講 座

メッシュフリー／粒子法
第1回　メッシュフリー／粒子法の概要とガラーキン法に基づくメッシュフリー法

野 口 裕 久*

ABSTRACT　This series of articles summarize the current progress of meshfree/particle method In this issue, a brief overview of meshfree/particle method is described and then meshfree methods based on the Galerkin method are introduced The theoretical formulation is given and the several numerical examples are illustrated

1. はじめに：メッシュフリー／粒子法の概要

メッシュフリー法／粒子法は，現在計算力学分野においてもっとも注目されている数値計算手法であり，例えば2004年9月北京で開催された第6回WCCM(World Congress on Computational Mechanics，世界計算力学会議)では，約80もの関連論文が集まり，会期の間2部屋並行開催という盛況ぶりであった．さて，メッシュフリー法の「フリー」は「無」という意味で，つまりメッシュフリー法とはメッシュ(要素)を要しない解析手法の一つであり，メッシュを要する「有限要素法」を意識して作られた造語である．**図1**に有限要素法とメッシュフリー法のモデル図を示す．またグリッドレス法も同様に，グリッド(格子)を要しない解析手法のことを指し，これは格子を用いる「有限差分法」に対して用いられることが多い．現在，これら有限要素法や有限差分法は，構造／固体，熱流体解析シミュレーションにおいて，最も実用的に用いられている数値解析手法であり，またシミュレーションに不可欠なコンピュータの高性能化，高容量化に伴い，より大規模かつ複雑な自然現象や人工物のふるまいが解析可能である．しかしながら一方で，解析のための入力データも複雑化し，例えば有限要素法では，解析そのものよりも入力データ作成，特にメッシュ生成に時間を要しているのが現状である．また，構造／固体解析においては，大変形と同時に有限要素メッシュが解析不能なくらいに歪む場合や，メッシュの存在のために構造／固体に生じたき裂のモデル化が限定される場合があり，メッシュによる解の健全性の議論が従来より続けられている．このような背景の下で，いわゆる「メッシュ」を必要としない解析手法に関する研究が1990年代半ばより，精力的に行われるようになった．無論これに類する研究はそれ以前からも行われていたが，この頃より，それまで有限要素法を開発してきた研究者が，こぞってメッシュフリー法の研究開発を開始し，今日に至るまで種々の新手法の提案，改良がなされてきた[1,2]．この講座では，この10年間に提案されたメッシュフリー／粒子法について体系的に整理したい．

さて，固体／構造解析あるいは熱流体解析等，自然現象や人工物の振る舞いは，多くの場合，2階偏微分方程式により記述することができる．ここで簡単に次のような1次元2階偏微分方程式を考える．未知数をu，位置座標をx，時間をtとすれば，

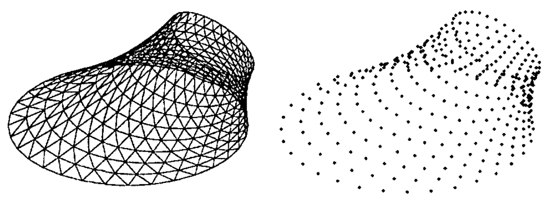

図1　有限要素法とメッシュフリー法

Meshfree/Particle Methods — Series 1 Introduction of Meshfree/Particle Methods and Meshfree Methods based on Galerkin Method By *Hirohisa Noguchi* (Dept of System Design Engineering, Keio University)
*慶應義塾大学理工学部システムデザイン工学科

$$\varphi\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, x, t\right)=0 \tag{1}$$

と書け，式(1)を適切な境界条件や初期条件の下で数値的に解くことで，シミュレーションを行うことができる．式(1)は強形式と呼ばれ，有限差分法はこの形式に対する解法である．一方，式(1)に任意の重み関数$\delta\theta$を乗じて解析領域内vで積分した，

$$\int_v \delta\theta(x)\ \varphi\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, x, t\right) dv=0 \tag{2}$$

は弱形式と呼ばれるが，有限要素法はこの形式に対する解法になる．有限差分法，有限要素法いずれの方法においても，領域内の任意の点における空間方向の微分を何らかの方法で，着目点の周囲の情報から近似することに変りはない．有限差分法では，着目点の周囲の格子点から差分近似により空間方向の微分を求め，有限要素法では，着目点が含まれる要素の各節点値および補間関数(の微分)から求められる．メッシュフリー法でもこの点については同様であり，要素や格子を利用することなく節点の情報だけで空間方向微分を表すことができれば，後は強形式であれ，弱形式であれ，それらを代入することで従来の解析手法と何ら変ることなく解析することができる．これまで数多く提案されているメッシュフリー法は，例外なく，空間方向の近似式の違い，強形式，弱形式の違いにより分類することができる．また粒子法は，偏微分方程式を強形式で解くメッシュフリー法の一つであり，常にある粒子(物質点)に着目するラングランジュ型解法であるため，流体をオイラー型で解析する際に扱いが困難な対流項を考慮する必要がないという長所を有している。粒子法自体は，1990年半ばから始まったメッシュフリー法の研究とは独立して，従来から開発されているため，ここではメッシュフリー法と区別して取り扱う．

本講座の構成は次のとおりとする．まず第1回目は，構造解析に対するメッシュフリー法の分類を簡単に行った上で，ガラーキン法に基づき弱形式で方程式を解くメッシュフリー法について解説する．次いで，最近の傾向としてメッシュフリー法の考え方に基づく新たな有限要素法の開発が行われているが，第2回は拡張／仮想有限要素法と呼ばれる解析手法について解説する．第3回，4回は先に述べた粒子法に着目し，1970年代から天体の解析に使用され近年は圧縮性流体から構造の解析まで幅広く適用されているSPHについて第3回で解説する．第4回は，MPSと呼ばれる元来非圧縮性流体の解析のために開発された粒子法について，その基礎から流体構造連成解析等への応用について解説する．

2. メッシュフリーの原理と分類

ここでは固体／構造解析について考える．一般に有限要素法では領域内の任意の点の変位は，その点が含まれる要素の節点変位から補間して求められる．一方メッシュフリー法では，このような要素が存在しないため，例えば**図2**に示すように「その点を中心とするある半径内の円(3次元の場合は球)の内部の節点から(重み付き)最小自乗法により近似」して求められる．これは移動最小自乗法[3)]と呼ばれる多くのメッシュフリー法が採用している近似手法である．

すなわちメッシュフリー法では，要素の代わりに評価点の近傍領域を定義し，その内部にある節点変位から変位の近似関数が作成される．このときこの近似関数は，評価点の変位を$\mathbf{u}$，その近傍(円の内部)の節点値$\mathbf{u}_I$とすれば，形状関数N_Iを用いて，有限要素法と同様に，

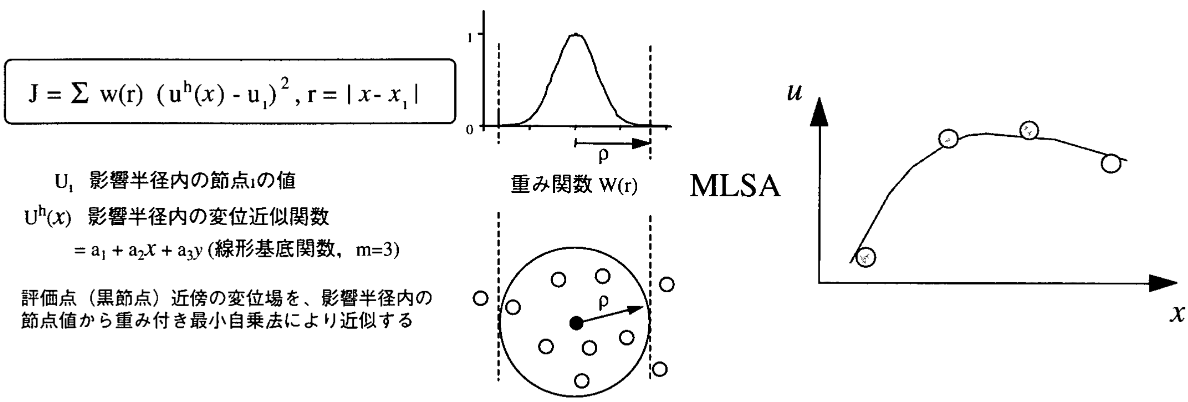

図2 移動最小自乗法による変位の近似

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{N} \phi_I(\mathbf{x})\,\mathbf{u}_I \tag{3}$$

と表すことができる．こうして変位の近似関数が定まれば，後は強形式であれ弱形式であれ，基礎となる偏微分方程式に代入すれば離散化は完成する．これらを整理すると，現在まで多くのメッシュフリー法が提案されているが，その基本的な考え方は，1)変位の近似関数の作成方法，2)偏微分方程式の解法で分類することができる[4]．1)の変位の近似手法に関しては，代表的なものとしてa)移動最小自乗法[3](Moving Least Squares Approximation)，b)Reproducing Kernel Function[5]，c)Shepard Function[6]，d)Hp Cloud[7]，e)Finite Cover Function[8]，f)Point Interpolation[9]，g)Radial Basis Function[10]等があげられる．2)の偏微分方程式の解法としては，I)Collocation Method[6,11~13](強形式)，II)Global Galerkin Method[3,5,7,8,14](弱形式)，III)Local Galerkin Method[9,10,15,16](弱形式)に分類される．I)に属する手法は差分法の性質が強くなり，II)に属する程有限要素法の性質が強くなる．III)は，II)での積分が領域全体にわたるのに対し，評価点の近傍(影響半径内)だけで局所的に積分を行うものであり，差分法と有限要素法の中間的な性質を有する．**表1**に，これまで提案された手法について示す．ここで，(　)内は変位の近似手法を表わしている．

3. ガラーキン法に基づくメッシュフリー法[17]

この章では具体的に，ガラーキン法に基づくメッシュフリー法について具体的にその定式化を示す．ここではエレメントフリーガラーキン(Element Free Galerkin)法[3]をベースに解説するが，基本的には式(1)の形状関数を用いる手順が異なるだけであり，その他のメッシュフリー法については文献1)，4)に詳しい．

表1　メッシュフリー法の分類

Type	Method
Collocation Method	Finite Point Method (MLS), N-Gridless Method (MLS), Fixed Kernel Method (RKF)
Galerkin Method	Diffused Element Method (LS), Element Free Galerkin Method (MLS), Reproducing Kernel Particle Method (RKF), HP-Cloud Method (PU), Finite Cover Method (PU), PIM (PI), RPIM (RBF)
Local Galerkin Method	Meshless Local Petrov Galerkin Method (MLS), Method of Finite Sphere (PU), LPIM (PIM)

3.1　移動最小自乗法

移動最小自乗法では，図2に示したように，領域内の任意の評価点における変位は，その点を中心とする円の内側にある節点群の変位から一種の最小自乗近似法により求められる．この時円の半径を影響半径(radius of domain of influence)と呼び，この円で囲まれる領域を影響領域(domain of influence)と呼ぶ．特に，評価点と影響領域内の節点との距離により影響度を表す重み関数を導入する最小自乗法を移動最小自乗法(moving least squares interpolation)と呼ぶ．移動最小自乗法による場の近似の特徴としては，(1)有限要素法で用いられる内挿近似が節点を介してその微分値が不連続であるのに対して，移動最小自乗法による近似はどの区間も連続であり近似精度が高い，という長所がある反面，(2)近似曲線は節点(サンプリング点)を必ずしも通らない，というデメリットも有している．

ここで具体的に式(1)の形状関数を求める．図2右上のように，黒点で表される評価点の値を移動最小自乗法により近似する．影響半径をρと置き，白丸は影響領域内の節点を表している．なお評価点は必ずしも節点と一致している必要はない．さて，評価点の位置ベクトルを$\mathbf{x}$，変位の近似関数を$u^h(\mathbf{x})$，節点Iの位置ベクトル(Nは影響領域内の節点の数)，変位を$\mathbf{x}_I$，u_I評価点と節点の距離をr_I，重み関数を$w(r_I)$とすれば，$\mathbf{u}^h(\mathbf{x})$は次の重み付き自乗和を最小にするように決定される．なお，$w(r_I)=1$の時は式(1)は通常の最小自乗法に一致する．

$$J = \sum_{I=1}^{N} w(r_I)(u^h(\mathbf{x}_I) - u_I)^2,\ r_I = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_I| \tag{4}$$

重み関数については，$w(\rho)=w'(\rho)=w''(\rho)=0$，$w(0)=1$，$w'(0)=0$を満たすように決定することで，2階微分まで連続な近似関数が得られる．重み関数についても種々提案されているが，代表的なものとして4次の多項式関数[1]を示す．

$$\begin{aligned} w(r) &= 1 - 6(r/\rho)^2 + 8(r/\rho)^3 - 3(r/\rho)^4 \quad (0 \le r \le \rho) \\ &= 0 \quad (\rho \le r) \end{aligned} \tag{5}$$

また，変位の近似関数$u^h(\mathbf{x})$は例えば2次元問題で線形基底を用いる場合は

$$u^h(\mathbf{x}) = a_1 x + a_2 y + a_3 \tag{6}$$

で与えられる．式(4)が最小となるように式(6)における係数a_iが決定される．この時，得られた関数はあく

までも評価点$\mathbf{x}$においてのみ有効であり，その近傍の点については，その点を中心とする影響領域を定義して関数を評価し直すことに注意する．これを繰り返すことで，線形の基底関数でも滑らかな近似曲線を得ることができる．なお影響半径が大きいほうが，局所的な影響が無視されより通常の最小自乗法に近くなり，平滑化された近似曲線が得られる．従って，移動最小自乗法を用いて近似関数を求める場合，ある程度の局所性と滑らかさの両方を得るためには，線形基底に対しては$\rho = 1.5c$ - $2.5c$（cは最小節点間距離）程度が適当であると考えられる．

移動最小自乗法による関数の近似は，式(4)の重み付き自乗和を最小にするように，近似関数$u^h(\mathbf{x})$が求められる．ここで$u^h(\mathbf{x})$を多項式で表すものとし，その係数を並べてベクトルにしたものを$\mathbf{a}$，また$\mathbf{p}$を式(7)のように定義すれば，$u^h(\mathbf{x})$は，例えば2次元問題の場合，mを多項式における項数として，式(8)のように書くことができる．

$$\begin{aligned}\mathbf{p}^T &= \{1, x, y\},\ m=3\\ &= \{1, x, y, x^2, xy, y^2\},\ m=6\\ &= \{1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3\},\ m=9\end{aligned} \tag{7}$$

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T\mathbf{p}(\mathbf{x}) \tag{8}$$

式(8)を式(4)に代入すれば，Jの停留条件より次式を得る．

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}^T} \equiv \sum_{I=1}^{N} w(r_I)\, 2\mathbf{p}(\mathbf{x}_I)(\mathbf{a}^T(\mathbf{x})\,\mathbf{p}(\mathbf{x}_I) - u_I) = 0 \tag{9}$$

これより

$$\left[\sum_{I=1}^{N} w(r_I)\,\mathbf{p}(\mathbf{x}_I)\,\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I)\right]\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{N} w(r_I)\,\mathbf{p}(\mathbf{x}_I)\,u_I \tag{10}$$

となる．ここで便宜上マトリクス$\mathbf{A}$及びベクトル$\mathbf{B}$を以下のように定義する．

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \left[\sum_{I=1}^{N} w(r_I)\,\mathbf{p}(\mathbf{x}_I)\,\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I)\right] \tag{11}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x})^T = \{w(r_1)\,\mathbf{p}(\mathbf{x}_1), w(r_2)\,\mathbf{p}(\mathbf{x}_2), \quad , w(r_N)\,\mathbf{p}(\mathbf{x}_N)\} \tag{12}$$

式(11)，(12)を式(10)に代入すれば

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\,\mathbf{B}(\mathbf{x})\,\mathbf{u} \tag{13}$$

$$\mathbf{u}^T = \{u_1, u_2, \quad , u_N\} \tag{14}$$

を得る．これにより，近似関数の係数ベクトルを決定することができる．更に式(13)を式(8)に代入すれば，$u^h(\mathbf{x})$は

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{N} \phi_I(\mathbf{x})\,u_I \tag{15}$$

$$\phi_I(\mathbf{x}) = \sum_{J=1}^{m} p_J(\mathbf{x})\,(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\,\mathbf{B}(\mathbf{x}))_{JI} \tag{16}$$

のように求められる．ここでϕ_Iが有限要素法での形状関数に相当する．ここで，形状関数の観点から，有限要素法との違いは，(1)移動最小自乗法より得られる形状関数は，有限要素法のように陽な形で表現することはできず，評価点毎に違った形で求められる，(2)移動最小自乗法では，領域内に含まれる評価点の数だけ$\mathbf{A}^{-1}$を計算しなければならない．(3)$\mathbf{A}^{-1}$は領域内の節点の数が適切でないと評価できない場合がある．すなわち領域内の総節点数Nは，基底関数（あるいは係数ベクトル）の個数m以上でなければならない．N=mの場合は，節点位置における近似関数の値と節点値が一致するように係数が決定される．

3.2 剛性方程式の導出

ここでは，線形弾性体におけるメッシュフリー法の剛性方程式の導出について述べる．ガラーキン法に基づくメッシュフリー法は，次に示すエネルギー原理から導かれる．

線形弾性体においては，次のトータルポテンシャルエネルギーが最小になるように構造の平衡状態が決定される．

$$\pi(\mathbf{u}) \equiv \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \mathbf{u}\quad \mathbf{b}\right) d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}\quad \bar{\mathbf{t}}\, d\Gamma \tag{17}$$

ここで，$\boldsymbol{\varepsilon}$はひずみテンソル，$\boldsymbol{\sigma}$は応力テンソル，$\mathbf{b}$は体積力ベクトル，$\bar{\mathbf{t}}$は表面力ベクトル，Ωは解析領域，Γは表面力が作用する境界を表している．式(17)を停留条件は

$$\begin{aligned}\delta\pi(\mathbf{u}) &\equiv \int_\Omega (\delta\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \delta\mathbf{u}\quad \mathbf{b})\, d\Omega\\ &- \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}\quad \bar{\mathbf{t}}\, d\Gamma = 0\end{aligned} \tag{18}$$

よって

$$\int_\Omega \delta\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\, d\Omega = \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}\quad \bar{\mathbf{t}}\, d\Gamma + \int_\Omega \delta\mathbf{u}\quad \mathbf{b}\, d\Omega \tag{19}$$

を得る．これが有限要素法の基礎式となる仮想仕事の原理である．更に式(19)を部分積分すれば

$$\int_\Omega \delta\mathbf{u}\quad (div\,\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \mathbf{b})\, d\Omega = \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}\quad (\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{n} - \bar{\mathbf{t}})\, d\Gamma \tag{20}$$

となる．ここで$\mathbf{n}$は境界表面に対する法線ベクトルである．よって，変分の任意性より左辺より平衡方程式，右辺より境界における平衡方程式が導かれる．また式(20)は，平衡方程式に自分自身($\delta\mathbf{u}$)を重みとして乗じたガラーキン法による重み付き残差式と見なすこともできる．これらを$\mathbf{u}$に対して離散化を行うことでメッシュフリー法の基礎式が導かれる．慣用的にひずみ変位マトリクスとして$\mathbf{B}$，応力ひずみマトリクスとして$\mathbf{D}$を用い，表面力および体積力を離散化して得られる外力をまとめて$\mathbf{f}$とすれば，

$$\delta\mathbf{u}^T\int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}d\Omega\mathbf{u} = \delta\mathbf{u}^T\mathbf{f} \tag{21}$$

変分の任意性より

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \tag{22}$$

$$\mathbf{K} = \int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}d\Omega \tag{23}$$

となる．ここまでは，有限要素法と何ら手順は変らないが，移動最小自乗法に基づくメッシュフリー法の場合次の点が有限要素法と異なる．

(1) 有限要素法の場合，要素内の変位は要素を形成する節点の値から内挿され，節点位置での値は節点値に一致するのに対して，移動最小自乗法を用いたメッシュフリー法の場合は，ある点の影響領域に含まれる節点の値からを用いて近似される．この時，節点位置における近似関数の値は必ずしも，節点値に一致しない．

(2) 領域積分は，有限要素法では分割された要素単位で行われ，要素内の積分は要素形状から定められる積分点を用いて行われる．一方メッシュフリー法の場合は，要素というものが存在しないため，積分点は，一般的には解析領域とは別に定義した積分のためのセルを利用して行われる．

3.3 境界条件処理

先に述べたように2階偏微分方程式で表される境界値問題は，一般にNeumann型境界条件及びDirichlet型境界条件の2種類の条件を与えることにより解かれる．特に構造問題では前者は荷重条件に相当し，仮想仕事式では外力のする仮想仕事として(式(19)右辺参照)考慮される．一方後者はessential境界条件とも呼ばれ，構造解析では変位の拘束条件(固定あるいは強制変位)に相当する．またDirichlet型境界においては変位が拘束されておりその変分はゼロになるため仮想仕事式には含まれない．したがって有限要素法では，離散化後の方程式に対して境界条件の処理を行うが，移動最小自乗法を用いたメッシュフリー法では，移動最小自乗法に基づく近似のため，離散化された節点値を拘束するだけでは，節点位置における近似関数の値を拘束することはできない．そのため離散化する以前のエネルギー原理の時点でその拘束条件を導入する必要がある．メッシュフリー法における拘束条件処理についても，Lagrangeの未定乗数法を初めとして種々提案されているが[1]，ここでは，もっとも簡易で，広く用いられているペナルティ法について紹介する．

式(17)で表されるトータルポテンシャルエネルギーに変位拘束条件を付加すると，式(24)のように表すことができる．

$$\begin{aligned}\pi(\mathbf{u}) &= \int_\Omega\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\quad\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \mathbf{u}\quad\mathbf{b}\right)d\Omega \\ &\quad -\int_{\Gamma_t}\mathbf{u}\quad\bar{\mathbf{t}}\,d\Gamma + \int_{\Gamma_u}\frac{\alpha}{2}\quad(\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}})^2 d\Gamma\end{aligned} \tag{24}$$

ここで，αは正の極めて大きいペナルティ数である．式(24)の変分をとると次式を得る．

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \delta\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}):\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\,d\Omega + \int_{\Gamma_t}\alpha\delta\mathbf{u}\quad\mathbf{u}d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_t}\delta\mathbf{u}\quad\bar{\mathbf{t}}\,d\Gamma + \int_\Omega\delta\mathbf{u}\quad\mathbf{b}d\Omega + \int_{\Gamma_t}\alpha\delta\mathbf{u}\quad\bar{\mathbf{u}}d\Gamma\end{aligned} \tag{25}$$

最終的には次の離散化平衡方程式が求められる．

$$(\mathbf{K}+\mathbf{K}')\,\mathbf{u} = \mathbf{f}+\mathbf{f}' \tag{26}$$

ここで，I，Jは節点番号とし

$$\mathbf{K}'_{IJ} = \int_{\Gamma_u}\mathbf{S}_I\,\phi_I\,\phi_J\,\mathbf{S}_J\,d\Gamma \tag{27}$$

$$\mathbf{f}'_I = \int_{\Gamma_u}\alpha\quad\mathbf{S}_I\,\phi_I\,\bar{\mathbf{u}}d\Gamma \tag{28}$$

$$\mathbf{S}_I = \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix}_I \tag{29}$$

であり，S_x，S_yはそれぞれ節点Iがx，y方向に拘束されていれば1，そうでなければ0の値をとる．

3.4 領域積分

ガラーキン法に基づくメッシュフリー法では最終的には全体領域積分を実施しなければならない．有限要素法では，この領域積分は要素単位で行なわれて合算される．各要素においては，デカルト座標系における任意の形状を自然座標系上の正方形(2次元の場合)にマッピングして数値積分を実施する．その結果，有限要素法は任意の形状の領域に対して，非常にシステマチックに領域積分を行うことができる．

一方メッシュフリー法では，要素そのものが存在し

ないために，領域全体を有限要素法のようにシステマチックに積分することはできない．*Belytschko*らは，そのため解析対象の領域と積分ための領域を区別し，**図3**に示すようなバックグラウンドセルと呼ばれる積分のためのセルを提案した[3]．この時バックグラウンドセルの形は必ずしも，解析対象の形状に一致していなくてもよい．これは，簡単に言えば，2次元問題の場合，細かい方眼紙の上に解析モデルを書き，方眼の数を数えることで面積を求めることに相当する．実際の積分においては，それぞれのセルでガウス積分を行うことになる．境界近傍を精度良く求めるには，セルを細かくするか，あるいは一つのセルに対して積分点を多くすることで対応できる．この場合，積分点が領域に含まれているが否かで数値積分における重み値をゼロにすればよい．有限要素法の場合，用いる要素の近似関数と積分点の数には緊密な関係があるが，文献[1]では，2次元問題の場合次のようなセルの数と積分点の数を推奨している．

$$n_Q = \sqrt{m} + 2,\ m_c = \sqrt{n_N} \tag{30}$$

ここで，mは一つのセル内の節点の数，n_Qはセル内のガウス積分点の一方向あたりの個数(1セル内$n_Q \times n_Q$積分点)，n_Nは総節点数，m_cは一方向あたりのセル数(モデル全体で$m_c \times m_c$のセル)である．ただし移動最小自乗法で得られる形状関数は，もはや単純な多項式関数ではなく，複雑な有理関数(rational function)となるので，式(30)はあくまでも目安である．

数値積分の際には，積分点を中心として影響半径ρの円を描き，影響領域となる円の内側にある節点に対し移動最小自乗法に基づく形状関数を求める．この時影響領域が境界を越えた場合，境界の外には節点は配置されないので影響領域としては考慮されない．その後の手順は，境界条件処理を除き，有限要素法と同様に剛性マトリクスを作成できる．そして例えばpenalty法により境界条件処理を行う．

その他，バックグラウンドセルを用いずに，節点位置で積分を行う方法も種々提案されているので，文献を参照されたい[18~21]．

4. メッシュフリー法の長所と短所

前節でも述べた手法も含めたメッシュフリー法全体に共通な特長について述べる[22]．解析者にとってメッシュ作成の労力が軽減されることは重要なことであるが，一方で結果として同節点数で有限要素法よりも精度が悪ければ，実用に供されることはない．その点では，表1に示す各メッシュフリー法(が用いる変位の近似関数)は，有限要素法と同等以上の解の収束性(節点を増加につれ解が正解に収束)を有しており，その精度については保証されている．その他有限要素法と比較した場合の長所，短所と考えられる点を**表2**に示す．利点の一つとして，変位だけではなく，ひずみが空間で連続(有限要素法は要素間では不連続)，高精度となるが，これは移動最小自乗法による．また図3の概念図にも示すように，クラックを節点位置に関係なく配置することができ，影響領域が不連続面を超えぬように調整することで，容易に不連続面のモデル化が可能となる．また，不規則な節点配置(有限要素法では要素のゆがみ)に対して解の精度がさほど損なわれないことも知られている．この時，適切な誤差指標の下，節点密度を増やすだけで容易に解の精度を向上させられる．

一方で，有限要素法と比べてデメリットの一つは，領域積分である．有限要素法では全体領域積分を要素単位で行えるため任意形状に容易に対応できるが，メッシュフリー法では，要素のような積分の単位が存在しないために，積分のためのバックグラウンドセルが必要となる[1, 17]．これを避けるためにローカルな

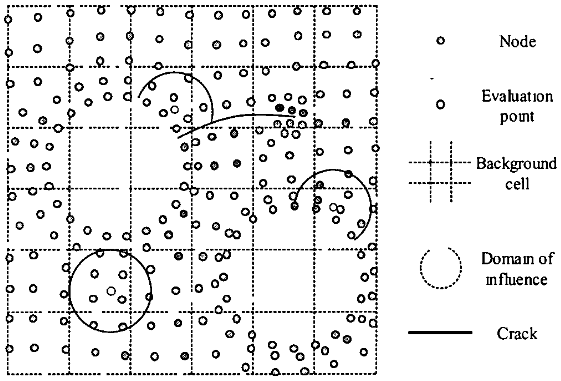

図3　Global Galerkin 型メッシュフリー法の概念図

表2　メッシュフリー法の長所と短所

長所	・変位及びその空間微分（ひずみ）も連続 ・き裂、衝撃波等の不連続場の扱いが容易 ・大変形、ゆがみに対して解の精度を保持 ・h-アダプティブ法の適用が容易 ・寸法効果の導入が容易 ・メッシュ分割が不要
短所	・領域積分のための積分セルが必要 ・複雑な境界近傍での特別な積分処理 ・Dirichlet 型境界条件の扱いが特殊 ・計算時間が多大

Galerkin法も提案されているが，いずれにしても，複雑な境界での汎用的な処理技術が不可欠である．その他，最小自乗法に基づくため，関数の値と節点値が必ずしも一致せず，特別な境界条件処理が必要となる[1,17]．また，解析時間の観点からは，近傍節点の探索，積分点毎の形状関数の作成，領域積分等に関する計算量が増え，有限要素法の約5～10倍の計算時間を要する．

5. メッシュフリー法による解析例

5.1 回転円板の応力解析[17]

最初に移動最小自乗法の効果を表す示す例題として，遠心力を受ける円板の応力解析結果を示す．移動最小自乗法の基底には線形のものを用いている．一次要素を用いた有限要素法の解析結果も併せて示す．線形基底を用いた場合，影響半径がc(最短節点距離)程度では有限要素解に近くなるが，影響半径を適切にとることにより，半径方向応力が連続的に精度の良い解が得られていることがわかる(**図4**参照)．

5.2 機械部品のメッシュフリー法解析[18,19]

次に，CADからCAE(解析)までの一連の流れを，NBNM(Node By Node Method)と呼ばれる節点処理型メッシュフリー法のシステムを用いて，シームレスに解析した例について紹介する．このシステムではCADのファイルから自動的に節点配置を行い，メッシュフリー解析後に誤差解析を行い，その結果に基づきアダプティブに節点を必要箇所に再発生させる．この手順は解析誤差が一定値以下になるまでくり返され，解析精度が高められる．またこの手法では積分にいわゆるバックグラウンドセルは用いられず，節点においてのみ領域積分が行われているため，計算効率に優れている．**図5**に機械部品の固有値解析の結果及びアダプティブ法に基づく節点の再節点配置図を示す．

5.3 空間シェル構造の解析[23]

メッシュフリー法によるシェル解析の例を示す．ここでは，shear lockingおよびmembrane lockingをさけるために，完全4次あるいは双3次の基底を用いて解析を行っている．**図6**左は集中荷重を受ける薄肉球の解析である．先の解析同様，曲げ応力状態と膜応力状態が共存する典型的なシェルのベンチマーク問題とされている．また本問題では，シェルの定式化が剛体変

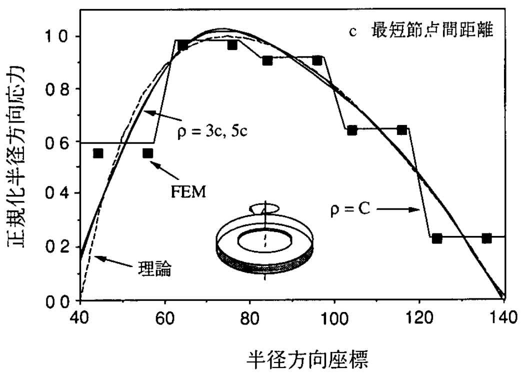

図4 メッシュフリー法による回転円板の解析

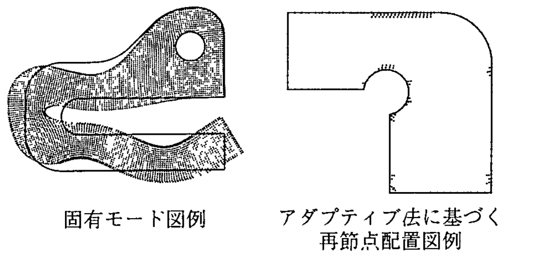

図5 機械部品のノードバイノード・メッシュフリー解析

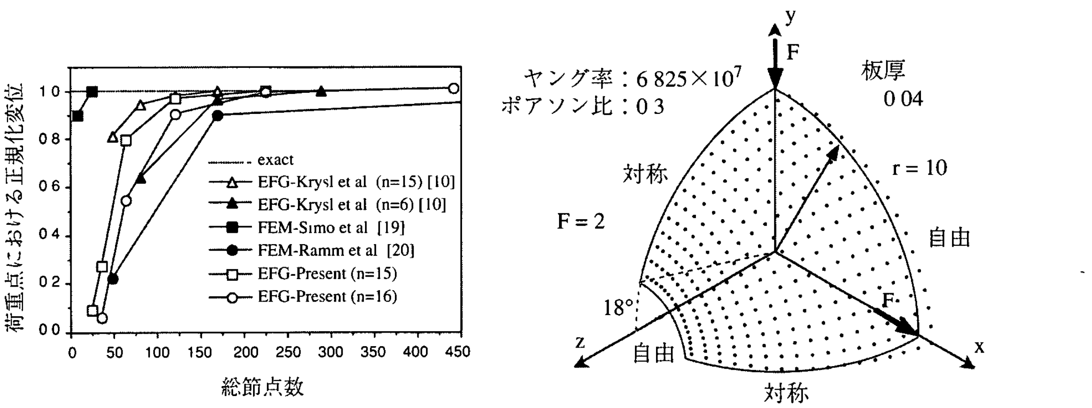

図6 空間シェル構造の解析

位を許容していない場合は妥当な解を得ることはできない．図6右に変形後の節点配置と解析解の収束状況を示す．有限要素法による解やKirchhoff板理論に基づく*Belytschko*らのEFGM解と比較しても，十分によい収束解が得られていることがわかる．

5.4 有限被覆法によるき裂進展解析

最後に移動最小自乗法法を使用しないタイプのメッシュフリー解析について解説する．有限被覆法(FCM. Finite Cover Method)[8]は，鈴木らによって提案されたセミ・メッシュフリー法であり，ボクセル型の有限要素法にマニフォールド法の考え方を導入したものである．FCMでは数学被覆(有限要素法における形状関数に相当する)と物理被覆(物質が存在する領域)を分離して考える．**図7**にFEMとFCMの比較を示すが，FEMでは物理領域に一致するように数学被覆(形状関数)が定義されるのに対し，FCMでは物理領域とは別に数学被覆が定義される．このとき，数学被覆として例えばボクセル有限要素法の規則的な形状関数を用いることで，境界付近の特別な領域積分処理を除けば，ほぼメッシュフリーな解析が可能となる．FCMは更に寺田らによって，非線形解析への拡張が進められている[24]．一例として，FCMによるクラック進展解析例を示す．FCMでは，クラックの(開閉の)モデリングとして多重に数学被覆を定義し，クラックにそって適切な拘束条件を付加することで，任意の場所にクラックを配置し進展させることができる．**図8**上はクラックの進展図を表し，下は○で囲んだ場所の拡大図である．この問題では3角形要素で用いる形状関数を数学被覆として用いているが，要素の境界ではなく内部をき裂が進展している様子がわかる．これらは従来の有限要素法では解析が困難であった問題である．

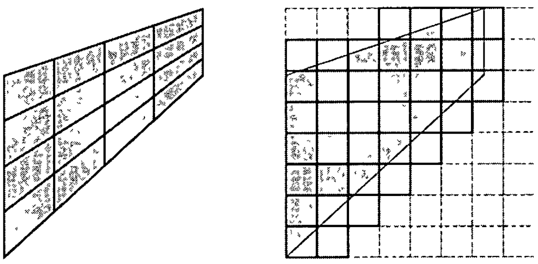

図7 FEMとFCMの比較

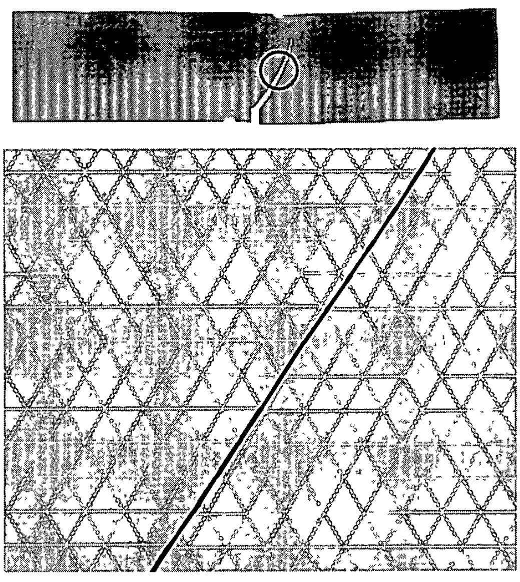

図8 FCMによるき裂進展解析

6. おわりに

本稿では，メッシュフリー法／粒子法の概要および，ガラーキン法に基づくメッシュフリー法について，特に移動最小自乗近似に基づく手法を中心に定式化と解析例を示した．種々のメッシュフリー法の詳細な理論と応用については，近年成書が出版されているのでそちらを参照されたい[1]．次回は，メッシュフリー法の考え方から派生した新しい有限要素法について紹介する．

参考文献

1) G R Liu Mesh Free Methods, CRC Press, (2003)
2) 矢川元基，藤澤智光 メッシュフリー法の新展開，日本機械学会論文集A編，**70**-691，330/337(2004)
3) T Belytschko, Y Y Lu and L Gu Element free Galerkin methods, Int J Num Meth Eng, **37**, 229/256(1994)
4) 野口裕久 メッシュフリー法のクラス分けと実用化に向けて，計算工学，**7**-1，411/414(2002)
5) W K Liu, S Jun and Y F Zhang Reproducing kernel particle methods, Int J Num Meth Fluids, **20**, 1081/1106 (1995)
6) J J Monaghan An introduction to SPH, Comp Phys Comm, **48**, 89/96(1988)
7) C A Duarte and J T Oden An h-p adaptive method using clouds, Comput Meth Appl Mech Eng, **139**, 237/262 (1996)
8) 中西克嘉，大坪秀臣，鈴木克幸，寺田賢二郎 有限被覆法(FCM)による弾性体のメッシュフリー解析，第47回応用力学連合講演会講演予稿集，467/468(1998)
9) Y T Gu and G R Liu A local point interpolation method (LPIM) for static and dynamic analysis of thin beams, Comput Meth Appl Mech Eng, **190**, 5515/5528(2001)
10) G R Liu and Y T Gu A Local radial point interpolation method for free vibration analyses of 2-D solids Journal of Sound and Vibration, **246**, 29/46(2001)

11) E Onate, S Idelsohn, O C Zienkiewicz and R L Taylor A finite point method in computational mechanics Applications to convective transport and fluid flow, Int J Num Meth Eng, **39**, 3839/3866(1996)
12) 野口裕久, 川島徹也 付帯条件付き最小自乗法に基づくグリッドレス法の構造解析への適用, 計算工学講演会論文集, **2**, 371/374(1997)
13) N R Aluru A reproducing kernel particle method for meshless analysis of microelectromechanical systems, Comput Mech, **23**, 324/338(1999)
14) B Nayroles, G Touzot and P Villon Generalizing the finite element method Diffuse approximation and diffuse elements, Comput Mech, **10**, 307/318(1992)
15) S N Atluri and T Zhu A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics, Comput Mech, **22**, 117/127(1998)
16) S De and K J Bathe The method of finite spheres, Comput Mech, **25**, 329/345(2000)
17) 野口裕久 エレメントフリー法の理論と応用, 機械の研究, **53**, 442/449(2001)
18) Beissel S and Belytschko T Nodal integration of the element-free Galerkin method, COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING, 139(1-4), 49/74, DEC 15(1996)
19) Nagashima T Node-by-node meshless approach and its applications to structural analyses, INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING, 46(3), 341/385, SEP 30(1999)
20) Nagashima T Development of a CAE system based on the node-by-node meshless method, COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING, 187(1-2), 1/34(2000)
21) Chen JS, Wu CT and Yoon S, et al A stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods, INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING, 50(2), 435/466, JAN 20(2001)
22) 野口裕久 メッシュフリー法, テクノマリン, **876**, 41/45 (2003)
23) H Noguchi, T Kawashima and T Miyamura Element free analyses of shell and spatial structures, I J Num Meth Eng, **47**, 1215/1240(2000)
24) K Terada, M Asai and M Yamagishi Finite cover method for linear and nonlinear analysis of heterogeneous solids, Int J Num Meth Eng, **58**, 1321/1346(2003)