《講　座》

領域分割法入門
第3回　領域分割法の高速化（1）

秋葉　博*・鈴木正文*・大山知信*

ABSTRACT　This is the third article of a serial in four installments of an introduction on domain decomposition method for finite element analysis. Numerical algorithms of the iterative substructuring method for structural analysis in which two domains only have a common boundary are discussed in detail. On the basis of this, the balancing domain decomposition (BDD) method is presented, as technique of speed up of the iterative substructuring method.

1.　前回の復習と今回の内容

前回は，領域分割法には部分領域（subdomain）がオーバラップする領域分割法と，オーバラップしない領域分割法の2種類があること，部分領域がオーバラップしない領域分割法に反復型部分構造法があること，オーバラップする領域分割法，オーバラップしない領域分割法ともに実は，線形方程式を解くための前処理と捕らえることができること，これを *Schwarz* のフレームワークと呼ぶことなどを述べた．以下，簡単に復習してみる．

計算対象領域を Ω とする．Ω を有限要素分割する．V を，有限要素分割により離散化された Ω 上の自由度のうち，幾何学的境界条件の課されていない自由度のベクトル空間とする．同じく Ω 上の偏微分方程式を離散化した線形方程式を

$$Ku=f \tag{1}$$

とする．u は V のベクトルである．K は正定値対称と仮定する．別に正定値対称行列 G を取り，方程式(1)を次のように変形する．

$$GKu=Gf \tag{2}$$

G として K の逆行列に近いものが取れるなら，方程式(2)は(1)よりも解きやすくなるはずである．幾何学的には，V の内積を，標準の $v^t u$ から $v^t G^{-1} u$ に交換することで，有限要素基底関数，したがって方程式に別の表現を与えて解きやすくすることを意味する．これが方程式(1)の前処理であり，G を前処理行列と呼ぶ．

ここで，Ω を領域分割する．この分割は要素を切断するようには取らず，境界面は必ず要素の面（2次元の場合は線分）になるものとする．I を分割された部分領域のインデクスとして各部分領域を Ω^I と記す．Ω^I は互いにオーバラップしてもしなくてもよいが，部分領域は全体として Ω を覆い尽くしていなければならない．Ω の自由度を Ω^I とその境界に含まれる節点の自由度に制限した自由度の空間を V^I とする．V^I は V の部分ベクトル空間である．

ここで，V^I 上の半正定値対称行列 K^I を定義して，V^I 上の線形方程式

$$K^I u^I = f^I \tag{3}$$

を考える．u^I, v^I は V^I のベクトルである．K^I は，K を V^I に制限した行列，あるいは Ω^I のメッシュから得られる係数行列などとする．K^I の取り方にはある程度の任意性があり，正則性も求めない．方程式(1)をグローバルな方程式，(3)をローカルな方程式と呼ぶ．P^I を V から V^I への直交射影子とする．V のベクトルとローカルな方程式を結びつけるため，グローバルなベクトルをローカルなベクトルに写す行列 G^I を次で定義して，ローカルな前処理行列と呼ぶ．

$$G^I \equiv \left(K^I\right)^- P^I \tag{4}$$

ここで $\left(K^I\right)^-$ は K^I の一般化逆行列である．このように作った G^I から，G を

Introduction to Domain Decomposition Method — [3] Improvement of Domain Decomposition Method (1). By *Hiroshi Akiba*, *Masabumi Suzuki* and *Tomonobu Ohyama* (Allied Engineering Corporation)

*（株）アライドエンジニアリング ソルバ開発チーム

$$G = \sum_I G^I \tag{5}$$

で定義する．この G を(2)の前処理行列としてとる．K^I はおよそ K を部分領域に制限したもの，G^I は K^I の逆行列に近いものであるから，それらを重ねてできる(5)は K の逆行列に近いものになるだろう．これが，領域分割法が方程式(1)を解くための前処理，と捕らえることの所以である．

今回は以上のフレームワークを部分領域がオーバラップしない領域分割法に反復型部分構造法に適用し，具体的な反復漸化式にまで話をつなげることにする．K^I，G^I，G などの具体形が3章で与えられる．さらに，反復型部分構造法の前処理にマルチグリッド法の手法を採り入れたBDD法(Balancing Domain Decomposition method[6,7])を中心に，領域分割法の高速化手法について紹介する．扱う問題は線形構造解析に限定する．議論は少しこみいるかもしれないが，理論にわたるものではなく，数値計算アルゴリズムについてのものである．

2. 反復型部分構造法の標準形

2.1 方程式と領域分割

線形材料の微小変形平衡問題を扱う．解析対象構造物 Ω において方程式(1)を考える．u，f はそれぞれ変位場，外力の場を離散化したベクトルである．以下混乱の恐れのない限り，変位場を離散化して得られたベクトルも，単に変位場，あるいは離散化された変位場と呼ぶことにする．外力場なども同様とする．K は対称行列になり，変位場を一意的に決定するだけの充分な幾何学的境界条件も与えられているとする．この場合，幾何学的境界条件を満たす許容変位場ベクトルに剛性行列 K は正則に作用する．簡単のため，幾何学的境界条件として以下ゼロ拘束を仮定する．

いつもの通り Ω は有限要素分割されている．Ω にオーバラップしない領域分割を施し，I を分割された部分構造のインデクスとして各部分構造を Ω^I と記す．Ω に課された幾何学的境界条件(変位ゼロ)は Ω^I 上に引き継がせる．本講座前回と同様，部分構造間の境界全体あるいはその一部を内部境界と呼ぶ．オーバラップしない領域分割による部分領域を部分構造と呼ぶことにする．

2.1 部分構造法のフレームワーク

部分領域がオーバラップしないSchwarz法[1]を適用するために，部分構造法のフレームワークを以下に準備する．全自由度は内部境界上の自由度とそれ以外の自由度に分かれる．後者の自由度は，部分構造内部の自由度と部分構造の境界の自由度から内部境界の自由度と幾何学的境界条件の課された自由度を除いたものから成るが，簡単のため，以下では後者の自由度を，単に部分構造内部の自由度と呼ぶことにする．

前回と同様，全自由度をもつベクトル u に対し，部分構造内部の自由度のベクトルを u^i，内部境界上の自由度のベクトルを u^s と記す．方程式(1)は次のようにブロック表示される．

$$\begin{pmatrix} K_{ii} & K_{is} \\ K_{si} & K_{ss} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^i \\ u^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_i \\ f_s \end{pmatrix} \tag{6}$$

前回は，ここから部分構造内部自由度を消去するために．係数マトリクスをブロックLU分解した．直接法ではそれで十分だが，反復法に適用するためには，ここではもう一手間かけて次のとおり LDL^T-分解する．

$$\begin{pmatrix} K_{ii} & K_{is} \\ K_{si} & K_{ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ K_{si}K_{ii}^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K_{ii} & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & K_{ii}^{-1}K_{is} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$S \equiv K_{ss} - K_{si}K_{ii}^{-1}K_{is} \tag{8}$$

前回述べたとおり，S はSchur補元と呼ばれる．1はそれぞれ単位行列である．次のように変数変換する．

$$\begin{pmatrix} u^{(i)i} \\ u^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & K_{ii}^{-1}K_{is} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^i \\ u^s \end{pmatrix} \tag{9}$$

すると方程式(6)は次のように2つに分解される．

$$K_{ii}u^{i(i)} = f_i \tag{10}$$

$$Su^s = f_s - K_{si}K_{ii}^{-1}f_i \tag{11}$$

2つの解 $u^{(i)i}$，u^s が求まれば，全体の解 u は次のように構成できる．

$$u = \begin{pmatrix} u^i \\ u^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -K_{ii}^{-1}K_{is} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^{(i)i} \\ u^s \end{pmatrix} \tag{12}$$

ここで，行列 $P^{(i)}$，$P^{(s)}$ を

$$P^{(i)} \equiv \begin{pmatrix} 1 & K_{ii}^{-1}K_{is} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{(s)} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -K_{ii}^{-1}K_{is} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

と定義する．すると，式(12)の変数 $u^{(i)i}$，u^s による解 u の表示は次のように整理できる．

$$u = u^{(i)} + u^{(s)} \tag{14}$$

$$u^{(i)} \equiv P^{(i)}u = \begin{pmatrix} u^{(i)i} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^{(s)} \equiv P^{(s)}u = \begin{pmatrix} -K_{ii}^{-1}K_{is}u^s \\ u^s \end{pmatrix} \tag{15}$$

式(15)を見ると，$P^{(i)}$と$P^{(s)}$がベクトルuを2つの成分$u^{(i)}$, $u^{(s)}$に分解し，片方の成分だけを取り出す射影行列であることがわかる．さらに$P^{(s)}$を使うと，Schur補元Sと元の係数行列Kの関係，方程式(11)の右辺ベクトルと元の右辺ベクトルfの関係が次のように書ける．

$$KP^{(s)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}, \quad P^{(s)T} f = \begin{pmatrix} 0 \\ f_s - K_{si} K_{ii}^{-1} f_i \end{pmatrix} \tag{16}$$

式(15)の第1の式から$u^{(i)}$と$u^{(i)\prime}$を自然に同一視できることがわかるので$u^{(i)\prime}$も$u^{(i)}$と記すことにする．f_iやu^iについても同様に扱う．また，関係式(16)を使って方程式(11)を書き直せば，方程式(1)は結局次のように分解できることになる．

$$u = u^{(i)} + u^{(s)} \tag{17}$$

$$K_{ii} u^{(i)} = f_i \tag{18}$$

$$u^{(s)} = P^{(s)} u^s \quad : \quad KP^{(s)} u^s = P^{(s)T} f \tag{19}$$

方程式(18)は部分構造ごとに完全に分離された方程式の集まりであり，$u^{(i)}$は部分構造ごとに独立に計算できる．一方，方程式(19)は内部境界の自由度に関する方程式であり，グローバルな処理が必要となる．

式(19)では，まず方程式からベクトルu^sを解き，これに射影行列$P^{(s)}$の掛け算を施して$u^{(s)}$を求める．方程式(19)の係数行列$KP^{(s)}$は式(16)で示したとおり，半正定値対称である．さらに，Kは正則だから右辺ベクトルfに対する変位解uが一意的に存在するのと同様に，$P^{(s)T}$の性質$KP^{(s)} = P^{(s)T}K$から，方程式(19)はその右辺ベクトル$P^{(s)T}f$に対して一意的な解$u^{(s)}$をもつこともわかる．したがって，方程式(19)を解くにはCG法が適用できる．

ここで次の事柄を注意しておく．射影行列$P^{(s)}$の定義式(13)からわかるように，$P^{(s)}$あるいは$P^{(s)T}$の掛け算にはK_{ii}^{-1}の処理が含まれており，つまり方程式(18)の求解に相当する処理が一回の行列×ベクトル算に含まれている．方程式(19)はその係数行列に$P^{(s)}$をもつため，CG法で解く際には，各反復ステップごとに方程式(18)を一回解くに相当するコストが掛かることになる．

式(16)で示したとおり，係数行列$KP^{(s)}$はSchur補元Sと等しい．直接法を使った部分構造法の場合は，反復する必要がないので$KP^{(s)}$を計算してSchur補元にしてしまい（K_{ii}^{-1}の計算は行なわず，前回述べたようにLU分解でSをとり出す），自由度をu^sに限定して扱う方が効率的であるが，反復型部分構造法の場合は行列のスパース性を生かして$KP^{(s)}$をKと$P^{(s)}$の掛け算の形のまま扱うことが必要となる．大規模解析などKのスパース性を生かした処理が必要とされる場合はKをそのままの形で使えるようなアルゴリズムが要求される．

方程式系(17)～(19)を解くには，上に述べたように，方程式(18)，(19)を別々に解いて結果を合わせればよい．実装ではこのとおりでよい．一方，この処理は全く同等に，以下に述べるように，方程式(1)を解くための共役射影勾配法(CPG: Conjugate Projected Gradient method [2])の適用と解釈することができる．この観点は，以下の節で述べるSchwarz法の適用とコースグリッドによる高速化との関係を考えるのに役に立つ．共役射影勾配法は，以下簡単に射影CG法と呼ぶことにする．

方程式(1)は射影CG法により次のような手順で解かれる．まず，方程式(18)を部分構造ごとの処理で解き，$u^{(i)}$を求めておく．解の初期候補ベクトルu_0を

$$u_0 = u^{(i)} \tag{20}$$

と設定する．初期残差r_0を$r_{(s)0}$と記す．つまり$r_0 = r_{(s)0}$とする．

後続の反復処理は，射影行列$P^{(s)}$による自由度$u^{(s)}$への射影CG法で，次のとおり行なう．

$$p_0 = P^{(s)} G r_{(s)0} \tag{21}$$

$$u_{n+1} = u_n + \alpha_n p_n, \quad r_{(s)n+1} = r_{(s)n} - \alpha_n K p_n, \quad \alpha \equiv \frac{r_{(s)n}^T G r_{(s)n}}{p_n^T K p_n} \tag{22}$$

$$p_{n+1} = P^{(s)} G r_{(s)n+1} + \beta_n p_n, \quad \beta_n \equiv \frac{r_{(s)n+1}^T G r_{(s)n+1}}{r_{(s)n}^T G r_{(s)n}} \tag{23}$$

Gは全自由度に対して定義される前処理行列，p_nは第nステップの探索方向ベクトルである．$r_{(s)n}$は第nステップの残差ベクトルである．

各ステップの残差$r_{(s)n}$はすべて内部境界上の力場あるいは反力場である．つまり，残差がゼロでないということは，$u^{(s)}$により生ずる内部境界上の反力と内部境界上に働く外力f_sがつり合わないか，あるいは隣り合う部分構造どうし及ぼし合う面力がつり合わないか，どちらかあるいは両方であることを意味する．両方がつり合ったとき，反復過程は収束する．

なお，(21)～(23)に示したアルゴリズムは共役射影勾配法としては特殊なものであり，一般にはK-直交

直和分解に限らず一般の直和分解に対して定義されるものであるが，その説明は本稿の目的に必要ないので省略する．

アルゴリズム(21)～(23)では前処理行列 G を全く一般の形で導入した．次の節から，この前処理行列 G の設定に Schwarz 法を適用することを考える．

3. 反復型部分構造法の前処理

3.1 部分構造方程式

前節では方程式を二つに分けたが，われわれは方程式を更に部分構造ごとに分ける．そして，上に示したと同様の方程式の分離を各部分構造ごとに施す．これによりオーバラップしない Schwarz 法の適用を準備する．

前回説明したように，領域分割は部分構造が有限要素の合併になるように行なわれているので，Ω と同時に Ω^I も有限要素分割されていることになる．Ω 上で定義された有限要素基底関数 φ_i を Ω^I に制限した関数 $\bar{\varphi}^I_i \equiv \varphi_i\big|_{\Omega^I}$ の内，恒等的にゼロでないものが Ω^I の有限要素基底関数になり，そのすべては Ω^I の有限要素基底を成す．

全自由度の変位場 u と同じく Ω^I の有限要素基底で離散化された Ω^I 上の変位場を $\bar{u}^I$ とする．一方，Ω^I とその境界に含まれる節点上に定義される許容変位場(幾何学的境界条件，変位ゼロを満たすもの)を u^I と記す．

u^I は u の成分の一部分である．ところで，$\bar{u}^I$ と u^I は等しくない．なぜなら，Ω^I 上で定義される有限要素基底関数は，その内部境界上では Ω のものと異なってしまうからだ．内部境界上の節点に対応する Ω の有限要素基底関数は Ω^I の内と外にまたがっており，対応する節点の Ω^I の有限要素基底関数はその外にはみ出す部分を切り取ったものである．そのために，$\bar{u}^I$ は u^I と異なり u の一部分ではない．また，Ω^I はオーバラップしないが，u^I は内部境界上の節点の自由度を共有するのでオーバラップ(線形従属)する．

しかし，$\bar{u}^I$ と u^I の有限要素基底関数はその対応する節点を参照することによって自然に一対一の対応をもつから，これに基づいて $\bar{u}^I$ から u^I への一対一の線形写像を定義できる．これを N^I と記す．u^I は u の一部分であるから，N^I はローカルな自由度をグローバルな自由度へ埋め込む役目を果たしている．N^I は有限要素基底に基づいて行列表示できるが，その転置を考えればそれに対応するグローバルな自由度からローカルな自由度へ制限する線形写像が定義される．これを $(N^I)^t$ と記す．マルチグリッド法では，プロロンゲーション(prolongation)，レストリクション(restriction)という言葉が使われるが，これを使うと N^I は $\bar{u}^I$ から u へのプロロンゲーション，$(N^I)^t$ は u から $\bar{u}^I$ へのレストリクションであると表現できる．

ここで，プロロンゲーション，レストリクションについて説明しておく．プロロンゲーションとは部分自由度を全体自由度内に展開して埋め込むこと，レストリクションは逆に全体自由度から部分自由度を制限して抜き出すことである．例えば，マルチグリッド法では，コースグリッドの自由度をファイングリッドの自由度内へ埋め込むことをプロロンゲーション，ファイングリッドの自由度から，コースグリッドの自由度を抜き出すことをレストリクションと呼んでいる．便利なので，以後使うことにする．

部分構造法のプロロンゲーション，レストリクションに話を戻す．グローバルな自由度をローカルな自由度にレストリクションしてから，またグローバルな自由度にプロロンゲーションしてみる．内部境界上の節点の自由度は，レストリクションでそれを共有する複数のローカルな自由度に移され，プロロンゲーションで元の節点に重複して戻ってくる．その節点を共有する部分構造の数だけ重複する．この重複を解消するため，ローカルな自由度において，その内部境界上の節点の自由度に関して適当に重み付けしてプロロンゲーションしたのちに重複が解消されるようにし，部分構造内部の節点に関しては何も変えない写像 D^I を定義して単位の分割と呼ぶ．D^I は対角行列であり，条件

$$1 = \sum_I N^I D^I (N^I)^T \tag{24}$$

を満たす．左辺の 1 は全体自由度における単位行列を表わす．重み付けの仕方は一つとは限らないが，一番簡単なものは，当該節点を共有する部分構造の数で割るというものである．

u の自由度は u^I の自由度を I 全部に渡って集めたものであり，u^I は $\bar{u}^I$ のプロロンゲーションで得られる．ローカルなベクトルをグローバルに集めるとき重複するところを適当に平均化することを考えると，プロロンゲーションする前に D^I で重み付けすることが一つの方法であることがわかる．これを考えあわせるとベクトル u，u^I および $\bar{u}^I$ の関係を次のようにとれることがわかる．

$$u = \sum_I u^I = \sum_I N^I D^I \bar{u}^I \tag{25}$$

全解析領域 Ω 上で定義された平衡方程式を Ω^I に制限したものは，部分構造 I の平衡方程式である．これ

を Ω^I の有限要素分割により離散化した方程式を，グローバルな離散化方程式(1)と同様に次のように表わす．

$$\tilde{K}^I \tilde{u}^I = \tilde{f}^I \tag{26}$$

以下これを部分構造方程式，あるいはローカルな方程式と呼ぶことにする．グローバルな有限要素基底関数とローカルな有限要素基底関数の関係から，各剛性行列，各右辺ベクトルの間に次の関係のあることがわかる．

$$K = \sum_I N^I \tilde{K}^I (N^I)^T \tag{27}$$

$$f = \sum_I N^I \tilde{f}^I \tag{28}$$

これよりローカルな変位ベクトルとグローバルな変位ベクトルは次の関係をもつ．

$$\tilde{u}^I = (N^I)^T u \tag{29}$$

一般に部分構造の境界には十分な境界条件が課されるとは限らないので，ローカルな剛性行列 $\tilde{K}^I$ は正則とは限らず一般に半正定値対称である．解は存在しないかもしれないし，存在したとしてもローカルな方程式の解は一意とは限らない．式(24)から

$$u = N^I D^I \tilde{u}^I \tag{30}$$

とすれば $\tilde{u}^I$ から u に戻る．ローカルな方程式が解をもつならば，グローバルな方程式の解 u と式(29)で表わされる $\tilde{u}^I$ はローカルな方程式の解の一つを与える．

3.2 Schwarz 法の適用

ローカルな方程式(26)の設定の下，Schwarz 法を適用する．前回で述べたSchwarz 法のフレームワークの標準的な手順に則れば，ローカルな方程式(26)をプロロンゲーションして u の一部分 u^I 上の方程式にし，その求解処理をローカルな前処理行列として設定するという段取りになるが，手間を省くためここでは，プロロンゲーションされたローカルな方程式の段階を飛び越えて，直接ローカルな前処理行列を定義することにする．$\tilde{K}^I$ が半正定値対称なのでその一般逆行列 $(\tilde{K}^I)^-$ を一つ選びローカルな前処理行列 $\tilde{G}^I$ とこれをプロロンゲーションしたローカルな前処理行列 G^I を

$$\tilde{G}^I = (\tilde{K}^I)^- \tag{31}$$

$$G^I = N^I D^I \tilde{G}^I D^I (N^I)^T \tag{32}$$

と定義する．加法的 Schwarz 法を適用するとして，グローバルな前処理行列 G を

$$G = \sum_I G^I \tag{33}$$

と定義する．この G により元のグローバルな方程式を次のように書き直す．

$$GKu = Gf \tag{34}$$

方程式(34)に前処理つきCG法を適用するには $G\times$ 残差 r と $K\times$ 探索方向ベクトル p の計算が必要となるが，それぞれ次の式を右から左に辿って処理される．

$$Gr = \sum_I N^I D^I (\tilde{K}^I)^- r^I \leftarrow (\tilde{K}^I)^- r^I \leftarrow r^I = D^I (N^I)^T r. \tag{35}$$

$$Kp = \sum_I N^I \tilde{K}^I p^I \leftarrow \tilde{K}^I p^I \leftarrow p^I = (N^I)^T p. \tag{36}$$

まずグローバルなベクトル r と p をレストリクションでローカルなベクトル r^I，p^I に変換し，部分構造ごとにローカルな前処理 $\tilde{G}^I$，ローカル剛性行列 $\tilde{K}^I$ の掛け算を施し，プロロンゲーションでグローバルなベクトルに戻す．ベクトルと双対ベクトルの若干の取り扱いの違いを注意する．つまり，ベクトルのレストリクションは $(N^I)^T$ で，プロロンゲーションは重み付き $N^I D^I$ で行なわれる一方，双対ベクトルのレストリクションは重み付き $D^I (N^I)^T$ で，プロロンゲーションは N^I で行なわれる．p，$(\tilde{K}^I)^- r^I$ はベクトル，r，$\tilde{K}^I p^I$ は双対ベクトルであるため上記のとおり処理される．

3.3 部分構造における内部自由度と境界自由度の分離

2.1 節で自由度を部分構造内部と内部境界に分解して方程式(1)を2つに分離したことにならって，ローカルな方程式(26)を 2 つに分ける．

$\tilde{u}^I$ を部分構造内部の自由度と内部境界の自由度に分ける．前者の自由度のベクトルを $\tilde{u}^{Ii}$，後者を $\tilde{u}^{Is}$ と記す．u^I も同様に部分構造内部の自由度と内部境界の自由度に分ける．前者の自由度のベクトルを u^{Ii}，後者を u^{Is} と記す．$\tilde{u}^{Is}$ と u^{Is} は等しくないが，$\tilde{u}^{Ii} = u^{Ii}$ である．そこで，以下 $\tilde{u}^{Ii}$ は u^{Ii} と記す．$\tilde{u}^I$ は次のように分解する．

$$\tilde{u}^I = u^{Ii} + \tilde{u}^{Is} \tag{37}$$

この自由度の分解に従って方程式(26)もグローバルな方程式(6)と同様，次の通りブロック分解される．

$$\begin{pmatrix} K^I_{ii} & \tilde{K}^I_{is} \\ \tilde{K}^I_{si} & \tilde{K}^I_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{Ii} \\ \tilde{u}^{Is} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^I_i \\ \tilde{f}^I_s \end{pmatrix} \tag{38}$$

K^I_{ii} は u^{Ii} 上の行列，$\tilde{K}^I_{ss}$ は $\tilde{u}^{Is}$ 上の行列である．$\tilde{K}^I_{si}$ は u^{Ii} から $\tilde{u}^{Is}$ への線形写像を表わす行列，$\tilde{K}^I_{is}$ も同様である．u^{Ii} は部分構造内部の自由度なので，剛性行列 K が構

造物平衡方程式の離散化である限り K^I_{ii} は正則行列である.

レストリクション $(N^I)^T$, プロロンゲーション N^I および単位の分割 D^I も次のようにブロック分解される.

$$N^I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & N^I_s\end{pmatrix},\quad (N^I)^T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (N^I_s)^T\end{pmatrix},\quad D^I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & D^I_s\end{pmatrix} \tag{39}$$

ブロック内の1は u^{Ii} の自由度上の単位行列を表わす. N^I_s は $\tilde{u}^{Is}$ から u^{Is} へ変換する正方行列である. D^I_s は $\tilde{u}^{Is}$ の自由度上の行列で, $\tilde{u}^{Is}$ から u^{Is} への重み付けプロロンゲーションをする際の重み値が並んだ対角行列である.

グローバルな剛性行列 K とローカルな剛性行列 $\tilde{K}^I$ の関係式(27)から K のブロック成分と K^I のブロック成分の関係式が次のように得られる.

$$\begin{pmatrix}K_{ii} & K_{is}\\ K_{si} & K_{ss}\end{pmatrix}=\sum_I\begin{pmatrix}K_{ii} & \tilde{K}^I_{is}(N^I_s)^T\\ N^I_s\tilde{K}^I_{si} & N^I_s\tilde{K}^I_{ss}(N^I_s)^T\end{pmatrix} \tag{40}$$

この式では u^I の自由度から u の自由度の一部分への包含写像は省略して書いた. 例えば, 適当に行列成分の順序を入れ替えれば, $\sum_I K^I_{ii}$ は K^I_{ii} を対角ブロックに並べたグローバルな行列(行列の直和 $\bigoplus_I K^I_{ii}$)を表わす. また, $\sum_I N^I_s\tilde{K}^I_{ss}(N^I_s)^T$ は内部境界自由度でのみ重複する和になる.

式(13)で射影行列 $P^{(i)}$, $P^{(s)}$ を定義したと同様に, ローカルな射影行列 $\tilde{P}^{I(i)}$, $\tilde{P}^{I(s)}$ を次のとおり定義する.

$$\tilde{P}^{I(i)}\equiv\begin{pmatrix}1 & (K^I_{ii})^{-1}\tilde{K}^I_{is}\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \tilde{P}^{I(s)}\equiv\begin{pmatrix}0 & -(K^I_{ii})^{-1}\tilde{K}^I_{is}\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{41}$$

$\tilde{P}^{I(i)}$ と $\tilde{P}^{I(s)}$ は, $P^{(i)}$, $P^{(s)}$ と同様の条件を満たす. したがって, グローバルな方程式についてその分解(17)~(19)を導いたと同様な考察の末, ローカルな方程式(26)も $\tilde{u}^{Ii}$ の自由度と $\tilde{u}^{Is}$ の自由度に関する方程式に次のように分解される.

$$\tilde{u}^I=\tilde{u}^{I(i)}+\tilde{u}^{I(s)} \tag{42}$$

$$K^I_{ii}\tilde{u}^{I(i)}=f^I_i \tag{43}$$

$$\tilde{u}^{I(s)}=\tilde{P}^{I(s)}\tilde{u}^{Is}\quad,\quad \tilde{K}^I\tilde{P}^{I(s)}\tilde{u}^{Is}=\tilde{P}^{I(s)T}\tilde{f}^I \tag{44}$$

グローバルな内部自由度のベクトル $u^{(i)}$ はローカルな内部自由度のベクトル $\tilde{u}^{I(i)}$ の和

$$u^{(i)}=\sum_I\tilde{u}^{I(i)} \tag{45}$$

で一意的に表わされ, グローバルな方程式(18)はローカルな方程式(43)を部分構造すべてに渡って集めたものにほかならない. 実際, グローバルな方程式(18)を解くことはすなわち部分構造ごとに独立に方程式(43)を解くこと帰する. したがって実質的なローカル方程式は(44)である.

方程式(43)の解が一意的に定まる一方, $\tilde{K}^I$ の $\tilde{u}^{I(s)}$ への作用が正則と限らないため, 方程式(44)の解は一般に存在しないか, 存在しても一意的に定まらない. これは, 内部境界には拘束条件は課されていないので, 部分構造の境界が, ほとんどあるいは全部が内部境界で占められている場合など, 部分構造境界に十分な幾何学的境界条件が課されていないまま, 部分構造の変位を計算しようとすることに起因する. 構造解析の場合, 幾何学的境界条件が十分でないと剛体変位が定まらない. このように剛体変位の定まらないことを浮遊運動, 定まらない部分構造を浮遊部分構造(floating substructure[2])などと呼ぶ. これが, 変位解が存在した場合一意的に定まらない理由であるが, また一方で, 変位解が存在しない場合もある. この状況は次のように理解される. 十分な幾何学的境界条件が課されていないということは, 幾何学的な境界条件が課されるべき場所に, 何らかの力学的境界条件が課されていることを意味する. 不定の剛体変位のどれをとったとしても, その荷重がそこに発生する反力と釣り合わないとき, 変位解は存在できない. この荷重は本来慣性力になるものであり, これに応答する解は動的問題の変位加速度解しかない. しかし, 今扱っている方程式(1)は平衡方程式(静的問題)であり, 加速する変位解には対応できない.

3.4 Neumann 前処理

部分構造方程式(44)の問題は, Neumann境界条件を取扱う問題である. ローカルな前処理行列 $\tilde{G}^I$ を式(31)で設定するに際して, $\tilde{u}^{I(i)}$ すなわち u^{Ii} の自由度については $(\tilde{K}^I_{ii})^{-1}$ で問題ない. $\tilde{u}^{I(s)}$ の自由度に関して $\tilde{K}^I$ が正則でない場合は, 式(31)の定義にしたがい $\tilde{K}^I$ の一般逆行列 $(\tilde{K}^I)^-$ を使って方程式(44)の解あるいは近似解を定める. グローバルな方程式(19)の場合と同様, $\tilde{K}^I\tilde{P}^{I(s)}$ は $\tilde{K}^I$ の Schur 補元 $\tilde{S}^I$

$$\tilde{S}^I\equiv\tilde{K}^I_{ss}-\tilde{K}^I_{si}(\tilde{K}^I_{ii})^{-1}\tilde{K}^I_{is} \tag{46}$$

になる. $\tilde{S}^I$ はローカルでありグローバルな Schur 補元と比べて自由度が桁違いに小さいことが期待できるが,

$\tilde{S}^I$ には $\left(\tilde{K}^I_{ll}\right)^{-1}$ が含まれているため，ローカルにもグローバルな計算と同様 $\tilde{K}^I\tilde{P}^{I(s)}$ の掛け算のまま扱うことが薦められる[2,6]．

また，$\tilde{K}^I$ と $\tilde{S}^I$ の関係と同様に，$\left(\tilde{K}^I\right)^-$ を扱うことは $\left(\tilde{S}^I\right)^-$ を扱うことに対応する．一般逆行列の基本事項については，8)などを参照してほしい．また，本稿最後に，若干の補足説明をした．

より処理を簡素化する方法として，式(31)で厳密な一般逆行列を扱うことはやめて，例えば小さい量 ε をかけた単位行列を $\tilde{K}^I$ に加えるなどして $\tilde{K}^I$ を正則化してしまい，その逆をLU分解で処理するという方法がある．

$$\tilde{K}^I \quad \rightarrow \quad \tilde{K}^I + \varepsilon 1 \tag{47}$$

これは各節点に変位量に比例して引き戻そうとする物理的には存在しない仮想の微小な保存力を想定することに相当する．これによって部分構造の浮遊運動が防げられる．この近似逆行列も正確な一般逆行列と一緒に以下まとめて $\left(\tilde{K}^I\right)^-$ と記す．

全自由度のベクトル u の分割(25)を次のように変更する．

$$u = u^{(i)} + \sum_I P^{(s)} u^I \tag{48}$$

このベクトルの分割に基づいて，Schwarz 法を適用する．プロロンゲーションしたローカルな前処理行列 $G^{(i)}$，G^I を次で定義する．

$$G^{(i)} \equiv P^{(i)} K_{ii}^{-1} P^{(i)T}, \quad G^I \equiv P^{(s)} N^I D^I \tilde{G}^I D^I \left(N^I\right)^T P^{(s)T} \tag{49}$$

$$\tilde{G}^I \equiv \tilde{P}^{I(i)} \left(\tilde{K}^I\right)^- \tilde{P}^{I(i)T} + \tilde{P}^{I(s)} \left(\tilde{K}^I\right)^- \tilde{P}^{I(s)T} \tag{50}$$

$P^{(s)} N^I D^I \tilde{P}^{I(i)} = 0$ の関係に注意すると，式(50)右辺の第一項の効果は消える．グローバルな前処理行列の定義式(33)に，上の $G^{(i)}$，G^I を代入して次を得る．

$$G = P^{(i)} K_{ii}^{-1} P^{(i)T} + P^{(s)} G_{NN} P^{(s)T} \tag{51}$$

$$G_{NN} \equiv \sum_I N^I D^I \tilde{P}^{I(s)} \left(\tilde{K}^I\right)^- \tilde{P}^{I(s)T} D^I \left(N^I\right)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sum_I N_s^I D_s^I \left(\tilde{S}^I\right)^- D_s^I \left(N_s^I\right)^T \end{pmatrix} \tag{52}$$

この G_{NN} を Neumann 前処理行列と呼ぶ[3]．また，前処理として G_{NN} を用いた射影CG法(21)～(23)は，もとの方程式(1)に式(51)の前処理 G 付きCG法を施したものと等価である．

以上，反復型部分構造法を基盤に，オーバラップしないSchwarz法にしたがい，$\tilde{S}^I$ の一般逆行列 $\left(\tilde{S}^I\right)^-$ を使って構成する前処理について述べてきた．この前処理はNeumann前処理と呼ばれる[3]．この前処理は，部分構造の数が多いとき効率が悪いことが知られている．3次元線形構造問題においてNeumann前処理付の剛性行列Schur補元の条件数 cond $(G_{NN} S)$ の上限が次のように評価されている[5]．

$$\mathrm{cond}\left(G_{NN} S\right) \leq \frac{C}{H^2}\left(1 + \log\left(\frac{H}{h}\right)\right)^2 \tag{53}$$

ここで H は部分構造の直径(差渡しの最大値)の代表値，h は有限要素の直径の代表値，C は H，h に依存しない定数である．同じ条件の下で部分構造の数だけ増やせば H だけが減り，その逆自乗のオーダで条件数の上限が上昇することがわかる．このようにNeumann前処理は，部分構造の数が少ない場合にしか効果が期待できない．

4. コースグリッドによる高速化 — BDDアルゴリズム

部分構造の数が増えるにつれてNeumann前処理の効率が悪くなる原因を，部分構造ごとの剛性行列の一般逆行列の適用で，不適当な浮遊運動を生じさせるところにあると考えた*Mandel*は，部分構造の浮遊運動の自由度を，反復処理で扱う自由度から取り除いて別に扱い，Neumann 前処理の効率を向上させた[6,7]．これを*Mandel*はバランシング領域分割法(Balancing Domain Decomposition method)と名づけた．以下，慣例に倣ってBDD法と呼ぶ．

部分構造はローカルのままだからこそ浮遊運動を許してしまう．第3.3節の最後で述べたとおり，幾何学的境界条件が不足している場合は，荷重に加速度運動(加速度ゼロ，つまり等速運動も含む)の原因となる慣性力が現われるが，これを一般逆行列により力学的根拠の欠けたまま計算の都合だけである静的な剛体変位に対応させるため，無意味な浮遊運動が生じてしまう．そこでBDD法では，部分構造ごとの浮遊運動を集めてグローバルに扱うことで，それを部分構造ごとにとる剛体変位として決定し，残りの自由度の反復処理で浮遊運動の問題が生じないようにする．連続体の変形は剛体変位とその他のひずみを生じる変形に分けられることを思い出すと，これは次のようにまとめられる．部分構造ごとにその変形を剛体変位とひずみを生じる変形に分離し，両者を別々にグローバルに解くことで浮遊運動の問題を解消する．*Mandel*は文献6, 7)で，反力残差ベクトル(双対ベクトル)から剛体運動(加速度運

動)の原因となる自由度を取り除くことをバランシング(balancing)と呼んでいる．バランシングを施された反力残差ベクトルは，剛体変位の成分をもたない変位誤差ベクトルに対応する．

またこの方法は，マルチグリッド法の観点からみると，有限要素メッシュを基本グリッドとし，部分構造への領域分割をコースグリッドとする2層マルチグリッド法と解釈できる．つまり，まず部分構造のグリッドで粗く解いた後，有限要素グリッドで細かく仕上げる．部分構造ごとの剛体変位を考えることが，一つの部分構造をコースグリッドの一つと考えることに相当する．

なお，本来BDD法は，一般の偏微分方程式から離散化された大規模線形方程式の解法に関するアルゴリズムであり，バランシングも部分構造上に制限された離散化線形方程式の係数行列の核空間の一般的な取り扱いに関する事柄である．しかし，ここでは微小変形の線形構造問題への応用に特定して，部分構造の剛体変位として説明する．

上に述べたBDD法のアイデアを実現させるため，各部分構造の境界の剛体変位を重ね合わせた自由度 u^W を定義し，さらにそこから射影行列 $P^{(s)}$ で，自由度 $u^{W(s)}$ とその基底 $\left\{e_{I_J}^{W(s)}\right\}_{I,0\le J<m^I}$ を定義する．詳細は6)，7)を参照してほしい．

グローバルなベクトル u は式(14)のとおり $u^{(i)}$ と $u^{(s)}$ に分解された．さらに，$u^{(s)}$ を $u^{(W)}$ と $u^{(sa)}$ に分解する．

$$u^{(s)}=u^{W(s)}+u^{(sa)} \tag{54}$$

これに伴い射影行列 $P^{(s)}$ も $P^{W(s)}$，$P^{(sa)}$ に分解する．

$$P^{(s)}=P^{W(s)}+P^{(sa)} \tag{55}$$

ただし，この分解された射影行列は $P^{(i)}$ や $P^{(s)}$ のようにあらわに表示することはできず，まもなく下の式(61)，(62)で説明するように，$P^{(sa)}$ の作用を計算する手順だけが示しうる．とにかく，この分解により方程式(19)は次のとおり分解される．

$$u^{(s)}=u^{W(s)}+u^{(sa)} \tag{56}$$

$$Ku^{W(s)}=P^{W(s)T}f \tag{57}$$

$$u^{(sa)}=P^{(sa)}u^{s}\quad .\quad KP^{(sa)}u^{s}=P^{(sa)T}f \tag{58}$$

方程式(57)で定式化される問題はコースグリッド問題と呼ばれる．コースグリッド問題は自由度が比較的小さいため通常は直接法で解き，方程式(58)は射影CG法で解く．

コースグリッド問題(57)はベクトル $u^{W(s)}$ の自由度の基底 $\left\{e_{I_J}^{W(s)}\right\}_{I,0\le J<m^I}$ により，より具体的な次の形にして解く．

$$u^{W(s)}=e_{I_J}^{W(s)}\mu^{I_J}\quad:\quad K_{I_JJ_K}^{W}\mu^{J_K}=f_{I_J} \tag{59}$$

ここで，μ^{I_J} はベクトルの展開係数である．係数行列，右辺ベクトルは次のように定義される．

$$K_{I_JJ_K}^{W}\equiv e_{I_J}^{W(s)T}Ke_{J_K}^{W(s)},\quad f_{I_J}\equiv e_{I_J}^{W(s)T}f \tag{60}$$

$K_{I_JJ_K}^{W}$ はBDD法のコースグリッド行列と呼ばれる．

方程式(58)では射影行列 $P^{(sa)}$ による行列×ベクトル計算が必要になる．上で予告したとおり，これは関係式(55)を利用して，コースグリッド問題に還元して計算する．

$$x\rightarrow x^{(s)}=P^{(s)}x\rightarrow P^{(sa)}x=x^{(s)}-P^{W(s)}x^{(s)} \tag{61}$$

$$P^{W(s)}x^{(s)}=y^{W(s)},\quad y^{W(s)}\in W^{(s)}\quad\cdot\quad Ky^{W(s)}=e_{I_J}^{W(s)T}Kx^{(s)} \tag{62}$$

射影CG法の適用は(20)～(23)に替わって次のようになる．

$$u_0=u^{(i)}+u^{W(s)} \tag{63}$$

$$p_0=P^{(sa)}Gr_{(sa)0} \tag{64}$$

$$u_{n+1}=u_n+\alpha_n p_n,\quad r_{(sa)n+1}=r_{(sa)n}-\alpha_n Kp_n,\quad \alpha_n\equiv\frac{r_{(sa)n}^{T}Gr_{(sa)n}}{p_n^{T}Kp_n} \tag{65}$$

$$p_{n+1}=P^{(sa)}Gr_{(sa)n+1}+\beta_n p_n,\quad \beta_n\equiv\frac{r_{(sa)n+1}^{T}Gr_{(sa)n+1}}{r_{(sa)n}^{T}Gr_{(sa)n}} \tag{66}$$

Schwarz法の観点から見ると，BDD法は，Neumann前処理におけるグローバル前処理行列に関する式(51)を次に取り替えたものに相当する．

$$G=P^{(i)}K^{-1}P^{(i)T}+P^{W(s)}K^{-1}P^{W(s)T}+P^{(sa)}G_{NN}P^{(sa)T} \tag{67}$$

射影CG法(63)～(66)はもとの方程式(1)に前処理 G 付きCG法を施したものと等価である．この前処理は，全自由度ベクトル u を3つの部分に

$$u=u^{(i)}+u^{W(s)}+u^{(sa)} \tag{68}$$

と分解し，$u^{(i)}$ と $u^{W(s)}$ の成分については前処理で厳密に解いてしまい，$u^{(sa)}$ の成分のみ，Neumann前処理つ

き反復法で解くことを表わしている．この反復では，部分構造ごとの浮遊運動の自由度は $u^{W(s)}$ で取り除かれているため浮遊運動の問題は起こらない．その代わり，ベクトル $u^{(s)}$ の $u^{W(s)}$，$u^{(sa)}$ への分解処理の分だけ計算コストが増加している．

Neumann 前処理の条件数評価(53)と同様に，*Le Tallec* らによって3次元線形構造問題におけるBDD法前処理付剛性行列の条件数上限が次のように評価されている[5]．

$$\mathrm{cond}\,(GK) \le C'\left(1+\log\left(\frac{H}{h}\right)\right)^2 \qquad (69)$$

ここで H は(53)と同様，部分構造の直径(差渡しの最大値)の代表値，h は有限要素の直径の代表値，C' は H, h に依存しない定数である．Neumann 前処理のときにあった H の逆自乗因子が消えている．もはや部分構造の数は条件数に影響せず，部分構造に対する有限要素メッシュの相対的な細かさのみが影響することがわかる．

5. 今回のまとめと次回の予定

今回は，領域分割法のうち，オーバラップしない Schwarz 法の代表である反復型部分構造法と，その高速化アルゴリズム Neumann 前処理法，BDD 法を細部にわたって紹介した．

次回は，同じオーバラップしない Schwarz 法に分類され，その高速化を目的とするものであるが，標準の部分構造法とは異なり部分構造間を Lagrange 未定定数法により処理する FETI アルゴリズムを紹介する予定である．

補注．一般逆行列

$\left(\tilde{K}^I\right)^-$ を扱うことは $\left(\tilde{S}^I\right)^-$ を扱うことに対応する．一般逆行列の条件式

$$\tilde{K}^I\left(\tilde{K}^I\right)^-\tilde{K}^I = \tilde{K}^I,\quad \tilde{S}^I\left(\tilde{S}^I\right)^-\tilde{S}^I = \tilde{S}^I \qquad (70)$$

から，$\left(\tilde{K}^I\right)^-$ と $\left(\tilde{S}^I\right)^-$ は，$\tilde{K}^I$ と $\tilde{S}^I$ と同様次の関係をもつ．

$$\tilde{P}^{I(s)}\left(\tilde{K}^I\right)^-\tilde{P}^{I(s)T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \left(\tilde{S}^I\right)^- \end{pmatrix} \qquad (71)$$

これは $\left(\tilde{K}^I\right)^-$ から式(71)にしたがって $\tilde{S}^I$ の一般逆行列の一つ $\left(\tilde{S}^I\right)^-$ が得られるという意味である．

$\tilde{K}^I$ の一般逆行列として，Moore-Penrose 一般逆行列を使うと，方程式(44)の解が存在しない場合は残差ノルムが最小になる近似解を，解が複数存在するときはノルム最小の解を選び出す．Moore-Penrose 一般逆行列はこの意味で最も良い一般逆行列であるが，与えられた行列 $\tilde{K}^I$ からその Moore-Penrose 一般逆行列を計算することは簡単ではない．

非正則線形写像 $\tilde{K}^I$ にガウスの消去法を適用して，ピボット選択による行の入れ替えおよび非正則性に由来するピボット選択不可能時(0 - ピボット以下の列成分がすべてゼロ)の列の最右移動(当該列の右側諸列は左へ一列ずつ繰り上げ．列を並べ替えるときは対応する行も同時に並べ替える)により，行，列を適当に並び替えることによって，$\tilde{K}^I$ の正則な部分をすべて含むブロック部分を右上に集めると，$\tilde{K}^I$ は次のようにブロック表示できる[4]．

$$\tilde{K}^I = \begin{pmatrix} \tilde{K}^I_{pp} & \tilde{K}^I_{pr} \\ \tilde{K}^I_{rp} & \tilde{K}^I_{rr} \end{pmatrix} \qquad (72)$$

ここで，$\tilde{K}^I_{pp}$ は $\tilde{K}^I$ と同じランクをもつ正則行列である．これは，次のように LDL^T - ブロック分解される．

$$\tilde{K}^I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tilde{K}^I_{rp}\left(\tilde{K}^I_{pp}\right)^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{K}^I_{PP} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \left(\tilde{K}^I_{pp}\right)^{-1}\tilde{K}^I_{pr} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (73)$$

そこで，Moore-Penrose 一般逆行列 $\left(\tilde{K}^I\right)^-_{\mathrm{MP}}$ は次のように与えられる．

$$\begin{aligned} &\left(\tilde{K}^I\right)^-_{\mathrm{MP}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \left(\tilde{K}^I_{pp}\right)^{-1}\tilde{K}^I_{pr} \\ -\tilde{K}^I_{rp}\left(\tilde{K}^I_{pp}\right)^{-1} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \left(\tilde{K}^I_{pp}\right)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & -\left(\tilde{K}^I_{pp}\right)^{-1}\tilde{K}^I_{pr} \\ \tilde{K}^I_{rp}\left(\tilde{K}^I_{pp}\right)^{-1} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \end{aligned} \qquad (74)$$

一方，反射型一般逆行列の一つ $\left(\tilde{K}^I\right)^-$ も次で定義できる．

$$\left(\tilde{K}^I\right)^- \equiv \begin{pmatrix} 1 & -\left(\tilde{K}^I_{pp}\right)^{-1}\tilde{K}^I_{pr} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\tilde{K}^I_{pp}\right)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\tilde{K}^I_{rp}\left(\tilde{K}^I_{pp}\right)^{-1} & 1 \end{pmatrix} \qquad (75)$$

ガウスの消去法におけるピボット選択に類する処理で，式(72)のブロック分解さえできれば，あと $\left(\tilde{K}^I_{pp}\right)^{-1}$ の計算を追加すれば反射型一般逆行列は計算できるが，Moore-Penrose 一般逆行列はさらに部分領域全体自由度サイズの逆行列を計算しなければならない．

参 考 文 献

1) Barry F Smith, Petter E. Bjφrstad, William D Gropp Domain decomposition parallel multilevel methods for elliptic partial differential equations, Cambridge University Press (1996)

2) C. Farhat, F.-X. Roux. Implicit Parallel Processing in Structural Mechanics, Computational Mechanics Advances, 2, 1/124

(1994)

3) P Le Tallec Domain Decomposition Methods in Computational Mechanics, Computational Mechanics Advances, 1, 121/220 (1994)

4) C Farhat and F X Roux A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm, Internat J Numer Methods Engrg, 32, 1205/1227 (1991)

5) P Le Tallec, M Vidrascu Solving Large Scale Structural Problems on Parallel Computers using Domain Decomposition Techniques, Parallel Solution Methods in Computational Mechanics edited by M. Papadrakakis, John Wiley & Sons (1997)

6) J Mandel Balancing Domain Decomposition, Communications on Numerical Methods in Engineering, 9, 233/341 (1993)

7) J Mandel, M Brezina Balancing Domain Decomposition Theory and Performance in Two and Three Dimensions, MGNet, http //casper cs yale edu/mgnet/www/mgnet-papers html

8) 登坂宣好, 大西和栄, 山本昌宏 逆問題の数理と解法 偏微分方程式の逆解析、東京大学出版会 (1999)