

《小特集》

CG と技術計算の交差点

白 山 晋*

ABSTRACT Many demonstrations that engineering computations are furnished with Computer Graphics (CG), and CG uses the fruits of scientific computations have been shown in past two decades. Those attempts have yielded 'Scientific Visualization' and 'Physically Based Modeling in CG'. However, until the middle of 90's, the scientific visualization has not always required a photo realistic image, and most of CG modeling has not been based on the governing equations in computational engineering and science. Recently, photo realistic scientific visualizations and CG models based on the faithful modeling to the physics are utilized for comparing numerical results with observations/experiments and enhancing an image quality of CG for the natural phenomena. In this paper, first, meaning of the photo realistic scientific visualizations is considered. Second, it is shown that the improved physically based modeling in CG for the real physics has been close to the model in scientific computations. Finally, we will refer to a ripple effect from crossroads between CG and scientific computation.

1. はじめに

科学技術計算の結果をコンピュータグラフィックス (CG) の手法を用いて表現する試みは、一般的なものになっている。CG 側では、サイエンティフィックビジュアルゼーション¹⁾として位置づけられ、80 年代の後半から 90 年代にかけて盛んに研究された。その成果は計算側に活かされ、解析対象に対する様々な数理的、あるいは工学的知見の提示に役立っている。しかしながら、計算結果の CG 化の意味するものは可視化支援としての CG 技術の利用であり、CG としての質の高さ (写実性、あるいは芸術性) は要求されなかった。CG として見ると質の低い画像であっても、解析にとって十分な情報が抽出できたからである。また、サイエンティフィックビジュアルゼーションとして総括される前から開発されていた可視化技術^{2~5)}の成熟によって、汎用可視化ソフトが登場し、可視化されたものの解釈に興味の対象が移行していったからでもある。ところが、扱う現象が複雑になり、科学技術計算が大規模化し、膨大なデータが生じ始めると、既存の可視化手法や可視化システムの不備が指摘されるようになった。例えば、数値解の信頼性を確かめる方法の少なさが問題になっている。いくつかの改善案の中で

も、高度な抽象化による情報統合の方法とともに、実験、観測データとの広範囲の比較が重要視されている^{6,7)}。そうした比較作業において写実性が要求されることがある。結果として、CG としても質の高い可視化画像が登場することになるだろう。

一方、CG 側で計算結果を利用する際には、計算対象となる物体形状を写実的に表現し、テクスチャ (模様のある包装紙の一部分を考えるとよい) を、計算結果に従って変形させる (流体の場合は墨絵流しのようなもの) といった方法が利用されることが多かった。このような計算結果の利用とは別に自然物、自然現象の映像化に対して、物理法則にもとづくモデリングとシミュレーションが用いられることがある。近年では破壊⁸⁾、腐食⁹⁾のモデリングなど、複雑現象に対するモデルも提唱されている。しかし、これらの物理モデルは、計算資源の問題から簡略化されたモデルであることが多い。その結果、制作者の観察力に依存して映像が修正される (例えば、一枚一枚の画像を観察にもとづいて修正する)。ところが、計算技術の発展と情報開示、安価で高速なパソコンが登場すると、CG 側から科学技術計算に類する計算手法が提案され、映像製作のために数百万点規模の計算が行われるまでになっている。

このように CG と科学技術計算には、写実性の追求と、現実の状態 (運動を含む) を表すためのモデリングとシミュレーションという共通項が存在する。しかしながら、双方の交流は少なく、目的の違いから独自

Crossroads between CG and Scientific Computation. By *Susumu Shirayama* (University of Tokyo).

* 東京大学大学院工学系研究科環境海洋工学専攻

の発展を遂げている。そして、写実性に関してはCG側が、モデリングとシミュレーションに関しては技術計算側の優位性が強調される。実際には、両者の差異は縮小しているのであるが、そのような認識を持つものは少ない。本稿では、技術計算における写実的可視化の必要性、CGの中の流体シミュレーションにおいて技術計算に匹敵する手法が提案され、大規模計算が行われていることに着目し、その背景と現状、CGと技術計算を同じ視点で見たときにどのような相互補完が可能なのかについて言及する。

なお、CGにおける一つの潮流である非写実的レンダリングを技術計算の可視化に適用するという研究¹⁰⁾や、特異点・特異線探索の利用による特徴抽出といったCGと技術計算の共通課題については紙面の都合で述べることはできない。留意すべきことは、両者とも、CGで提案されている方法を技術計算の可視化に直接的には適用できないのではないかということである。前者を、総描による地図の簡略化手法¹¹⁾や注釈情報の埋め込みとの差違の観点から、後者を、流体解析におけるいくつかの研究成果^{12~14)}の類似性の観点から検討すれば、この主張を理解していただけたと思う。ただし、今後の展開は大いに期待できる。自動化と階層化をキーワードとしてながめてみればよいと思う。詳しくは文献15,16)を参照してほしい。

2. サイエнтиフィックビジュアライゼーションからCGへ

物体の落下のように物の位置自身が必要な情報となり、また、可視である(見える)場合は少なく、見えない対象に対し物理量の分布をいかに表現するかということと、その中から何かしらの定量値と普遍性を見出すことが実験や科学技術計算における可視化の方針である。見えないものを視覚化するという命題と普遍性を見いだすことを意識すると、可視化画像は抽象的なものになる。

サイエнтиフィックビジュアライゼーションという言葉が広く用いられはじめたのは、1987年のACMの報告書‘VISC¹⁾(Visualization In Scientific Computing)’以降である。CGの分野で名付けられたものではあるが科学技術計算の可視化そのものと捉えてもよいだろう。このカテゴリーに属する可視化にとって特徴的なことは、CG側からの可視化であっても、科学啓蒙などの一部の用途を除いて、現実感、あるいは写実性を考慮しないということである。このため、技術計算を利用して写実的なCG画像を作成しようとする試みの多

くが、写実的な物体や背景の中に、等値線、等値面、ベクトル等を埋め込むといったものとなっている。CGとしてみた場合に質が低い(写実性が不足している)と指摘される所以である。後述する物理シミュレーションにおいては、このような可視化を映像制作に用いることはほとんどない。

では、技術計算結果の可視化に対してCGとしての質の高さをもつ写実的な表現が必要なのだろうか。ユーザー支援という意味では、‘Yes’と即答できるものもある。例えば、山を表現する場合、等高線よりも立体図や航空写真の方が実際の山の形を把握しやすい。また、たなびく煙とか揺らめく木の葉のほうが、速度ベクトル図よりも直感的に空気の流れを捉えることができる。ただし、定量性という面では、等高線を採用し、その比較から山の特徴を調べ、ベクトル場を解析することで流れの性質を調べることが必要になる。

写実性は、ユーザー支援ばかりでなく、計算結果の検証過程において要求される場合がある。例えば、流れをトレーサー法で可視化する場合、トレーサー粒子はシャボン玉のように個々が識別できるものか煙粒子のように集合体として扱うものかのどちらかである。粒子による光の散乱は粒子径によっては画像に強く影響を与える。このため、実験や観測との比較の際、その効果を加味することがより正確な情報を提示することになる。また、シャドウグラフやシュリーレン法のように、光の性質を用いた可視化が行われているが、得られた画像は、密度の等値線、等値領域による表示と比較されることが多い。この比較において光の振る舞いを正しく評価できれば、より詳細な結果の検討が可能になる^{17,18)}。このように写実性が検証過程において鍵となる場合もある。図1, 2に二つの例を示す。図1は密度成層中の煤煙の振る舞いを、ナビエ・ストークス方程式の数値解をもとに多数の粒子を追跡することによって調べたものである¹⁹⁾。粒子密度を計算し、不透明度を対応させて光学計算を行った(仮想粒子密度法²⁰⁾と呼ぶ)。多重散乱までは含めていないが観測結果との直接的な比較が可能であると考えている。図2は急拡大管の流れをピクセル露光法²¹⁾によって可視化したものである。実験における浮遊粒子による可視化法に相当し、可視化結果の解釈において粒子の光学的性質が決め手となる方法である。

CGの分野ではパーティクルシステムの拡張機能として仮想粒子密度法と同様な手法が用いられている。また、仮想粒子密度法による可視化画像が、CG作品としてテレビコマーシャル等に登場したこともある。ピ

クセル露光法は、CGにおけるLIC法²²⁾を技術計算の視点から再構築したものである。

このようにして積極的に写実性を取り込んだ計算結果の可視化は映像としてみた場合においても、CGとしての質の高さをもち、物理現象の解明からエンターテインメント系コンピュータグラフィックスまでの幅広い分野で適用できる方法になっている。

3. コンピュータグラフィックスにおける自然現象の映像表現

コンピュータグラフィックスの分野では、映像を効果的、かつ効率的に作成することが重要である。このため、画像の質、リアルタイム性、ステアリングシステム、映像の制御が重視される。技術計算での手法をCGに応用する場合、CGにおける映像作成者の負担は小さいものではない。例えば、流体シミュレーションであれば、レイノルズ数などの物理パラメータや時間刻み幅などの計算パラメータの選択には、流体现象と数値計算の知識が必要となる。これを補うのがリアルタイム性とステアリングシステムである。実時間でパラメータを制御できるシステムであれば、不足する知識を補うことができるだろう。また、物理法則にもとづくシミュレーションであっても映像製作者のもつイ

メージに近い画像を得る仕組みも重要な要素となる。現実にはありえない力の作用や非物理的な拘束条件が要求される。技術計算では棄却される要素であるが、CGにおけるモデリングでは重要な研究テーマとなっている。このため、流体運動のような制御の難しい対象に対しては、技術計算側では支配方程式が確立していても、直感的に、粒子の行動規則を与えることができる粒子シミュレーションによるCG作成が好まれる。

一方、近年の計算技術、計算機の発展によって、様々な物理現象を計算機上で再現することが可能になっている。計算手法がウェブ上で公開され、ソフトウェアパッケージとして流通することも多くなった。技術計算として有効な計算精度をもつ数値計算が行われることは少ないが、CGの分野でも数値シミュレーションの利用が増えている。ただし、高精度数値シミュレーションの結果を直接レンダリングするという方法は、CG側では現実的なものとは考えられていない。CGにおける映像製作という目的が、技術計算における計算の目的とは異なるためである。ところが、最新のCGにおいて利用されている方法は、技術計算でのものと遜色がない。しかし、文献を見る限りでは、‘CG用のモデリングである’という注釈が数多く見受けられる。この解釈の違いは、歴史的な経緯から生じたものである。流体シミュレーションに着目して歴史的背景をみてみよう。

CGにおいて、流体運動をナビエ・ストークス方程式の数値計算によって扱うという方法自体は80年代には実現されていた。ただし、当時の計算環境、計算手法では、現実の流体運動を模倣するようなデータを得ることは難しく、映像製作に用いられることはほとんどなかった。1990年12月のSan Diego Workshop on Volume Visualization²³⁾において、著者らが紹介した計算流体力学(CFD: Computational Fluid Dynamics)における可視化例に対し、CGにおいてナビエ・ストークス方程式の数値解を利用することに意味があるのかという議論がなされた。長い議論の末、スーパーコンピュータが使えるユーザーは限られており、現実的ではないという結論が下されたことを覚えている。その後も、90年代の中頃までCFDを用いた映像制作はほとんどなされなかった。とはいえ、CGの中で自然現象の映像化に対する要求は多く、

- (a) 予め形状を決めてレンダリングするもの
- (b) パーティクルシステムによるもの
- (c) 簡略化された支配方程式を用いた数値解析をもとにレンダリングを工夫するもの

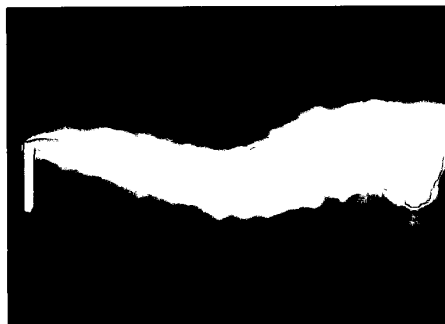


図1 密度成層中の煤煙の挙動



図2 急拡大管内の流れ(ピクセル露光法による可視化)

によって映像制作が続けられていた。(a)はいわゆる絵画的手法である。(b),(c)は物理法則にもとづくモデリングと呼ばれるが、映像化の目標となる自然現象に対して、技術計算の分野での支配方程式を用いるわけではない。(b)は、主として流体現象や柔軟物体の変形に対するもので、粒子、または、セルに対する行動規則によって現象がモデリングされる。(c)は、局所ルールの利用等によって現象をより簡易的な支配方程式で表現した後、粒子法、格子セルを用いて数値解を求め、レンダリング技法を駆使することで複雑な自然現象を表現するものである。(a)と(b)の方法では現象の時間変化を再現することが難しく、映像化のかかなりの部分が映像製作者の加筆修正という試行錯誤に費やされる。また、流体現象の映像化のために用いられる一部のパーティクルシステムは、流体運動を粒子の行動規則や統計的な流速場モデルを導入することで自動的に表現しているが^{24,25)}、行動規則は流体運動に対する支配方程式を完全に満たすものではないので(特に境界条件を満足しないものが多い)、時として不自然な挙動を示すことがある。さらに、アニメーション作成¹⁾において粒子を制御するパラメータの設定が煩雑であることが指摘されている。このような半自動システムを用いて非定常な非線形現象を扱う場合、全体のつながりを保持しながら映像の一部分を修正することは難しく、試行錯誤を繰り返すことになる。この状況で(c)の発展形である‘技術計算の分野で用いられている支配方程式をもとに、計算負荷の軽い部分は忠実に、それ以外をCGモデリングによって簡易化する’という方法が提案されるようになった。これは気象・海洋の分野におけるパラメタリゼーションの方法に近い。

4. ナビエ・ストークス方程式の数値解を用いた流体現象の映像表現

現在のCGにおいてナビエ・ストークス方程式の数値計算が注目されたのは、FosterとMetaxasの研究²⁶⁾が契機となっている。FosterとMetaxas以降の方法を説明するために支配方程式を示しておこう。支配方程式

式は、ブシネスク近似を用いた非圧縮性の熱流体の運動を表すものである。速度場を (u, v, w) 、圧力場を p 、温度場を T とし、圧力場と温度場を $p = \bar{p} + p'$, $T = \bar{T} + T'$ のように基本場と変動場に分けると、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = -\nabla p' + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{g} T' + \mathbf{F}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{Pe} \Delta T + Q, \quad (4)$$

となる。ここで、 Re はレイノルズ数、 Pe はペクレ数、 $\mathbf{g}$ は重力加速度を示す。また、 $\mathbf{F}$ は外力、 Q は熱量、 ∇ は勾配オペレータ、 Δ はラプラスオペレータを示す。適切な初期条件と境界条件が与えられれば、(1),(2),(3)式を離散化することによって、任意の時間の状態を数値的に調べることができる。最新のCGで用いられているナビエ・ストークス方程式の数値解法は、本質的にはCFDのものと同じであるが、いくつかの違いがある。CGにおける流体シミュレーションの本質を見るために具体的な方法を紹介する。ただし、数学的厳密性にはふれない。

はじめに、 n ステップでの流体の状態がわかったときに、 Δt 時間後の $n+1$ ステップでの状態を予測してみよう。説明のために、一次精度の時間積分を用いる。また、浮力項($\mathbf{g}T$)、外力項、温度場に対する式((3)式)を省略する。未知数は、 $\mathbf{u}^{n+1}$, $(p')^{n+1}$ である。

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^n = 0, \quad (4)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^{n+1} = 0, \quad (5)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t \left(-u \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} - v \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} - w \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} - \nabla p' + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} \right)^n, \quad (6)$$

ここで、 $(\cdot)^n$ は n ステップでの値を、 $(\cdot)^{n+1}$ は $n+1$ ステップでの値を示す。式(6)から、 n ステップでの状態がわかれば空間微分項は適切な離散化によって計算できるので、 $n+1$ ステップの状態を得ることができる。つまり、初期状態がわかれば、その後の時々刻々の変化が計算できるのである。初期条件と境界条件を除いて問題となるのは、

- (i) 時間刻み幅 Δt の与え方
- (ii) 空間微分項の扱い
- (iii) 圧力場 p' の求め方
- (iii') 連続の式((4),(5)式)の扱い

である。小さな時間刻み幅しか使えないのであれば、

¹⁾ CGにおける‘アニメーション’は、数値計算などのシミュレーション技法によって作成される動画ばかりでなく、鍵となるフレームを用意しそれらを連続したコマに割り当てる、あるいは補間を用いてコマを作り動画化するという意味で使われる。また、そのような作業を行う人間をアニメーターと呼ぶことが多い(分業体制が確立していることもCGの特徴かもしれない)。本稿では前者の意味で‘アニメーション’を引用する。

高速な計算機であっても、CGからの要求であるリアルタイム性を満たすことができない。時間刻み幅とも関連するのだが、微分項を適切に求めないと結果は振動し、場合によっては発散する。(iii)と(iii')は等価である。非圧縮性流体の場合、連続の式が、圧力場 p' に関する方程式を、陰的、あるいは制約条件的に表している。

(i)は、(6)式を、

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t \left(-u \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} - v \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} - w \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} - \nabla p' + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} \right)^{n+1}, \quad (7)$$

とすると解決できる(これを陰解法という)。詳しくはCFDのテキストに譲ることにするが境界条件や非線形性に起因して、どんな Δt に対しても、安定、かつ精度の高い計算ができるというわけにはいかないが、ユーザーが時間刻み幅を決める際の負担が小さくなる。ただし、非線形性のためにこの式を解くことは難しい。この点を少し詳しく述べておく。まず、(i)と(ii)に関連する式(2)の核となる部分をモデル方程式によって示す。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (8)$$

この方程式は非線形の移流方程式である。 $u \frac{\partial u}{\partial x}$ は、非線形項、あるいは移流項と呼ばれる。図3に示す u の初期分布の時間的変化を、式(8)を数值的に解くことによって求めてみよう。簡単のため、両端の境界条件を、 $u=0$ とする。

等間隔に格子点(サンプル点)を並べ、格子点に番号をつけ、格子点上の u の時々刻々の変化を、式(8)を用いて求めることになる。格子点数が増えれば計算時間が大きくなる。少ない格子点数では精度良く解を求めることができない。より少ない格子点数で視覚的に問題のない数値解を得ることがCGにおける流体シミュレーションでの命題である。効率の良い計算のた

めには、時間微分項と空間微分項の扱いが鍵となる。

(6)式のように時間微分項を一次精度で扱おうと、

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \left(-u \frac{\partial u}{\partial x} \right)^n, \quad (9)$$

となる。格子点の間隔を Δx とし、中心差分を用いれば、

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t (-u_i^n \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x}), \quad (10)$$

となり、 n ステップから $n+1$ ステップの状態を求めることができる。ところが、式(10)で振動のない数値解を求めるためには時間刻み幅を非常に小さくする必要がある(実際は、時間刻み幅を小さくしても丸め誤差などに起因してすぐに発散する)。大きな時間刻み幅を用いるために陰解法にすると、

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t (-u_i^{n+1} \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x}), \quad (11)$$

となる。ただし、(11)式は非線形方程式であり簡単に解くことはできない。そこで、次のような線形化が行われる(線形化によって時間精度は低下する)。これを半陰解法と呼ぶ。

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t (-u_i^{n+1} \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x}). \quad (12)$$

(12)式における未知数は、 $(u_i^{n+1}, u_{i+1}^{n+1}, u_{i-1}^{n+1})$ の3つである。すべての格子点での方程式を重ねると、未知数の数の連立方程式を得ることができる。これを行列で表現すると、

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{\Delta t u_2^n}{2\Delta x} & 0 & & \\ -\frac{\Delta t u_3^n}{2\Delta x} & 1 & \frac{\Delta t u_3^n}{2\Delta x} & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & & -\frac{\Delta t u_i^n}{2\Delta x} & 1 & \frac{\Delta t u_i^n}{2\Delta x} \\ 0 & & & \dots & \dots \\ & & & & -\frac{\Delta t u_{i\max-1}^n}{2\Delta x} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ \dots \\ u_i^{n+1} \\ \dots \\ u_{i\max-1}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2^n \\ u_3^n \\ \dots \\ u_i^n \\ \dots \\ u_{i\max-1}^n \end{pmatrix}$$

となる。2次元、3次元になったとき、また、微分項の離散化の方法が複雑になると、このような単純な行列

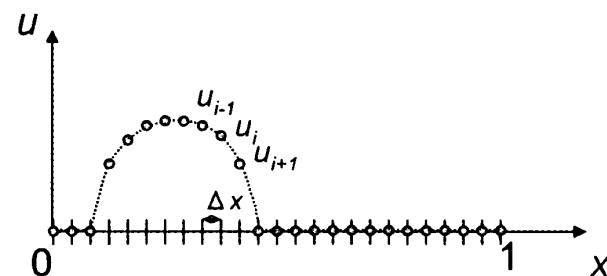
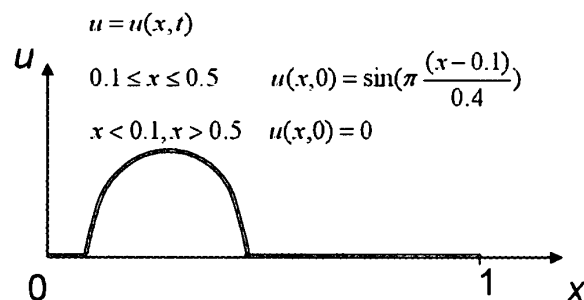


図3 初期分布と格子点(サンプル点)による離散化

にはならないが、基本的には、 $Ax=b$ の形の連立方程式を解きながら時間を進めていくことになる。後述する圧力に対する方程式を効率的に解く場合にも行列の考えが必要になる。このため、流体シミュレーションにおいては、高速な行列解法が効率化の鍵となっている。

陰解法以外で大きな時間刻み幅を可能にする方法の一つにセミラグランジェ法がある²⁷⁾。この方法は最新のCGにおける流体シミュレーション手法の根幹ともいえるものである。式(8)をラグランジェ的に表すと、

$\frac{du}{dt}=0$ となる。ここで、 $\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}$ である。この式の意味するものは、スカラー量としての u が速度 u で運ばれていくというものである。セミラグランジェ法は、この性質を利用し、ある時間ステップ n (時刻 t とする)での u の分布 $u^n(x, t)$ にもとづいて、 u^{n+1} を、 $u^{n+1}=u^n(x-u^n\Delta t, t)$ と計算する方法である。 $u^n(x, t)$ を適当な補間によって見積もれば、 $u^n(x-u^n\Delta t, t)$ が計算領域からはみ出さない範囲で時間刻み幅の制限はなくなる。ただし、線形化の影響は残っており、時間精度の低下に関しては留意しなければならない。

同様に(2)式の核となる以下のモデル方程式(拡散方程式)においても時間刻み幅は制約を受ける。この場合も、大きな時間刻み幅のために陰解法が用いられる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{Re} \Delta u. \quad (13)$$

次に(iii)と(iii')を考える。圧力に対する方程式を導くために、(6)式の発散をとると、

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^{n+1} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^n + \Delta t \nabla \left(-u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z} - \nabla p' + \frac{1}{Re} \Delta u \right), \quad (14)$$

となる。式(4)、(5)を用いることにより、次の圧力のポアソン方程式を得ることができる。

$$\Delta(p')^n = \nabla \left(-u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z} \right)^n + \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^n}{\Delta t}. \quad (15)$$

右辺第2項を残しているのは連続の式を補正するためである。この方法は、1965年にHarlowとWelchが提唱したもので、MAC法と呼ばれている²⁸⁾。(15)式を離散化し、行列を反転することで圧力場が得られる。技術計算において、この計算時間の全体に占める割合は大きく、高速な行列解法が求められている。CGにおいても、リアルタイム性を実現するためには圧力場の算出法が重要な役割を担う。

MAC法には、主として二つの問題がある。一つは右

辺項の計算量が多いということである。もう一つは、連続の式が満たされない可能性(連続の式が満たされないという流量が保存しない)があるというものである。これらの欠点を解消するために、SMAC法、HSMAC法、SOLA法²⁹⁾が提案された。さらにMAC法の系統とは別にいくつかの解法が発展している。中でも、1968年にChorinによって提案されたフラクショナルステップ法の原型³⁰⁾(プロジェクション法:射影法として知られている)は、CGにおける流体シミュレーションの転機となるアイデアを与えた。

フラクショナルステップ法では時間積分をいくつかの段階に分離する(分離の方法、境界条件によってはプロジェクション法と等価になる)。例えば、2段階のフラクショナルステップ法では、(6)式を

$$\frac{\tilde{u} - u^n}{\Delta t} + \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right)^* = 0, \quad (16)$$

$$\frac{u^{n+1} - \tilde{u}}{\Delta t} = -(\nabla p')^{**} + \frac{1}{Re} \Delta u^{n+1}, \quad (17)$$

のように分離する。 $\tilde{u}$ は中間ステップでの速度ベクトルである。半陰解法の場合、 $(\cdot)^*$ を、 $u^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + v^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + w^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}$ とする。(17)式の発散をとることによって、次の圧力方程式が導かれる。

$$\Delta(p')^{**} = \frac{\nabla \tilde{u}}{\Delta t}. \quad (18)$$

右辺項の計算量が少ないことと、連続の式の補正プロセスが明示的であること((18)式によって求められる圧力場と(17)式によって連続の式が補正される)がMAC法との違いである。ここで、分離法は任意ではないことに留意しなければならない。全体の時間精度、流量の保存特性は、分離の方法と中間ステップでの境界条件によって決まる³¹⁾。このため、適切な分離を行わないと、時間精度が保証されず流量も保存しない。

FosterとMetaxasの用いた解法²⁶⁾は、スタッガード格子、SOLA法(SMAC法という見方もできるが)、中心差分、陰的な拡散項の離散化である。CFDの研究者であればわかるように、この方法自体の新規性はない。そして、拡散項に陰解法を用いているとはいえ、安定な計算を行うためには、低レイノルズ数であることが要求される。このような欠点があるにもかかわらず、この研究が着目されたのはその結果である。ただし、計算パラメータの選択の難しさ、扱える流体運動が限定されるために広範には利用されなかった。FosterとMetaxasの方法の欠点を補う形で提唱されたのが、Stamの方法³²⁾である。Stamは、非線形項に起因

する数値的不安定性に着目し、この部分の離散化にセミラグランジェ法を用いた（論文中では独自の方法としている）。また、フラクショナルステップ法に類似した方法を採用し、いくつかのステップを陰的に扱うことで安定性を高めている（反転すべき行列を単純なものにし、高速な行列解法を適用した）。セミラグランジェ法と陰的解法によって安定な計算が可能となり、少ない格子点数（数万点規模）で視覚的に問題のない対象を扱ったために、リアルタイムで流体シミュレーションを行うことができた。しかしながら、彼の方法には問題も多い。最も問題なのは、時間積分の分割法に物理的な意味も数学的な意味もないことである。実際、時間精度が保証されず、流量も保存しない。彼は、‘CGとしてのモデリングであるから’と主張しているが、CGであるから許容されるものではない。なぜならば、起点がナビエ・ストークス方程式の数値解法であるフラクショナルステップ法であり、流体現象に対する物理モデルによって簡易化されたわけではないからである。それにも関わらず、リアルタイムで流体シミュレーションを示した功績は大きく、CG側では高い評価を得ている。流体運動を模擬するための映像制作者の観察作業が著しく緩和されたことを示しているのだろう。後処理としてのレンダリングを除き、*Stam*の手法の特徴をまとめると、

- ・セミラグランジェ法の採用
 - ・時間積分の特殊な分割と、陰解法、及び高速な行列解法の適用
 - ・実時間での計算が可能な格子点数
 - ・実時間での計算が可能な境界条件
- となる。

その後、CG側でも、この方法に対するいくつかの問題が指摘されるようになった。特に、連続の式を満足しない点が問題となり（物体まわりの流れを扱う場合も問題になったはずである）、2001年のSIGGRAPHにおいて発表された二つの論文では、セミラグランジェ法のみを採用し、全体の枠組みは、式(16)、(17)、(18)に示した2段階フラクショナルステップ法（Fedkiwら³³⁾）、SOLA法（FosterとFedkiw³⁴⁾）となっている。また、計算機の高速度化にともない、格子点数も百万点を超えている。そして、一フレームの計算量も数分とリアルタイムシミュレーションにはなっていない。

CG側での認識は異なるが、流体運動の基本部分の数値解法に関してはCFDとの違いはなくなったと考えてよい。2002年SIGGRAPHの二つの論文でもこの傾

向は変わっていない^{35,36)}。CFD側の見方をすれば、2段階のフラクショナルステップ法において移流項の離散化をセミラグランジェ法としたシミュレーション手法をベースにして、物理モデル（自由表面の挙動^{34,35)}、煙³³⁾、炎³⁶⁾）を加えているといえる。いずれの映像も現実の流体現象を十二分に表現しているように見える。そして、これ以上の写実性は不要であり、リアルタイム性が今後の課題であると主張するCG研究者は多い。しかし、水面などの自由表面、煙、炎ともに普段何気なく目にしているものであるが、それらの挙動は複雑であり、微細な部分までを見てはいないのである。作られた映像を何度か見返し、現実の現象を注意深くみると、不自然な部分が少なくないことに気づくだろう。シミュレーションの高速化とともに、注意深い観察によるモデルの修正、新たなモデルの提案は、CGばかりでなく、技術計算にとっても重要である。

5. まとめ 一交差点の先にあるもの一

流体現象を中心に述べてきたが、他の物理現象に対しても同様であろう。結果の検証の際に写実性が鍵となり、計算結果の可視化において光学系を忠実に再現する動きが生じるはずである。CGにおける物理シミュレーションに関しては、現実的な計算時間で計算可能なものに対しては、精度の悪い数値解であっても、それらを積極的に利用するといった方向性が示された後に、計算機の性能向上が技術計算と同じ方法の利用を可能にするものと考えられる。そして、複雑現象を忠実に再現する高精度計算から視覚化に貢献する部分をCG的にモデリングし、類似する現象に対して簡易的な計算とそのCGモデリングを組み合わせるという戦略の中で技術計算側と協調していくことが望ましい。モデリングを通して現象の本質に迫る、現象の本質をふまえたモデリングを行うという理工学にとって重要な方法論を、CGにおける物理シミュレーションを通して展開できる可能性がある。

CGと技術計算の現状は、双方の研究者が交差点に立っている状態であろう。交差点の先にあるものは、お互いの協力によるさらに複雑な現象の解明である。

参考文献

- 1) McCormick, B.H., DeFanti, T.A. and Brown, M.D. (ed.): Visualization in Scientific Computing, Computer Graphics, 22.4, 51/58 (1987)
- 2) Buning, P.G. and Steger, J.L.: Graphics and flow visualization in computational fluid dynamics, AIAA-85-1507-CP, (1985)
- 3) Weston, R. P.: Color graphics techniques for shaded surface displays of aerodynamic flowfield parameters, AIAA Paper-87-

- 1182-CP, (1987)
- 4) 白山 晋, 桑原邦郎: 流れのシミュレーション結果を可視化するシステム, 日経 CG, 創刊前秋号, 42/51 (1986)
 - 5) Shirayama, S. and Kuwahara, K.: Flow visualization in computational fluid dynamics, *Int. J. of Supercomputer Applications*, **4.2**, 66/80 (1990)
 - 6) 白山 晋, 斎藤幸二郎, 大和裕幸, 増田 宏, 安藤英幸: 比較空間を用いた CFD シミュレーションのデータ比較に関する研究, 日本造船学会論文集第 190 巻, 41/50 (2001)
 - 7) 白山 晋, 岩川麻紀, 河村哲也: 密度成層流体中の煙突噴流の可視化法について, 日本流体力学会年会 2000 講演論文集, 377/378 (2000)
 - 8) O'Brien, J.F. and Hodgins, J.K.: Graphical modeling and animation of brittle fracture, *Proceedings of SIGGRAPH'99*, 135/140 (1999)
 - 9) Gobron, S. and Chiba, N.: 3D surface cellular automata and their application, *J. of Visualization and Computer Animation*, **10.3**, 143/158 (1999)
 - 10) Kirby, R.M., Marmanis, H. and Laidlaw, D.H.: Visualizing multivalued data from 2D incompressible flows using concepts from painting, *Proceedings of IEEE Visualization '99*, (1999)
 - 11) ESRI White Paper: Automation of Map Generalization - the Cutting-Edge Technology, May, 1996
 - 12) Chong, M.S., Perry, A.E., and Cantwell, B.J.: A general classification of three-dimensional flow fields, *Phys. Fluids*, **A2** (5), 765/777 (1980)
 - 13) Dallman, U.: Topological structures in three-dimensional vortex flow separation, *AIAA-83-1735*, (1983)
 - 14) Perry, A.E. and Chong, M.S.: A description of eddying motions and flow patterns using critical point concepts, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **19**, 125/155 (1987)
 - 15) 白山 晋, 大和裕幸: 可視化情報分析支援システムのフレームワーク, 日本造船学会論文集第 192 巻 (2002)
 - 16) 白山 晋, 大和裕幸: 流れの可視化情報の設計への利用法について, 航空宇宙技術研究所特別資料 SP-46, 249/254 (2000)
 - 17) Hesselink, L.: Digital image processing in flow visualization, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **20**, 421/485 (1988)
 - 18) Tamura, Y. and Fujii, K.: Visualization for computational fluid dynamics and the comparison with experiments, *AIAA Paper* 90-3031, (1990)
 - 19) Iwagawa, M., Kawamura, T. and Shirayama, S.: Numerical simulation of advection and diffusion of the smoke in stratified flow, *Theoretical and Applied Mechanics*, **48**, 339/348 (1999)
 - 20) Shirayama, S.: Visualization of 3D unsteady flow using a particle tracing method, *Proceedings of Experimental and Numerical Flow Visualization, FED-Vol.128*, ASME, December, 201/208 (1991)
 - 21) 白山 晋, 太田高志: ピクセル露光法によるベクトル場の可視化, 日本計算工学会論文集第 1 巻, 19990018, 141/147 (1999)
 - 22) Cabral, B., Leedom, L.: Imaging vector field using Line Integral Convolution, *Proceedings of SIGGRAPH'93*, 263/270 (1993)
 - 23) Elvins, T.T. and England, N. (ed.): Special issue on San Diego Workshop on Volume Visualization, *Computer Graphics*, **24.5**, (1990)
 - 24) N.Chiba, K.Muraoka, H.Takahashi and M.Miura: Two-dimensional visual simulation of flames, smoke and the spread of fire, *J. of Visualization and Computer Animation*, **5**, 37/53 (1994)
 - 25) Stam, J., and Fiume, E.: Dipping fire and other gaseous phenomena using diffusion process, *Proceedings of SIGGRAPH'95*, 129/136 (1995)
 - 26) Foster, N., and Metaxas, D.: Modeling the motion of a hot, turbulent gas, *Proceedings of SIGGRAPH'97*, 181/188 (1997)
 - 27) Staniforth, A., and Cote, J.: Semi-Lagrangian integration schemes for atmospheric models: A Review, *Monthly Weather Review*, **119**, 2206/2223 (1991)
 - 28) Harlow, F.H. and Welch, J.E.: Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface, *Phys. Fluids*, **8**, 2182/2189 (1965)
 - 29) Hirt, C.W. and Cook, J.L.: Calculating three-dimensional flows around structures and over rough terrain, *J. Comp. Phys.*, **6**, 322/325 (1972)
 - 30) Chorin, A. J.: Numerical solution of the Navier-Stokes equations, *Math. Comput.*, **22**, 745/762 (1968)
 - 31) Gresho, P.M. and Sani, R.L.: On pressure boundary conditions for the incompressible Navier-Stokes equations, *Int. J. of Numerical Methods in Fluids*, **7**, 11/46 (1990)
 - 32) Stam, J.: Stable fluids, *Proceedings of SIGGRAPH'99*, 121/128 (1999)
 - 33) Fedkiw, R., Stam, J., and Jensen, H.W.: Visual simulation of smoke, *Proceedings of SIGGRAPH'01*, 12/17 (2001)
 - 34) Foster, N. and Fedkiw, R.: Practical animation of liquids, *Proceedings of SIGGRAPH'01*, 23/30 (2001)
 - 35) Enright, D., Marschner, S., and Fedkiw, R.: Animation and rendering of complex water surfaces, *Proceedings of SIGGRAPH'02*, 736/744 (2002)
 - 36) Nguyen, D.Q., Fedkiw, R. and Jensen H., W.: Physically based modeling and animation of fires, *Proceedings of SIGGRAPH'02*, 721/728 (2002)