_t = y_{t-1} + \epsilon_t, \text{ where } \epsilon_t \sim N(0, \sigma_y^2) \quad (5)$$

3.2 投資家行動のモデル化

3.2.1 投資家行動の共通の枠組み

本論文の投資家モデルの構築においては、合理的かつ現実的な意思決定の枠組みを与える Black⁴⁾らのモデルを採用した。本稿では、Black⁴⁾らのモデルの枠組みの中で、理論価格に基づく合理的な投資家行動および行動ファイナンスに基づく投資家行動のモデル化を行った。Black⁴⁾らのモデルにおいては、株式のリスクおよび時価総額比率などから算出した期待収益率 (r_t^e) と、株式の短期的な期待収益率 (r_{t+1}^s) を基にベイズにより統合期待収益率 (r_t^m) の算出を行うが、本稿では株式の短期的な期待収益率のみが投資家毎に異なるものとし、他の条件は全ての投資家について共通のものとした。本実験においてはリスク資産は 1 種類のみであるので、株式のリスクなどから求められる株式期待収益率 (r_t^e) は、株式のリスク (σ_j)、市場における株式比率 (W_j)、投資家のリスク回避度 (λ)、リスクフリーレート (r_f) から、 $r_t^e = 2\lambda\sigma_j^2 W_j + r_f$ と求めることが可能である⁴⁾。次節以降、株式の短期的な期待収益率について説明する。

3.2.2 株式の予測価格算出方法

前節では全ての投資家共通の意思決定の枠組みについて説明を行ったが、本節では投資家毎に異なる短期的な期待収益率のモデルについて説明を行う。はじめに、理論価格に基づき投資を行う投資家行動を説明した後、理論価格とは異なる予測を行う投資家行動について説明を行う。後者については、行動ファイナンスの報告の中から、価格に対し強い影響を与えられ、ランダムな系列の中にもトレンドを見出すバイアス、損失を過剰に見積もるバイアスなどについてのモデル化を行った^{3,15)}。以下、各投資家行動の具体的な説明を行う。

(1) 合理的投資家の予測

本報告においては、合理的投資家は理論価格を基に投資の意思決定を行う投資家をさすものとする。株式の理論価格導出モデルについては数多くのモデルが提案されているが、本稿ではその中で最も基本的なモデルである配当割引モデルを採用する。合理的投資家の株式の予測価格 (p_{t+1}^f) および予測利益 (y_{t+1}^f) は、冬の利益 (y_t) と株式の割引率 (δ) からそれぞれ、 $p_{t+1}^f = y_t / \delta$, $y_{t+1}^f = y_t$ と算出される。

(2) トレンド予測をする投資家の予測

従来の資産価格理論によれば価格はファンダメンタルを反映したものであり過去の価格自体が現在の価格への影響はないとされている。しかし、現実の市場、社会においては価格に関する情報があふれており、現実の市場においては *Shiller* の指摘の通り価格自体が意味を持ってしまっている可能性がある¹⁶⁾。更に、ランダムな系列に対して人間はトレンドを見出す傾向があるとの報告もされており³⁾、株式価格のランダムな系列に対し投資家がトレンドを見出してしまふ可能性は小さくない。

これらの報告を背景とし、本研究においては日々ランダムに変動する株式価格の中にトレンドを見出す投資家のモデル化を行った。トレンド予測をする投資家は、直近のトレンドを外挿して次期の株式価格の予測を行う。現実の投資家の投資期間は、日中内という極めて短期の期間から長期的な期間のものまで様々であることから、本稿においてもトレンド（直近の平均リターン）の計測期間が短期（1日）、中期（10日）、長期（20日）と3種類のタイプのものを取扱った。トレンド予測を行う投資家の予測価格は、 $t-1$ 時点におけるトレンド（ a_{t-1} ）から、 $P_{t+1}^f = P_{t-1} \cdot (1 + a_{t-1})^2$ 、 $y_{t+1}^f = y_t \cdot (1 + a_{t-1})$ と算出される。

(3) プロスペクト理論に基づく投資家の予測

Kahneman らはプロスペクト理論の中で、人間の意思決定は期待効用最大化ではなく価値関数最大化に基づき意思決定を行うなどの指摘を行っている^{13,14)}。価値関数 $V(x)$ の形状は、参照点からの変化（ x ）が利得の領域にある場合と損失の領域にある場合においてその形状が異なっており、更に参照点から損失の発生している領域の傾きは、右側の利得の発生している領域の傾きと比べ約2倍程度傾きが急になっていることが大きな特徴として挙げられる¹⁴⁾。これは人間は利得に対し損失を2倍程度大きく見積もる傾向のあることを示唆している。

$$\text{価値関数: } V(x) = \begin{cases} x^{0.88} & \text{if } x \geq 0 \\ -2.25(-x^{0.88}) & \text{if } x < 0 \end{cases} \quad (6)$$

本分析では、プロスペクト理論の指摘する意思決定の特徴の中から参照点からの損失の受け取り方が利得に対し2倍程度大きいことを取り上げモデル化を行った。本稿では、直近の価格（ P_{t-1} ）が参照点の価格（ P_t^{ref} ）より低い場合に、当初の予測価格（ P_{t+1}^{bef} ）を以下の式に示したルールにより変換し、最終的な予測価格（ P_{t+1}^f ）を算出することで、損失を大きく見積もる行動をモデル化している。また、参照点の価格については、短期

（2日目の株式価格）、中期（10日）、長期（20日）、3通りのものについて分析を行った。

$$P_{t+1}^f = 2.25 P_{t+1}^{bef} - 1.25 P_t^{ref} \quad (7)$$

(4) ノイズトレーダーの予測

認知心理学の分野において、人間には同じ情報をもて自分に都合良く情報を受け取ってしまうセルフ・サービング・バイアスの存在が報告されている。実際の市場の投資家行動を観察してみると、投資家が各々異なる将来の見通しを自信を持って説明するという光景は数多くみられることから、現実の市場においても株式価格の見通しには投資家毎にばらつきが生じていると考えられる。これらの報告を背景とし本研究においては、ノイズ予測を行う投資家のモデル化を行った。ノイズ予測を行う投資家は、直近の株式価格、利益を基にして以下に示す予測を行うものとした。

$$P_{t+1}^f = P_{t-1} \cdot (1 + \eta_t) \quad \text{where } \eta_t \sim N(0, \sigma_\eta) \quad (8)$$

$$y_{t+1}^f = y_t \cdot (1 + \eta_t) \quad \text{where } \eta_t \sim N(0, \sigma_\eta) \quad (9)$$

3.2.3 株式の期待収益率算出方法

(1) 株式の短期収益率算出方法

株式の短期期待収益率（ r_t^f ）は、前節において説明を行った予測株式価格（ P_{t+1}^f ）および予測利益（ y_{t+1}^f ）と現時点の株式価格（ P_t ）から求められる。同じ予測タイプの投資家でも、詳細な見通しは異なることを反映し短期期待収益率は投資家毎に異なる誤差項（ e_t ）を含むものとした³⁾。本モデルにおいては、短期の期待収益率は現時点の価格の関数となっており、現時点の価格は後述の条件を満たす値に決定される²⁾。

$$r_{t+1}^f = \left(\frac{P_{t+1}^f + y_{t+1}^f}{P_t} - 1 \right) \cdot (1 + e_t) \quad \text{where } e_t \sim N(0, \sigma_e^2) \quad (10)$$

(2) 統合期待収益率算出方法

全ての投資家は、*Black*⁴⁾らの報告に基づき統合期待収益率（ r_t^m ）を算出する。統合期待収益率は株式のリスクなどから算出される収益率（ r_t^{eq} ）および短期期待収益率（ r_{t+1}^f ）から、 $r_t^m = \left(r_{t-1}^{eq} \cdot (c\sigma_s)^2 + r_{t+1}^f \cdot \sigma_s^2 \right) \cdot \left((c\sigma_s)^2 + \sigma_s^2 \right)^{-1}$ と算出される⁴⁾。短期の期待収益率が当期の株価に関数となっていることから、統合期待収益率も同様に当期の株価の関数となる。

各投資家は、統合期待収益率と株式のリスクの両者を勘案し、以下の目的関数 $f(w_t, P_t)$ を最大化するような株式への投資比率（ w_t ）の決定を行う。

$$f(w_t, P_t) = w_t r_t^m + (1 - w_t) r_f - \lambda \sigma_s^2 w_t^2 \quad (11)$$

3.3 取引価格の決定

取引価格（ P_t ）は、需要と供給が一致する価格にて決定される²⁾。具体的には投資家の株式保有額（ $F_t^i w_t^i$ ）の合計（需要）と株式の時価総額（供給）が等しくな

表1 シミュレーション条件 (投資家の割合)

条件番号	投資家のタイプ	投資家の比率
1	合理的投資家	1000
2	合理的: ノイズトレーダー	500:500
3	合理的: テレンド予測(10日)	500:500
4	合理的: テレンド予測(1日): テレンド予測(10日): テレンド予測(20日)	250:250:250:250
5	合理的: プロスペクト理論 (参照点2日前、合理的予測)	500:500
6	合理的: プロスペクト理論 (参照点10日前、合理的予測)	500:500
7	合理的: プロスペクト理論 (参照点20日前、合理的予測)	500:500
8	合理的: プロスペクト理論 (参照点2日前、合理的予測): 参照点10日前: 参照点20日前	250:250:250:250
9	合理的: プロスペクト理論 (参照点10日前、テレンド予測: 10日)	800:200

る価格を数値計算により算出している。

$$\sum_{i=1}^M F_i^j w_i^j = NP_i \quad (12)$$

本章において、コンピュータ上に構築した金融市場の構造およびモデル構築の背景について説明を行った。本市場における株式価格は、投資家が自律的に取引を行った結果として内生的に決定される変数であり、金融工学などの分野において数多くみられる資産価格の変動分布をあらかじめ外生的に与えるモデルとは大きく異なるものである。更に本モデルの投資家行動は従来のファイナンス理論および行動ファイナンスに基づき投資家行動のモデル化を行っている点で他の仮想市場の研究とは大きく異なるものである。

4. ボラティリティの分析

本章にて実際の株式価格および仮想市場の株式価格のボラティリティの分析結果を示す。なお、分析に先立ち全ての投資家が合理的である場合に取引価格が理論価格と一致することを確認しており、その意味で本稿のモデルは妥当なものである。

4.1 推定方法およびデータ

ボラティリティ分析には、金融工学の分野にて広く知られた、(1) 最小自乗法 (OLS), (2) ARCHモデル, (3) GARCHモデル, (4) 非対称性を取り込んだGARCHモデルを用いた。各モデルの次数は最もシンプルな1次とし、適切なモデル選択にはAIC 規準を用いた。(AIC の値が最も小さいものを最適なモデルとして選択。)

本稿では、実際の市場のデータと実験データの2通りのデータについてボラティリティの分析を行った。実際の市場データは、資産運用の実務において広く知られた M.S.C.I. 株式指数および Dow Jones Industrial 個

別銘柄株式価格[日次: 1980/1-2001/10 (データ数5679)]とし、実験データは、投資家割合の異なる9種類の条件の実験データとした(表1参照)。なお、1回の実験は2500 period とし、同一条件にて10回繰り返して実験を実施した。

条件1は全ての投資家が合理的な場合であり、条件2は、合理的な投資家が500人、ノイズトレーダーが500人混在する場合である。全ての投資家が合理的な投資家である場合は(条件1)、取引価格は理論価格と一致することから、従来のファイナンス理論の示唆通りOLSによるモデルが適切なモデルとして選択されることが期待される。

条件3-4は合理的な投資家とテレンド予測を行う投資家が混在する場合である。条件3では中期的なテレンド(直近10日間)を見出す投資家と合理的な投資家が同数(500人)存在し、条件4では、3タイプのテレンドを見出す投資家(短期、中期、長期テレンド)と合理的な投資家が同数(250人)存在する。

条件5-9は合理的な投資家とプロスペクト理論に基づく投資家と合理的な投資家が混在する場合である。プロスペクト理論に基づく投資家の変換前の株式予測価格(P_{t+1}^{exp})は、条件5-8では配当割引モデルモデルに基づくものであり、条件9ではテレンド予測(直近10日間のテレンド)に基づくものである。投資家の割合については、条件5-7ではプロスペクト理論に基づく投資家(参照点はそれぞれ異なる)と合理的な投資家が同数(500人)存在し、条件8では参照点の異なる3種類のプロスペクト理論に基づく投資家と合理的な投資家が同数(250人)存在する。条件9では、合理的な投資家800人とテレンド予測の投資家200人が存在する。

表2 AIC一覧(上:M.S.C.I. 株式指数, 下:D.J. 個別銘柄)

(a) M.S.C.I 株式指数									
	AUSTRALIA	AUSTRIA	BELGIUM	CANADA	DENMARK	FRANCE	GERMANY	HONG KONG	ITALY
OLS	18783	17765	17195	16558	17786	18617	19120	23476	20657
ARCH (1)	18110	17385	16935	15893	17600	18305	18828	23126	20349
GARCH (1, 1)	17877	16823	16507	14681	17310	17891	18267	21436	19814
非対称-GARCH (1, 1)	17816	16815	16489	14645	17311	17848	18223	21279	19804
	JAPAN	NETHERLANDS	NORWAY	SINGAPORE	SPAIN	SWEDEN	SWITZERLAND	UK	USA
OLS	19785	17896	20400	19797	18927	20224	17277	17734	16324
ARCH (1)	19416	17338	19733	18702	18568	19789	16901	17344	15672
GARCH (1, 1)	18718	16686	19387	17631	18024	18967	16521	17050	14911
非対称-GARCH (1, 1)	18665	16648	19358	17560	18019	18945	16444	17024	14823

(b) D.J.個別銘柄										
	ALCOA	AMER. EXPRESS	AT & T	BOEING	CATER PILLAR	COCA COLA	DISNEY (WALT)	DU PONT E I DE NEMOURS	EASTMAN KODAK	EXXON MOBIL
OLS	23768	24780	22619	23687	23638	22015	23870	22231	22907	20281
ARCH (1)	23625	24379	21988	23487	23342	21450	23371	22036	22442	19717
GARCH (1, 1)	23042	24006	21234	23121	23182	21100	23011	21648	22223	19364
非対称-GARCH (1, 1)	23022	23958	21234	23090	23141	21062	22965	21628	22191	19348
	GEN. ELEC.	GENERAL MOTORS	HEWLETT - PACKARD	INTEL	INTL. BUS. MACH.	INTL. PAPER	JOHNSON & JOHNSON	J P MORGAN CHASE & CO.	MCDONALDS	MERCK
OLS	21288	22990	26176	27728	22859	23243	21699	24524	21745	21423
ARCH (1)	20939	22756	26012	27548	22571	23113	21374	24136	21507	21294
GARCH (1, 1)	20301	22487	25650	27142	21904	22369	21178	23640	21169	20945
非対称-GARCH (1, 1)	20254	22448	25643	27104	21822	22365	21130	23582	21157	20917
	MINNESOTA MNG. & MNFG.	PHILIP MORRIS	PROCTER & GAMBLE	UNITED TECHNOLOGIES	WAL MART STORES					
OLS	20804	22797	21879	22528	23949					
ARCH (1)	20384	22622	21197	22396	23760					
GARCH (1, 1)	19930	22126	20514	21981	23297					
非対称-GARCH (1, 1)	19915	22127	20454	21866	23285					

4.2 推定結果

(1) 実際の市場データ

実際の市場データに各モデルを適用した場合のAICの値を表2(上段各国指数, 下段: 個別銘柄)に示す。表中にて網掛けとなっているものは、AICにより4つのモデルの中で最適なモデルとして選択されたものである。(例えばAUSTRALIAの株式指数に4つのモデルをあてはめた場合のAICは、それぞれ18783, 18110, 17877, 17816である。この中でAICが最も小さいのは17816であることから、非対称性を取り込んだGARCHモデルが最適なモデルとして選択される。)実際の市場データにおいては、株式指数および個別銘柄のいずれにおいても、非対称性を取り込んだGARCHモデルが適切なモデルとして選択されている。表3は、適切なモデルとして選択された非対称性を取り込んだGARCHモデルの係数を示したものである(括弧内はt値)。推定された係数のほとんど全ては統計的に有意あることを確認できる(t値参照)。これらの結果は、現実の株式価格変動は価格の上昇後と下降

後でボラティリティの水準が異なる傾向にあることを示すものである。

(2) 実験データ

実験データについても前節と同様に、ボラティリティの分析を行った。表4、表5はそれぞれAICの値、およびAICにて選択されたモデルの係数を示したものである。実験は同一条件において10回実施しているが、AICについては全ての結果、推定係数については一部(最初の3回分)のデータを示した。(表4は各条件毎に結果をまとめたものであるが、例えば条件9の1回目の実験においてはAICは8606が4つの中では最も小さく、2回目の実験においては8523が最も小さいことを確認できる。なお、実験データの分析については、定数項(c)のないモデルによるボラティリティの分析も別途実施しており、表4と同様のモデルがAICにて選択されることを確認してある。)

表4よりシミュレーション条件と適切なモデルの組み合わせは、条件1-2: OLS, 条件3: ARCHモデル, 条件4: GARCHモデル, 条件5-9: 非対称性を取り込

表3 推定された係数 (上:M.S.C.I. 株式指数, 下:D.J. 個別銘柄)

(a) M.S.C.I 株式指数					
	c:定数項	a:残差定数項	ai:ARCH項	bi:GARCH項	γ :非対称項
AUSTRALIA	0.04 (2.3)	0.16 (11.9)	0.08 (8)	0.77 (65.1)	0.11 (12.2)
AUSTRIA	-0.01 (-0.4)	0.03 (10.8)	0.07 (16.7)	0.9 (258.9)	0.03 (4.3)
BELGIUM	0.03 (2.2)	0.05 (12)	0.06 (9.9)	0.88 (121.3)	0.05 (8.2)
CANADA	0.03 (2.7)	0.02 (11)	0.07 (10.7)	0.89 (198)	0.06 (9.1)
DENMARK	0.04 (2.5)	0.05 (13.6)	0.07 (10.7)	0.88 (124.3)	0.02 (3.2)
FRANCE	0.04 (2.9)	0.08 (11.3)	0.05 (5.9)	0.85 (94.2)	0.08 (9)
GERMANY	0.02 (1.4)	0.06 (10.2)	0.06 (7.8)	0.87 (128.4)	0.08 (10.3)
HONG KONG	0.08 (4.1)	0.1 (19.1)	0.05 (8.5)	0.85 (150.7)	0.14 (23.3)
ITALY	0.03 (1.7)	0.09 (8.9)	0.08 (12.5)	0.86 (96.4)	0.05 (6.2)
JAPAN	0.03 (1.9)	0.05 (9.8)	0.07 (12.6)	0.87 (132.2)	0.08 (9.9)
NETHERLANDS	0.05 (3.6)	0.02 (9.5)	0.04 (6.4)	0.91 (154.8)	0.06 (8.9)
NORWAY	0.04 (2.2)	0.12 (13.9)	0.07 (10)	0.84 (121.2)	0.06 (8.3)
SINGAPORE	0.03 (2.2)	0.07 (23)	0.1 (14.9)	0.81 (147.6)	0.1 (14.4)
SPAIN	0.02 (1.4)	0.07 (11)	0.07 (9.1)	0.87 (106.2)	0.04 (5)
SWEDEN	0.07 (4.4)	0.05 (10.8)	0.05 (9.8)	0.9 (156.1)	0.05 (7.9)
SWITZERLAND	0.04 (2.7)	0.11 (13)	0.06 (5.9)	0.78 (69.3)	0.14 (13.5)
UK	0.03 (1.9)	0.04 (8.4)	0.04 (6.2)	0.9 (130.3)	0.06 (7.3)
USA	0.04 (3.2)	0.02 (12.8)	0.02 (5.5)	0.92 (270)	0.07 (15.8)

(b) D.J.個別銘柄					
	c:定数項	a:残差定数項	ai:ARCH項	bi:GARCH項	γ :非対称項
ALCOA	0.05 (2.1)	0.05 (7.9)	0.03 (7.2)	0.94 (229.5)	0.03 (7.2)
AMER. EXPRESS	0.05 (1.9)	0.12 (9.2)	0.03 (8.3)	0.91 (184.7)	0.06 (12.4)
AT & T	0.02 (1.2)	0.07 (11)	0.08 (14.3)	0.89 (161.3)	0.02 (2.4)
BOEING	0.04 (1.6)	0.04 (10.2)	0.02 (8.5)	0.95 (371.1)	0.03 (10.3)
CATERPILLAR	0.02 (1)	0.17 (13.7)	0.04 (7.6)	0.89 (144.4)	0.07 (11.8)
COCA COLA	0.06 (3.3)	0.08 (10.8)	0.03 (6.4)	0.91 (192.4)	0.06 (11)
DISNEY (WALT)	0.06 (2.6)	0.14 (15.9)	0.06 (13.8)	0.88 (267.6)	0.06 (13.5)
DU PONT E I DE NEMOURS	0.04 (1.9)	0.02 (7.3)	0.01 (5.2)	0.97 (544.1)	0.02 (8.1)
EASTMAN KODAK	0.02 (1.1)	0.42 (18.6)	0.1 (15.9)	0.74 (84.1)	0.07 (10.5)
EXXON MOBIL	0.03 (2)	0.08 (9)	0.06 (7.6)	0.89 (119.4)	0.04 (4.7)
GEN. ELEC.	0.06 (3.3)	0.03 (6.5)	0.02 (5.8)	0.94 (281.4)	0.05 (9.7)
GENERAL MOTORS	0.01 (0.5)	0.07 (7.8)	0.03 (7.8)	0.92 (224.3)	0.05 (11)
HEWLETT - PACKARD	0.04 (1.2)	0.1 (10.9)	0.03 (11.2)	0.94 (334.3)	0.02 (5.5)
INTEL	0.1 (2.9)	0.36 (10.2)	0.04 (7.1)	0.88 (116.6)	0.07 (10)
INTL. BUS. MACH.	0.02 (1.1)	0.04 (9.6)	0.03 (8)	0.93 (294.2)	0.06 (17.7)
INTL. PAPER	0.02 (0.8)	0.03 (5.7)	0.04 (11.9)	0.95 (356.5)	0.02 (4.4)
JOHNSON & JOHNSON	0.05 (2.8)	0.13 (9.4)	0.03 (4.8)	0.88 (100.9)	0.07 (10.1)
J P MORGAN CHASE & CO.	0.04 (1.6)	0.12 (13.3)	0.05 (10.1)	0.89 (259.9)	0.08 (13.9)
MCDONALDS	0.06 (3)	0.06 (7.4)	0.03 (6.6)	0.93 (177.3)	0.04 (6.3)
MERCK	0.07 (3.4)	0.05 (7.5)	0.02 (5.2)	0.94 (219.1)	0.04 (8.5)
MINNESOTA MNG. & MNFG.	0.04 (2.2)	0.05 (13)	0.05 (13.1)	0.92 (272.4)	0.03 (7.4)
PHILIP MORRIS	0.08 (3.6)	0.07 (13.1)	0.05 (11.9)	0.93 (280.8)	0.01 (1.8)
PROCTER & GAMBLE	0.05 (2.9)	0.04 (13.8)	0.04 (8.2)	0.92 (571.4)	0.06 (12.3)
UNITED TECHNOLOGIES	0.04 (2.1)	0.04 (7.6)	0.01 (4)	0.95 (297.5)	0.06 (14.2)
WAL MART STORES	0.11 (4.7)	0.08 (7.6)	0.04 (8.8)	0.93 (172.7)	0.03 (4.7)

んだ GARCH モデルであることを確認できる。

条件1においては、ばらつきはあるものの OLS が適切なモデルとして選択されており、従来のファイナンス理論の示唆と整合的な結果が得られた。一方、条件3-9の結果から、行動ファイナンスの示唆する合理的でない投資家行動が、金融工学において報告されている GARCH モデルに従う価格変動を発現させていることを確認できる。

トレンド予測の影響を確認した実験(条件3-4)において、トレンド予測の投資家が1種類の場合(条件3)においては ARCH モデルの当てはまりが良かったのに対し、3タイプのトレンド予測の投資家が混在している場合(条件4)においては GARCH モデルの当てはまりが良好であったのは興味深い。実際の市場における投資家の投資期間は様々であり、数時間程度と

いう短い期間で投資を行うものから年金運用などのように数年単位という非常に長い期間で投資を行うものまで存在する。実際の市場において、様々なタイプの投資家が各々異なるトレンドを見出している場合には GARCH モデルに従う挙動が現れ、たまたまトレンドの方向が一致しているような場合には ARCH モデルに従う挙動が現れている可能性がある。

プロスペクト理論に基づく投資家の影響を確認した実験において(条件5-9)、非対称性を取り込んだ GARCH モデルが適切なモデルとして選択されている。この結果は、前節において取扱った現実の株式市場の結果と同様のものである。更に推定係数の結果を確認すると、現実の市場データの推定係数の符号がほとんど全てのケースにおいて正の符号であるのに対し(表3)、実験結果(表5)の分析にて全ての符号が正のと

表4 AIC一覧 (シミュレーション結果)

条件番号	モデル	シミュレーション番号									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
条件1 合理的100%	OLS	9704	9686	9796	9782	9701	9782	9677	9795	9640	9737
	ARCH(1)	9706	9687	9798	9784	9701	9780	9677	9794	9642	9738
	GARCH(1, 1)	9708	9689	9798	9780	9703	9780	9678	9796	9641	9739
	非対称-GARCH(1, 1)	9709	9685	9800	9782	9704	9782	9680	9799	9642	9740
条件2 ノイズ	OLS	8761	8909	8816	8808	8720	8971	8623	8686	8873	8725
	ARCH(1)	8764	8910	8817	8810	8722	8970	8620	8685	8874	8727
	GARCH(1, 1)	8765	8909	8819	8809	8722	8971	8621	8683	8877	8728
	非対称-GARCH(1, 1)	8766	8908	8820	8810	8724	8973	8623	8684	8878	8730
条件3 トレンド1種類	OLS	6589	6396	6699	6323	6688	6444	6433	6495	6642	6601
	ARCH(1)	6345	6168	6446	6152	6473	6251	6190	6290	6459	6425
	GARCH(1, 1)	6347	6168	6447	6151	6474	6253	6192	6292	6461	6427
	非対称-GARCH(1, 1)	6348	6170	6449	6153	6476	6254	6193	6293	6463	6428
条件4 トレンド3種類	OLS	6720	7132	6456	6641	6779	6742	6800	6684	6716	6695
	ARCH(1)	5625	5982	5417	5553	5690	5567	5678	5581	5682	5578
	GARCH(1, 1)	5609	5971	5402	5548	5670	5565	5647	5565	5666	5530
	非対称-GARCH(1, 1)	5610	5973	5404	5550	5672	5566	5649	5566	5668	5543
条件5 Prospect 参照点2日前	OLS	10031	10011	9981	10049	9804	10021	10095	10171	10073	10011
	ARCH(1)	9954	9913	9863	9983	9741	9950	10010	10070	9995	9933
	GARCH(1, 1)	9956	9914	9864	9981	9743	9951	10009	10072	9993	9932
	非対称-GARCH(1, 1)	9860	9832	9774	9908	9661	9867	9915	9983	9899	9835
条件6 Prospect 参照点10日前	OLS	10365	10606	10534	10664	10564	10722	10555	10409	10462	10488
	ARCH(1)	10357	10586	10507	10616	10553	10693	10540	10385	10440	10463
	GARCH(1, 1)	10332	10544	10474	10591	10512	10642	10526	10317	10399	10434
	非対称-GARCH(1, 1)	10179	10396	10316	10426	10382	10453	10358	10162	10264	10280
条件7 Prospect 参照点20日前	OLS	10480	10755	10878	10919	10766	10774	11060	10558	11466	10782
	ARCH(1)	10423	10699	10788	10821	10717	10736	10974	10525	11005	10616
	GARCH(1, 1)	10272	10574	10691	10671	10647	10619	10826	10429	10886	10443
	非対称-GARCH(1, 1)	10127	10444	10592	10535	10517	10531	10680	10274	10751	10315
条件8 Prospect 参照点3種類	OLS	10461	10508	10555	10515	10632	10940	10600	10766	10571	10751
	ARCH(1)	10426	10481	10538	10486	10613	10895	10596	10706	10543	10690
	GARCH(1, 1)	10400	10427	10496	10450	10591	10867	10564	10601	10500	10659
	非対称-GARCH(1, 1)	10277	10337	10407	10327	10515	10767	10456	10486	10396	10534
条件9 Prospect トレンド予測	OLS	9031	8621	9678	8701	8419	90488	9458	8680	9304	10139
	ARCH(1)	8865	8544	8859	8623	8380	8920	8813	8612	8799	9323
	GARCH(1, 1)	8679	8545	8851	8600	8379	8900	8757	8588	8786	8906
	非対称-GARCH(1, 1)	8606	8523	8783	8528	8362	8851	8718	8508	8722	8791

表5 推定された係数 (シミュレーション結果)

		c:定数項	a:残差定数項	ai:ARCH項	bi:GARCH項	r:非対称項
条件1	1 OLS	0.01 (0.2)	—	—	—	—
	2 OLS	-0.02 (-0.6)	—	—	—	—
	3 OLS	-0.04 (-1.1)	—	—	—	—
条件2	1 OLS	-0.02 (-0.7)	—	—	—	—
	2 OLS	-0.02 (-0.7)	—	—	—	—
	3 OLS	-0.02 (-0.7)	—	—	—	—
条件3	1 ARCH	-0.03 (-1.4)	0.49 (21.2)	0.41 (8.8)	—	—
	2 ARCH	-0.07 (-3.9)	0.47 (21.9)	0.38 (8.9)	—	—
	3 ARCH	0.01 (0.4)	0.54 (21.2)	0.35 (7.6)	—	—
条件4	1 GARCH	0.05 (3.5)	0.23 (12.1)	0.8 (12.6)	-0.11 (-4.8)	—
	2 GARCH	-0.01 (-0.4)	0.23 (15.8)	0.81 (12.4)	-0.08 (-6.4)	—
	3 GARCH	0 (0)	0.2 (12.7)	0.8 (11.9)	-0.09 (-5.4)	—
条件5	1 非対称-G	-0.07 (-2)	2.37 (16.4)	-0.04 (-2.6)	0.09 (1.7)	0.47 (6.2)
	2 非対称-G	-0.07 (-2)	2.17 (12.2)	-0.03 (-1.3)	0.13 (1.9)	0.47 (5.8)
	3 非対称-G	-0.1 (-2.8)	2.17 (12.2)	-0.04 (-2.1)	0.16 (2.5)	0.45 (5.8)
条件6	1 非対称-G	0.02 (0.5)	0.36 (7.5)	-0.06 (-10.7)	0.84 (42.7)	0.23 (9.7)
	2 非対称-G	-0.09 (-2.2)	0.47 (7)	-0.07 (-7.2)	0.83 (32.8)	0.25 (8.6)
	3 非対称-G	-0.04 (-1.2)	0.46 (7.1)	-0.06 (-9.8)	0.82 (31.4)	0.25 (8.9)
条件7	1 非対称-G	0.01 (0.2)	0.19 (7.4)	-0.06 (-7.6)	0.9 (66.4)	0.2 (11.9)
	2 非対称-G	-0.04 (-0.9)	0.26 (6.9)	-0.06 (-6.9)	0.88 (56.7)	0.23 (10.2)
	3 非対称-G	-0.06 (-1.4)	0.28 (6)	-0.03 (-3.2)	0.86 (48.5)	0.2 (9.8)
条件8	1 非対称-G	-0.02 (-0.4)	0.4 (6.9)	-0.07 (-6.8)	0.84 (36.7)	0.24 (10.1)
	2 非対称-G	-0.03 (-0.8)	0.44 (5.7)	-0.05 (-4.4)	0.83 (29.7)	0.21 (8.3)
	3 非対称-G	-0.02 (-0.6)	0.46 (6.2)	-0.05 (-5.8)	0.82 (32.1)	0.22 (8.9)
条件9	1 非対称-G	0.01 (0.2)	0.24 (6.3)	0.03 (2.2)	0.75 (25.2)	0.19 (9.2)
	2 非対称-G	0.02 (0.9)	0.14 (3.8)	-0.02 (-1.9)	0.88 (31.1)	0.1 (5.7)
	3 非対称-G	-0.01 (-0.4)	0.28 (6.8)	0.05 (3.1)	0.73 (26.1)	0.15 (9.4)

なるケースが存在するのは条件9のみであった。(条件9において全ての係数が正の符号となったのは半数程度。一方、条件1-8については10回分全ての推定結果をみても全ての符号が正となる場合は見られなかった。)その意味で、本稿にて取扱ったモデルの中では、トレンド予測を持ちプロスペクト理論に基づく意思決定を行う投資家(条件9)が、実際の価格に最も類似した価格変動を引き起こしている。これらの結果は、長期間に渡ってみると市場参加者はトレンド予測を行いかつプロスペクト理論の示唆の通り利得と損失に対し異なる反応をして場合が多いことを示唆するものである。

本稿においてファイナンス理論に基づいた投資家行動が、現実の市場の価格変動と類似した挙動を発現させることを確認した。しかし、より詳細な価格変動のメカニズムの分析を行うためには、より現実に近い投資家モデルの構築など数々の課題を解決する必要があると考えられる。

5. まとめ

本稿は、エージェントベースシミュレーションにより、投資家の意思決定に焦点をあてた行動ファイナンスと金融工学の分野において広く知られたGARCHモデルの関連性を分析したものである。分析の結果、行動ファイナンスなどにおいて報告されている合理的でない投資家行動がGARCHモデルに従う価格変動を発現させること、実際の市場の価格変動とプロスペクト理論に基づく投資家の引き起す価格変動に類似性のあることを確認した。これらの結果は投資家行動の観点からGARCHモデルに根拠を与えるものであると同時に、実際の市場においても合理的でない投資家が取引価格に対し絶えず影響を与え続けている可能性を示唆するものである。

今後の課題として、詳細でより現実に近い投資家モデルに基づく分析、主要なマクロ経済指標などを絡めた分析などが挙げられる。

謝 辞

本研究の一部は文部科学省科学研究費補助金基盤研究(B)14380154「多主体複雑系に基づくエージェント社会の構築と適用」の支援を受けて実施したものである。

付録A パラメーター一覧

本文にて用いたパラメータの一覧を以下の表に示す。(パラメータ設定を変えた実験においても、本稿と同様にGARCHに基づく価格変動が発現することを確認してある。)

表A-1 パラメーター一覧表

M : 投資家の数 (1000)
N : 発行株式数 (1000)
F_i^t : t 期における第 i 番目の投資家の総資産額 ($F_0^i=2000$:共通)
W_t : t 期における市場の株式比率 ($W_0=0.5$)
w_i^t : t 期における第 i 番目の投資家の株式への投資割合 ($w_0^i=0.5$:共通)
y_t : t 期における企業の利益 ($y_0=0.5$)
r_f : リスクフリーレート (0.05/200:一定)
δ : 株式の割引率 (0.1/200:一定)
λ : 投資家のリスク回避度 (1.25:共通, 一定)
c : 均衡収益率の分散調整係数 ($\sqrt{2}/200$:共通, 一定)
σ_s : 株式収益率の標準偏差の投資家の期待値 ($0.2/\sqrt{200}$:共通, 一定)
σ_y : 利益変動の標準偏差 ($0.2/\sqrt{200}$:一定)
σ_n : 株式の短期期待収益率の誤差の標準偏差 (0.01:共通, 一定) (但し合理的投資家の場合は0)
σ_η : ノイズトレーダーの予測のばらつきの標準偏差 (0.01)

参 考 文 献

- 1) R. Axelrod: The Complexity of Cooperation -Agent-Based Model of Competition and Collaboration, Princeton University Press (1997)
- 2) W. B. Arthur et al.: The Economy as an Evolving Complex System II, Addison-Wesley, 15/44 (1997)
- 3) M. Bazerman: Judgement in Managerial Decision Making, John Wiley & Sons (1998)
- 4) R. Black and R. Litterman: Global Portfolio Optimization, Financial Analysts Journal, September-October, 28/43 (1992)
- 5) T. Bollerslev: Generalized autoregressive conditional heteroskedasity, Journal of Econometrics, 31, 307/327 (1986)
- 6) R. F. Engle: Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, Econometrica, 50, 987/1007 (1982)
- 7) J. M. Epstein: Growing Artificial Societies Social Science From The Bottom Up, MIT Press (1996)
- 8) M. Friedman: Essays in Positive Economics, University of Chi-

- cago Press (1953)
 - 9) L. R. Glosten, R. Janannathan and D. Runkle: On the Relation between the Expected Value and the Volatility of Nominal Excess Returns on Stocks, *Journal of Finance*, 48, 1779/1801 (1993)
 - 10) C. Howson and P. Urbach: *Scientific Reasoning*, Open Court Publishing Company (1993)
 - 11) J. E. Ingersoll: *Theory of Financial Decision Making*, Rowman & Littlefield (1987)
 - 12) Kagel, H. John and Alvin E. Roth.(eds.): *The Handbook of Experimental Economics*, Princeton University Press (1995)
 - 13) Daniel Kahneman and A. Tversky: Prospect Theory of Decisions under Risk, *Econometrica*, 47, 263/291 (1979)
 - 14) Daniel Kahneman and A. Tversky: Advances in Prospect Theory: Cumulative representation of Uncertainty, *Journal of Risk and Uncertainty*, 5 (1992)
 - 15) A. Shleifer: *Inefficient Markets*, Oxford University Press (2000)
 - 16) Robert J. Shiller: *Irrational Exuberance*, Princeton University Press (2000)
 - 17) 出口 弘, 和泉 潔, 塩沢由典, 高安秀樹, 寺野隆雄, 佐藤 浩, 喜多 一: 人工市場を研究する社会のおよび学問的意義, *人工知能*, 15, 982/990 (2000)
-