小特集

ボクセル解析における境界条件の付与方法

長 嶋 利 夫*

ABSTRACT The modeling method using the volume data, which is produced by converting CAD data and CT data directly, has been utilized in various engineering analyses The analysis method based on the finite element method (FEM) in conjunction with "voxel" modeling can be performed to solve structural problems In such a voxel method however, the free surface having complex geometry does not always coincide with the surface of the voxel mesh in general Therefore an appropriate method to impose boundary conditions, which include both essential and natural boundary conditions is required to solve practical problems using the voxel method In this paper the procedure to enforce boundary conditions for the voxel method is described for the stress analysis based on FEM using structured hexahedral finite elements Moreover the numerical results by the structural FEM program, which can utilize the volume data structure of the volume CAD (V-CAD) developed in RIKEN and use the boundary condition treatment procedure stated in this paper, are also demonstrated

1. はじめに

ここ数年，計算機性能の著しい向上を背景として，設計用CADソフトウェアで定義される複雑形状や，CT画像・デジタイザー画像などを処理して得られる形状を対象に,「ボクセル」と呼ばれる等しい立方体形状を有する多数の六面体要素を利用した構造解析が実施されるようになってきている[1)]．ボクセルデータは比較的容易にかつ確実に作成することができるので，これを利用すれば自動要素分割が困難であるような複雑形状の有限要素解析(FEM解析)が実施可能となるもちろん，このような手法は，通常のFEM解析モデルと比較して扱うデータ量が膨大になってしまうという欠点もあるが，その反面，自動要素分割手法が適用困難であるような複雑形状に対するモデル作成を自動化できる点が最大の魅力である．

従来FEMが利用されてきた構造解析分野では，ボクセルを用いた解析においても基本的にはFEMに基づいた方法が用いられ，通常六面体立方体(直方体)要素が利用されている．このようなボクセル解析においては，一般に滑らかな自由表面形状は六面体の表面が凹凸として表れる形状として表現されてしまう．その欠点を補うためにボクセルサイズを小さくしたり，自由表面近傍のボクセルをさらにサイズの小さいサブボクセルで表現する方法も用いられるが，このままでは任意形状の領域をモデル化できるという有限要素法の特徴を生かしきれていない．一方，理化学研究所が行っている「ものつくり情報技術統合化研究」において開発されているVCAD(ボリュームCAD)[2)]では，ボクセルと形状表面とのセル切断面，セル切断点情報をボリュームデータとして保持することが可能である．すなわち，**図1**に示すように，VCADにおけるボリュームデータでは，ボクセル情報に加えて，形状データとボクセルとの切断点情報と，それらを連結して得られる切断面情報を保持している．VCADでは，このよう

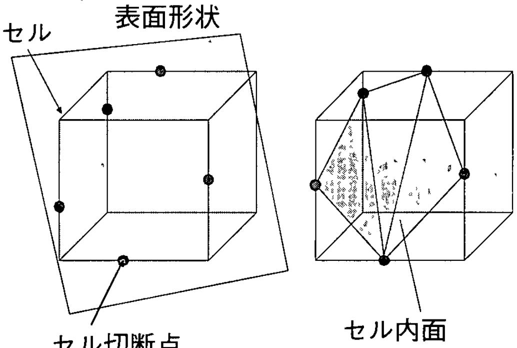

図1 V-CADにおけるボリュームデータ

Boundary Condition Enforcement in FEM using Voxel By *Toshio Nagashima* (Faculty of Science and Technology, Sophia University)

*上智大学理工学部機械工学科

なボリュームデータを「*Kitta Cube*」と呼んでいる．このような *Kitta Cube* を用いることにより，形状表面をかなり滑らかな形状として表現することができる．VCADの開発は現在進行中であるが，VCADのバージョン2以降では，ボクセルデータはオクツリー(Octree: 八分木)構造で階層的に定義されるので，さらに高精度なモデル化が可能となる．

現在，このようなVCADが扱うことができるボリュームデータ(*Kitta Cube*)を利用した，FEMに基づく構造解析手法の開発が行なわれている．著者らは，有限要素内を通過する表面形状を考慮した剛性評価を行なっている．この手法は，拡張有限要素法(the eXtended Finite Element Method: X-FEM)[3]の一種としても解釈することができる．このような手法においては，境界条件を与えるべき表面上になからずしも有限要素の節点があるという保証はない．なお，実は同じような問題がエレメントフリーがラーキン法(EFGM)[4]に代表させるようなメッシュフリー法においても現われる．メッシュフリー法の実用化においては，境界条件とくに基本境界条件の合理的な付与方法[5]について考えなければならない．本稿では，有限要素の形状と表面形状が完全に一致しないボクセル解析手法おいて境界条件を与える方法[6~8]についての解説を試みる．また，本稿で示したような境界条件の付与方法を用いているVCADシステムが扱うデータを利用した構造解析プログラムV-STRUCTバージョン1による数値解析例[8]を示す．

2. 解析手法

本稿で紹介するボリュームデータを利用した解析手法の一例として，微小変形線形静弾性問題を対象とした基礎方程式およびボリュームデータによる離散化式を示す．

2.1 基礎方程式

FEMに基づく手法であるので，通常のFEMの定式化と同様に次式に示すような領域Ω内の連続体についての，仮想仕事の原理が基本原理となる．

$$\iiint_{\Omega} \nabla_s \delta \mathbf{u} \quad \sigma d\Omega = \iiint_{\Omega} \delta \mathbf{u} \bullet \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \iint_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u} \bullet \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \tag{1}$$

ここにσは応力テンソル，$\bar{\mathbf{b}}$は物体力ベクトル，$\mathbf{u}$は変位ベクトル，$\mathbf{t}$は表面力ベクトル，$\delta\mathbf{u}$は仮想変位，であり，上線は境界上で値が規定されていることを示す．$\nabla_s \delta\mathbf{u}$は$\nabla\delta\mathbf{u}$の対称部分である．また，$\Gamma_t$，$\Gamma_u$は，それぞれ力学的境界および基本境界(幾何学的境界)を示す．

境界条件式は，次式で与えられる．

$$\boldsymbol{\sigma} \bullet \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad on \quad \Gamma_t \tag{2.1}$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad on \quad \Gamma_u \tag{2.2}$$

ここにnはΓ_tに垂直な法線ベクトルである．

2.2 離散化式

仮想仕事の原理式(1)を離散化するために，直方体形状を有する8節点六面体一次要素を用いることにする．ここでは，X-FEM(拡張有限要素法)の定式化[9]に準じて，内挿関数を次式のように与える．

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{8} N_I(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I \tag{3}$$

ここに，Vは領域の内部で1，外部で0の値をとるようなステップ関数である．また，内挿関数N_Iは8節点直方体線形要素の内挿関数である．ボクセル解析を前提とした場合，直方体形状なのでアイソパラメトリック要素の定式化は不要である．ただし，要素内を形状表面が通過する場合に対しても，剛性評価する必要があるため，数値積分による剛性評価が要求される．

式(3)で局所的に与えられる変位の近似関数を用いて，解析領域内部の変位場は次式のように表わされる．

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) \mathbf{U} \tag{4}$$

ここに，$\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$は内挿マトリクス，$\mathbf{U}$は節点変位ベクトルである．

対称ひずみテンソルや対称応力テンソルをベクトルの形に並べ替えたVoigt表記[10]によるひずみベクトル，応力ベクトルは次式のように表される．

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{U} \tag{5.1}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{U} \tag{5.2}$$

ここに，$\mathbf{B}(\mathbf{x})$はひずみ変位マトリクス，$\mathbf{D}(\mathbf{x})$は弾性マトリクスである．

式(4)(5.1)(5.2)を仮想仕事の原理式(1)に代入して次式を得る．

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \bar{\mathbf{F}} \tag{6}$$

ここに

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}(\mathbf{x})^T \mathbf{D}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x}) \tag{7.1}$$

$$\bar{\mathbf{F}} = \int_{\Gamma_t} \mathbf{\Phi}(\mathbf{x})^T \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x})\, d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} \mathbf{\Phi}(\mathbf{x})^T \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{x})\, d\Omega(\mathbf{x}) \tag{7.2}$$

式(7.1)に示す$\mathbf{K}$は全体剛性マトリクス，式(7 2)に示す$\bar{\mathbf{F}}$は，等価節点力ベクトルである．式(7.1)(7 2)は，ボリュームデータを用いて離散化される．このように離散化式自体は従来のFEMと全く同じである．ボクセルによるモデル化の手順は，式(3)で定義される内挿関数で要素毎に考慮される

3. 境界条件の処理方法

ここでは，前節で示した，基礎式およびその離散化式に基づいて解析を行なう場合において境界条件の処理方法を示す．

3.1 力学的境界条件の処理

式(2.1)で示される力学的境界条件は，仮想仕事の原理式(1)の右辺に自然に取り込まれている．したがって，その離散化は式(7 2)の第1項で考慮される．その項は面積積分となるので，形状定義面あるいはそれを近似する表面の情報を利用して数値積分が実行される．VCADを利用した著者らの処理では，セル切断面情報を利用して面積積分が実施される．

3.2 基本(幾何学的)境界条件の処理

式(2.2)で表される変位境界条件は，仮想仕事の原理式に取り込まれない．したがって，離散化された式(6)を解く際には，基本境界条件を付帯条件(あるいは拘束条件)として与えて解く必要がある．通常のFEM解析では，節点はかならず境界上にあるので，変位境界条件の記述は，基本的には，単一の節点自由度毎に簡単に記述することができる．これに対して，本稿で示すようなボクセル解析手法では，節点は，かならずしも境界上にあるとは限らない．そこで基本境界上に適切な評価点を設定し，その点での基本境界条件を記述し，その式を満足させることから拘束条件式を導出する．評価点での変位の値は，一般にその点近傍の複数個の節点自由度に関連しているので，拘束条件式は一般に複数の節点の自由度を用いて表される．評価点の設定方法としては様々な方法が考えられるが，著者らの開発プログラム(VSTRUCTバージョン1)での処理では，セル切断点で拘束条件式を満足させている．

図1に示すよう境界を近似する形状とセルとの交点(セル切断点)において，拘束条件式を記述できる．複数個(m個)の切断点についての拘束条件式をまとめると次式のようになる．

$$\mathbf{C}\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{d} \tag{8}$$

ここに，

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_1) \\ \vdots \\ \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_m) \end{bmatrix} \tag{9.1}$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{x}_1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}_m) \end{bmatrix} \tag{9.2}$$

$\tilde{\mathbf{U}}$は$\mathbf{U}$のうち，基本境界条件に関与する節点変位の自由度を並べたものである．

拘束条件数をm，関与する節点自由度数をnとすると，式(9 1)で定義される$\mathbf{C}$はm行n列のマトリクスとなるが，式(8)で表わされるm個の拘束条件式は，すべて独立であるとは限らない．マトリクス$\mathbf{C}$の階数(ランク)rが独立な拘束条件の個数になる．式(8)において係数マトリクス$\mathbf{C}$をピボット選択しながら，基本変形を施すことによって次式を得る．

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & c_{1,1} & c_{1,n-r} \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & c_{r,1} & c_{r,n-r} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}}' = \mathbf{d}' \tag{10}$$

ここに，$\tilde{\mathbf{U}}$，$\mathbf{d}'$は$\mathbf{U}$，$\mathbf{d}$の成分を入れ替えたベクトルである．

式(10)の左辺の係数マトリクスはr行n列のとなる．$\tilde{\mathbf{U}}'$の最初のr個の自由度は，残りのn-r個の自由度で表すことができる．すなわちr個の自由度を従属自由度とすることができる．したがって，式(10)は次式のように書くことができる．

$$[\mathbf{I} \quad \mathbf{C}'] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_D \\ \mathbf{u}_I \end{Bmatrix} = \mathbf{d}' \tag{11}$$

ここに$\mathbf{I}$は単位マトリクス，$\mathbf{u}_D$，$\mathbf{u}_I$は$\tilde{\mathbf{U}}'$の部分集合として得られる節点変位ベクトルである．
式(11)より次式を得る．

$$\mathbf{u}_D = -\mathbf{C}'\mathbf{u}_I + \mathbf{d}' \tag{12}$$

式(12)を，式(6)で示される離散化されたシステム方程式を解く際の付帯条件として与える．具体的には，従属自由度$\mathbf{u}_D$を消去したうえで式(6)を解く．このような方法は通常のFEM解析でも扱われる多点拘束(Multi Point Constraint: MPC)条件式に他ならない．

4. 数値解析例

本稿で示した境界条件付与方法を用いて三次元CADで設計した三次元薄肉形状の部品(3枚羽根ファン)の

静応力解析を実施した．本解析では，等方性弾性材料(ヤング率E = 21,000kgf/mm², ポアソン比ν = 0 3)を想定し，三次元CADで定義された形状情報をIGESデータを経由してVCADに取り込み，VCADを用いて125 × 125 × 125の構造状のボリュームデータを作成した解析対象を表と裏から見たボリュームデータを構成するセル内面(*Kitta Cube* 面)を**図2**に示す．このようなボリュームデータに対して，VSTRUCTバージョン1を用いてFEM解析を実行した．拘束条件として，**図3**に示すように裏面のモーター取付部近傍を完全拘束し，羽根表面に一様圧力分布荷重を与えた．拘束条件はセル切断面の中央で付与し，荷重条件はセル切断面の中央で評価し解析結果として得られる表面のミーゼス応力分布を**図4**に示す．詳細は省略するが，FEMによる同様の解析と比較して，ほぼ整合の取れた妥当な結果が得られている．

5. おわりに

本稿では，ボリュームデータを用いた解析手法において，一般に有限要素と表面形状とが一致しない場合における，境界条件の処理方法について解説した．本稿は，構造応力解析を対象として説明したが，伝熱問題などの他の問題においても同様な方法が可能である．著者らは，この他にも，変分原理として修正仮想仕事の原理[11, 12]を用いた定式化や，ラグランジュ未定乗数法やペナルティ関数を用いた方法についても検討を行っている[13]．現状ではここで示した手法が最も直接的で，非線形問題への拡張性，ペナルティ数などの設定パラメータが不要となるという利点があると考えている．しかしながら，拘束条件の設定方法によっては，拘束条件を処理するための計算量が大きくなり，計算時間も無視できない場合もある．拘束条件評価位置の設定法および実用問題解析における計算の効率化については今後の課題である．

参 考 文 献

1) S J Hollister, N Kikuchi Homogenization theory and digital Imaging, a basis for studying the mechanics and design principles of bone tissue, Biotechnology and Bioengineering, 43-7, 586/596 (1994)

2) K Kase, S Usami, H Ohmori, C Teodosiu, A Makinouchi

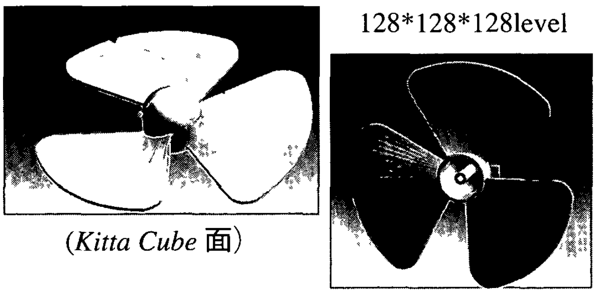

図2 解析例題の形状(*Kitta Cube* でのセル内面)

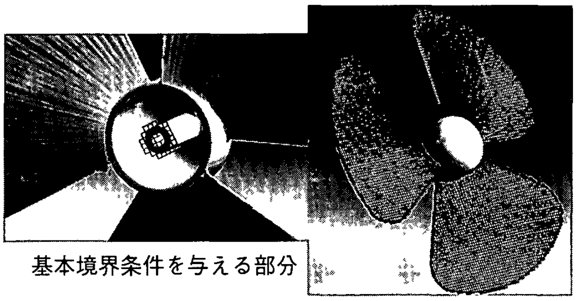

図3 *Kitta Cube* 面への境界条件の付与

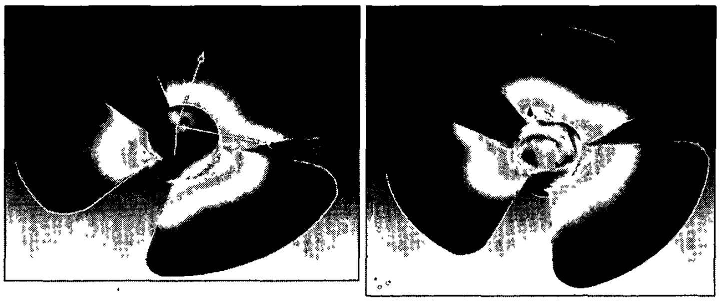

図4 計算結果（ミゼス応力分布）

Volume CAD, Volume Graphics (2003)
3) N Moes, J Dolbow, T Belytschko A finite element method for crack growth without remeshing, Int j numer methods eng , 46, 131/150 (1999)
4) T Belytschko, Y Y Lu, L Gu Element-free Galerkin methods, Int j numer methods eng , 37, 229/256 (1994)
5) C C Wu, M E Plesha Essential boundary condition enforcement in meshless methods, boundary flux collocation method, Int j numer methods eng , 53, 499/514 (2002)
6) T Nagashima Boundary Condition Enforcement in Voxel-type FEM, 2nd International Conference on Structural Stability and Dynamics (ICSSD-2002), Singapore (2002-12)
7) 長嶋 ホクセル型メッシュデータを用いた応力解析手法の開発，理研シンポジウムものつくり情報技術統合化研究(第3回)講演予稿集 144/152 (2003-9)
8) T Nagashima, K Niiyama, Y Ishihara Boundary condition enforcement in stress analysis using structured mesh, 7th U S National Congree on Computational Mechanics (USACM), Albuquerque (2003-7)
9) N Sukumar, D L Chopp, N Moes, T Belytschko Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite element method, Comput Methods Appl Mech Engrg , 190, 6183/6200 (2001)
10) T Belytschko, W K Liu, B Moran Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures, Willey (2000)
11) 西岡，矢川，小倉，安藤 拡張した仮想仕事の原理による応力拡大係数の有限要素解析，機論 A, 42-362, 3086/3093 (1976)
12) 長嶋，山田 修正変分原理に基づくホクセル有限要素解析，第52回理論応用力学講演会講演論文集，295/296 (2003-1)
13) 長嶋，新山，石原 構造的なメッシュを用いた応力解析における基本境界条件付与方法の検討，機論A, 70-691, 354/362 (2004)