

メッシュフリー／粒子法 第2回 拡張／仮想有限要素法

長嶋利夫*・野口裕久**

ABSTRACT This series of articles summarize the current progress of meshfree/particle method. In this issue, Extended/ Fictitious finite element method is focused and then the extended finite element method (X-FEM) using interpolation functions based on the partition of unity is introduced. The theoretical formulation is outlined and the several numerical examples for two-dimensional elasticity are illustrated.

1. はじめに

固体力学の支配方程式の数値解法として有限要素法 (Finite Element Method: FEM) が用いられ、構造強度問題の問題解決手法として広く普及している。実用問題における応力解析では、き裂面や異材界面境界、複雑形状を有する自由表面などのモデル化が要求されるが、FEMは連続体を対象とした離散化手法であるため、実際の形状に合わせた要素分割が必要となる。Belytschko¹⁾らは、複雑形状を有するき裂のモデル化を効率的に行うためには要素分割が不要な解析手法が有効であると考え、Element-Free-Galerkin-Method (EFGM) を提案した。このような解法は、解析プログラムへの入力データとしてメッシュデータが不要となるので、メッシュフリー法 (Mesh Free Method) と呼ばれている。1994年に文献1)が発表されて以来、計算力学(とくに計算固体力学)の分野において、メッシュフリー法に関する研究開発が活発に行われてきた。メッシュフリー法の研究開発の過程において、従来の要素単位での関数近似の枠組みがはずされ、内挿関数の作成方法が一般化された。たとえば、代表的なメッシュフリー法であるEFGMでは移動最小自乗法²⁾に基づいた手法により節点単位で作成された内挿関数が用いられる。一方、Babuska^{3,4)}らは、PUFEMを提案しPartition of Unity (以下PUと記す)の条件を満たす内挿関数を導出し用いる

ことによって、近似精度を局所的に高精度化できることを示した。このことは、あらかじめ解の特性が既知である問題に対しては、その特性を考慮した内挿関数を局所的に用いることにより高精度な解を得ることができることを示唆する。

このような背景においてBelytschko^{5,6)}らは、PU条件を満たす内挿関数を利用した拡張有限要素法 (eXtended-FEM, 以下X-FEMと記す)を提案し、応力拡大係数 (Stress Intensity Factor: SIF)などの破壊力学パラメータの評価やき裂進展シミュレーションに適用した。X-FEMは、き裂を含む連続体のモデル化を容易にし、破壊力学分野における応力解析を効率化する。この手法はまた、他のメッシュフリー法と比較して、これまでのFEM技術の蓄積を基本的にはそのまま継承できるという利点がある。X-FEMにおいては変位場の特性を表現できる基底関数が、従来のFEMでの内挿関数に「局所的に」付加される。付加される関数はエンリッチ関数 (enrichment function) と呼ばれる。X-FEMの初期の研究⁵⁾においては、二次元問題におけるき裂を表現するためにき裂近傍の漸近解を再構成できる関数がエンリッチ関数として用いられた。なお、ここで行われたエンリッチ関数の導入は、Belytschko⁷⁾がすでにEFGMの研究で行っている。その後、き裂先端から離れた部分を扱うためにヘビサイド (Heaviside) 関数を利用する方法が示された⁶⁾。二次元き裂解析で用いられたこのような関数は、基本的に三次元問題においても利用することができる⁸⁾。さらに、Sukumar⁹⁾の論文に示されているように、ステップ関数やランプ関数をエンリッチ関数として用いることにより自由表面における変位の不連続性や異種材界面におけるひずみの不

Meshfree/Particle Methods — Series 2: Extended/Fictitious FEM.
By Toshio Nagashima (Faculty of Science and Technology, Sophia University) and Hirohisa Noguchi (Dept. of System Design Engineering, Keio University).

* 上智大学理工学部機械工学科

** 慶應義塾大学理工学部システムデザイン工学科

連続性を表すことも可能である。また、移動する境界を関数値で陰的に表現する手法であるレベルセット法¹³⁾と組み合わせることにより計算効率をさらに上げることが可能である^{9~11)}。

本稿ではX-FEMの内挿関数の一般式から出発し、その式に基づいて導出される、き裂、自由表面、異種材界面を含む二次元線形弾性問題に用いられる内挿関数について、数値解析事例を交えながら紹介する。

2. X-FEM

2.1 X-FEMの内挿関数の一般形

ここでは簡単のため、図1に示すようなスカラーの独立変数 x で記述されるスカラー変位場 u を扱う一次元問題を考える。X-FEMではPU条件を満足する内挿関数を用いて変位場の近似 u^h を次式のように表す。

$$u^h(x) = \sum_I \phi_I(x) (u_I + a_I g(x)) \quad (1)$$

ここに、 ϕ_I は通常のFEMで用いられる節点 I に関する内挿関数、 $g(x)$ は局所的に導入される関数でありX-FEMではエンリッチ関数と呼ばれる。事前に解の特性を表す関数が既知であれば、その関数をエンリッチ関数形状 $g(x)$ として用いることができる。具体的には、図2に示すような、き裂先端近傍の漸近解、ヘビサイド関数、ステップ関数、ランプ関数などが用いられる¹²⁾。

式(1)で与えられる内挿関数について考察してみよう。まず、式(1)において、すべての節点 I について $a_I = 0$ とすれば従来のFEMと同じ内挿関数が得られるので、FEMの内挿関数が有するPU特性および線形場の近似特性である次式を継承する。

$$\sum_I \phi_I(x) = 1 \quad (2.1)$$

$$\sum_I \phi_I(x) x_I = x \quad (2.2)$$

式(2.1)(2.2)は有限要素が剛体変形(ひずみゼロ)および線形変形(ひずみ一定)を再現できるための条件である。また、これらの式から、評価点を含む要素のすべての節点に関する内挿関数の値の合計は1になり、またその点の座標値は、節点の座標値を内挿することによって得られることがわかる。これらの条件は、線形弾性問題において、解析領域を十分細かい有限要素分割した場合に、収束解が得られることを保証する条件となっている。

つぎに、要素内にある評価点を考え、その評価点を含む要素を構成するすべての節点に対してエンリッチ関数 $g(x)$ に対する自由度のみが非零であるとする。す

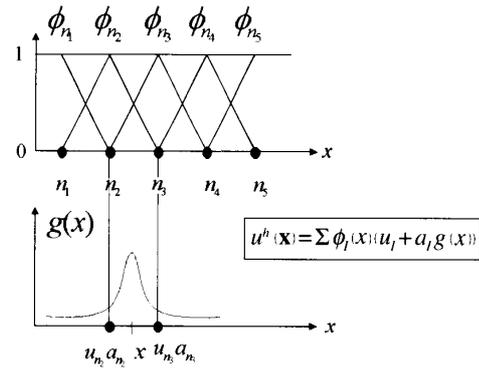


図1 スカラー場の一次元問題におけるX-FEMの内挿関数の一般形。通常のFEMの内挿関数 ϕ_I 、エンリッチ関数 $g(x)$ を用いて変位場 u を近似する。

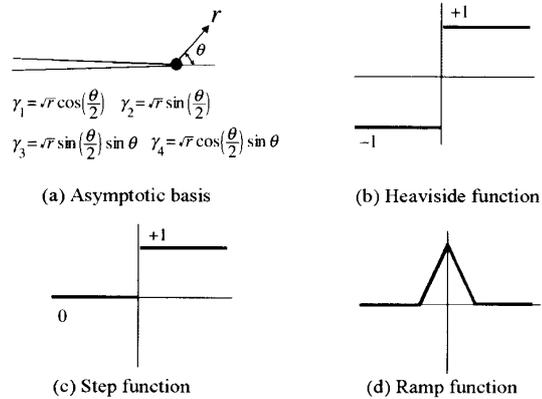


図2 X-FEMで用いられる様々なエンリッチ関数の例

なわち図1に示すように評価点 x を囲む要素を構成するすべての節点 I について $a_I = 0$ および $a_I = 1$ とすると、式(2.1)の条件より次式を得る。

$$u^h(x) = \sum_I \phi_I(x) g(x) = g(x) \quad (3)$$

式(3)により、導入した関数 $g(x)$ を完全に再構成できることがわかる。すなわち、X-FEMで用いられる内挿関数の一般形式(1)は、従来のFEMの近似特性を有し、付加したエンリッチ関数を再構成できることがわかる。

2.2 ヘビサイド関数によるき裂のモデル化

ここではMoësらの論文⁶⁾にならって二次元平面問題において、き裂における変位の不連続性を内挿関数でいかにしてモデル化するかについて説明しよう。図3に示すように4個の4節点平面要素でエッジクラックをモデル化することを考える。座標 x の原点はき裂先端にあるものとする。エッジクラックを表現するため

に、通常のFEMではダブルノード(二重節点)を設ける。このメッシュにおいて、内挿関数は次式のように表される。

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{10} \mathbf{u}_I \phi_I(\mathbf{x}) \quad (4)$$

ここに \mathbf{u}_I は節点Iでの変位、 ϕ_I は通常のFEMで用いられる節点Iに関係する内挿関数である。ただし、ここでの ϕ_I は自然座標系(要素にとられた局所座標系)ではなく全体座標系で書かれていることに注意されたい。

内挿関数 ϕ_I に関連して、内挿関数の台(サポート) ω_I を定義する。ここで台とは、内挿関数が非ゼロとなる領域である。通常のFEMの場合には、 ω_I は節点Iに結合する要素の集合となる。すなわち、この問題において ω_I は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \{E_1\} \\ \omega_2 &= \{E_1, E_2\} \\ \omega_3 &= \{E_2\} \\ \omega_4 &= \{E_1, E_2, E_3, E_4\} \\ \omega_5 &= \{E_2, E_4\} \\ \omega_6 &= \{E_3\} \\ \omega_7 &= \{E_3, E_4\} \\ \omega_8 &= \{E_4\} \\ \omega_9 &= \{E_1\} \\ \omega_{10} &= \{E_3\} \end{aligned} \quad (5)$$

ここに E_I は要素Iを示す。

さて次式により、ベクトル \mathbf{a} 、 \mathbf{b} を導入する。

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{u}_9 + \mathbf{u}_{10}}{2} \quad (6.1)$$

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{u}_9 - \mathbf{u}_{10}}{2} \quad (6.2)$$

式(6)を逆に \mathbf{u}_9 、 \mathbf{u}_{10} について解いて、次式を得る。

$$\mathbf{u}_9 = \mathbf{a} + \mathbf{b} \quad (7.1)$$

$$\mathbf{u}_{10} = \mathbf{a} - \mathbf{b} \quad (7.2)$$

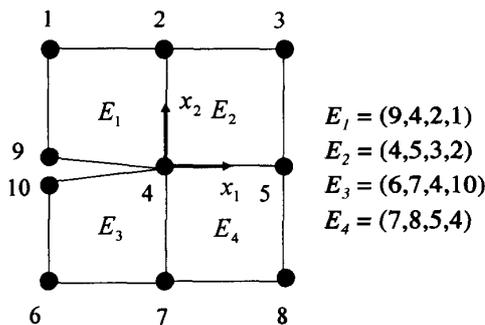


図3 二重節点(節点9と節点10)を用いたFEMによるき裂のモデル化

式(7.1)(7.2)を用いて、再び内挿関数を次式のように書きかえることができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) &= \sum_{I=1}^8 \mathbf{u}_I \phi_I(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_9 \phi_9(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_{10} \phi_{10}(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{I=1}^8 \mathbf{u}_I \phi_I(\mathbf{x}) + (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \phi_9(\mathbf{x}) + (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \phi_{10}(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{I=1}^8 \mathbf{u}_I \phi_I(\mathbf{x}) + \mathbf{a} (\phi_9(\mathbf{x}) + \phi_{10}(\mathbf{x})) + \mathbf{b} (\phi_9(\mathbf{x}) - \phi_{10}(\mathbf{x})) \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、次式で定義されるようなヘビサイド関数 $H(\mathbf{x})$ を導入する。

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & (x_2 \geq 0) \\ -1 & (x_2 < 0) \end{cases} \quad (9)$$

内挿関数 ϕ_9 の台 ω_9 は $\{E_1\}$ で、 $\{E_1\}$ 内のすべての位置においてヘビサイド関数は正の値を取るため、次式のように書き直すことができる。

$$\phi_9(\mathbf{x}) = \phi_9(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) \quad (10)$$

一方、内挿関数 ϕ_{10} の台 ω_{10} は $\{E_3\}$ で、 $\{E_3\}$ 内のすべての位置でヘビサイド関数は負の値を取るため、次式のように書き直すことができる。

$$\phi_{10}(\mathbf{x}) = -\phi_{10}(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) \quad (11)$$

これらの関係式を利用すると、結局、式(8)は次式のように書き直すことができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) &= \sum_{I=1}^8 \mathbf{u}_I \phi_I(\mathbf{x}) + \mathbf{a} (\phi_9(\mathbf{x}) + \phi_{10}(\mathbf{x})) \\ &\quad + \mathbf{b} (\phi_9(\mathbf{x}) - \phi_{10}(\mathbf{x})) H(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (12)$$

式(12)において $\phi_9 + \phi_{10}$ を ϕ_{11} で、 \mathbf{a} を \mathbf{u}_{11} で、 \mathbf{b} を \mathbf{a}_{11} で置き換えて次式を得る。

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^8 \mathbf{u}_I \phi_I(\mathbf{x}) + \phi_{11}(\mathbf{x}) (\mathbf{u}_{11} + \mathbf{a}_{11} H(\mathbf{x})) \quad (13)$$

内挿関数として式(13)を用いた場合のメッシュを図4に示す。このようにヘビサイド関数を用いてき裂面

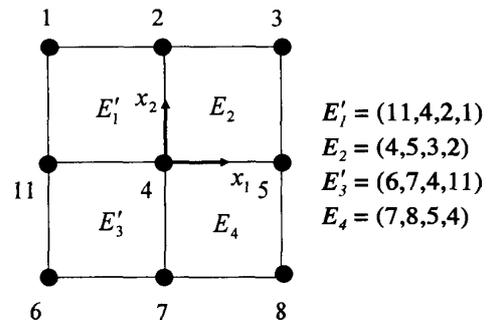


図4 エンリッチ節点を用いたX-FEMによるき裂のモデル化。二重節点なしでもき裂を表すことができる。

における変位の不連続性を図3に示すような二重節点をを用いずに表わすことができる。なお、このとき ϕ_{11} の台は、 ϕ_9 の台と ϕ_{10} の台との和として次式のように表される。

$$\omega_{11} = \{E'_1, E'_3\} \quad (14)$$

ここで、要素 E_1 と E_3 を構成する節点の番号(コネクティビティ)が変化したので、それらを E'_1 と E'_3 と表した。

式(13)で与えられる内挿関数は、確かに前述したX-FEMの内挿関数の一般式(1)の形式になっていることがわかる。

このようにX-FEMでは、事前に解の特性(この事例ではき裂面での変位の不連続性)がわかっている場合には、その特性を表すことができるエンリッチ関数(この事例ではヘビサイド関数)を導入し、基底関数を修正することにより、その特性を完全に満足あるいは近似できる内挿関数を導出することができる。とくに不連続性を表現できる関数を導入することにより、メッシュ分割によらずに不連続な場を表現することが可能になる。X-FEMで用いられているエンリッチ関数の具体的表示については後述する。

2.3 レベルセット法

レベルセット法¹³⁾は、自由表面形状を関数で陰的に表し、時々刻々変化する過渡的な現象を追跡する数値解析手法である。X-FEMは、レベルセット法を用いずに実装可能であるが、X-FEMはレベルセット法と組み合わせて実装される場合が多い⁹⁻¹¹⁾。レベルセット法を導入すると、形状処理が単純化されるので「きれいな」プログラムを書くことができる。ここでは、レベルセット法によりX-FEMで扱う複雑形状を効率的に表現する方法を簡単に説明する。

二次元固体内部のき裂線、自由表面、異材境界面などの不連続線を想定し、それらを Γ とする。境界 Γ は空間で定義されるレベルセット関数の値ゼロの等値線として定義されるものとする。境界線 Γ を表現するレベルセット関数としては、図5に示すように境界線 Γ の上側領域 Ω_+ で正の値、下側領域 Ω_- で負の値をとるような関数であれば良い。たとえば、次式に示すような符号付き距離関数(Signed Distance Function: SDF)を用いることができる。

$$f(\mathbf{x}) = \min_{\bar{\mathbf{x}} \in \Gamma} \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\| \text{sign}(\mathbf{n}(\bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})) \quad (15)$$

式(15)で定義される符号付き距離関数は、基本的には任意の点と不連続線 Γ との距離であり、界面の上側にあるか下側にあるかを示すために符号を与える。レ

ベルセット法を有限要素法と組み合わせて用いる場合、レベルセット関数の節点値 f_i を用いて、任意の位置でのレベルセット関数 $f(\mathbf{x})$ を次式で近似評価することができる。

$$\bar{f}(\mathbf{x}) = \sum_I \phi_I(\mathbf{x}) f_i \quad (16.1)$$

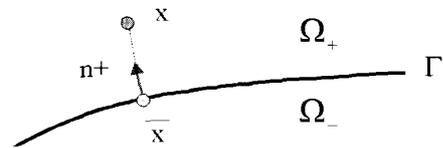
ここに

$$f_i = f(\mathbf{x}_i) \quad (16.2)$$

となる。

このような方法を用いることによって、境界形状の幾何学的表現が簡略化し、形状に関する処理を高速に行なうことができる。X-FEMをレベルセット関数と組み合わせる場合、エンリッチ関数はレベルセット関数の値を用いて計算される。

平板内部にある傾斜き裂形状をレベルセット関数で表現した例を図6に示す。符号付き距離関数はき裂線近傍だけで計算されているが、レベルセット値の絶対値がき裂線からの距離になっていることがわかる。また、き裂線を挟んで符号が反転していることがわかる。この値をヘビサイド関数に代入することによって、+1か-1のどちらかの値をとることになる。図6に示すように、ヘビサイド関数を用いてき裂上側、下側を表現することができる。



$$f(\mathbf{x}) = \min_{\bar{\mathbf{x}} \in \Gamma} \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\| \text{sign}(\mathbf{n}^+ \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}))$$

図5 レベルセット法で用いられる符号付き距離関数

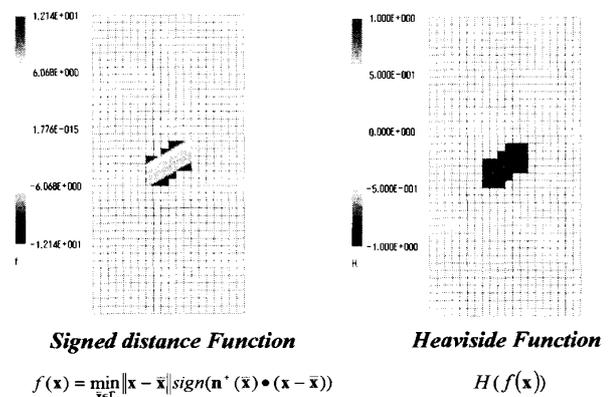


図6 符号付き距離関数による形状表現
(平板中の傾斜き裂)

2.4 コンピューターインプリメンテーション

X-FEM 解析は通常の FEM で用いられる内挿関数を局所的に変更すれば良いので、従来の FEM 解析プログラムを多少修正すれば容易に実現できる。具体的には内挿関数に係わる部分(たとえば要素剛性マトリクス、荷重条件、拘束条件作成部分など)を修正すればよい。さらに前述したレベルセット法を組み合わせると、エンリッチ関数をレベルセット値によって記述することによって、複雑形状を効率的にモデル化することができる。プログラム実装における留意点をまとめると下記のとおりである。

(1) 節点自由度

通常の FEM の実装においては、節点あたりの自由度が決まっている場合が多い(たとえば二次元平面問題解析では節点あたり 2、三次元ソリッド解析では 3 など) しかしながら X-FEM では、節点あたりの自由度がエンリッチ節点において局所的に変化する。そのような場合、システム方程式(連立一次方程式)の求解処理においてブロック処理(固定された節点自由度数に対するまとめた処理)を行っているものは、直接利用できない。

(2) 数値積分法

X-FEM は通常の FEM と同様に離散化のための指導原理として仮想仕事の原理を用いており、離散化式の導入には要素形状についての積分が不可欠であり、通常はガウスの積分法などの数値積分法が用いられる。しかしながら、エンリッチ関数を含むので、従来の FEM と異なり、内挿関数は単純な多項式であるとは限らない。また、積分領域は要素形状と完全に一致しない場合もある。そのような場合には、要素を複数の積分領域に分割して実行する必要がある。あるいは十分多数の積分点を用いて数値積分を行なう必要がある。

(3) 可視化

FEM 解析においては、解析結果のポスト処理として可視化が不可欠である。しかしながら、前述したように X-FEM では節点あたりの自由度が可変であり、また形状をメッシュで直接表現せずにレベルセット関数で、いわば「陰的」に表現するため、既存のポストプロセッサを直接利用できない。そこで、解析結果を可視化する際に工夫が必要となる。エンリッチ関数を含む要素に関しては、局所的に要素分割行なったうえで可視化する方法などが考えられる。

3. エンリッチ関数および数値解析例

3.1 き裂のモデル化(図 7 参照)

X-FEM においては、き裂近傍にある要素内の位置 \mathbf{x}

における変位を次式で近似する。

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^m \phi_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I + \sum_{I \in \mathbf{C}} \phi_I(\mathbf{x}) \sum_{k=1}^4 \gamma_k(\mathbf{x}) \mathbf{a}_k^I + \sum_{I \in \mathbf{J}} \phi_I(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) \mathbf{b}_I \quad (17)$$

ここに ϕ_I は通常の要素の定式化で用いられる内挿関数、 m は要素を構成する節点数、 \mathbf{C} はき裂先端近傍の変位についての漸近解の特性を考慮する節点の集合、 \mathbf{J} はき裂周辺の変位の不連続性を考慮する節点の集合、 $\mathbf{u}_I, \mathbf{a}_k^I, \mathbf{b}_I$ は節点に割り付けられる節点自由度ベクトルである。 $\mathbf{C} \cap \mathbf{J} = \emptyset$ である。また、 $\gamma_i (i=1, 4)$ は、き裂先端の変位場の漸近解を表す基底関数、 $H(\mathbf{x})$ はき裂近傍での変位の不連続を表すヘビサイド(Heviside)関数であり、き裂線の上側で 1、下側で -1 となる。

式(17)において要素を構成する節点 I は、集合 \mathbf{C} に属するか、集合 \mathbf{J} に属するか、それ以外である。節点 I が集合 \mathbf{C} に属する場合、その節点においては漸近解の基底関数がエンリッチされるので、式(17)の右辺の第 1 項、第 2 項が変位の近似に寄与する。同様に節点 I が集合 \mathbf{J} に属する場合には第 1 項、第 3 項が、通常の節点の場合には第 1 項のみが、それぞれ変位の近似に寄与する。

基底関数 γ_i としては次式が用いられる。

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad \gamma_2 = \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \\ \gamma_3 &= \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin \theta, \quad \gamma_4 = \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin \theta \end{aligned} \quad (18)$$

ここに r, θ はき裂先端位置を原点とする極座標である。

式(18)に示された基底関数は、均質材中のき裂先端

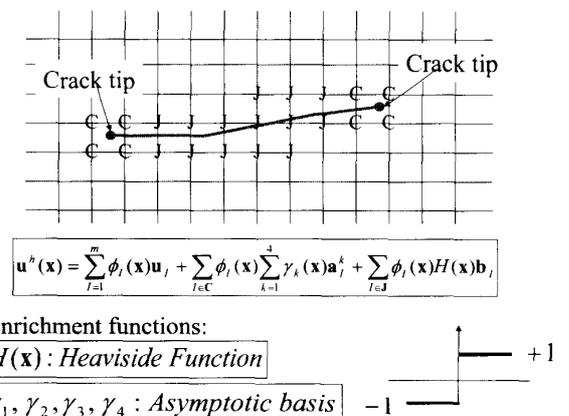


図 7 X-FEM によるき裂のモデル化に用いられる内挿関数ヘビサイド関数の自由度を有する節点: \mathbf{J} 漸近解の基底の自由度を有する節点: \mathbf{C}

近傍の変位場についての漸近解を再構成することが可能である。

なお、式(17)を適用する際に、き裂形状を参考にして、ヘビサイド関数の値を評価する必要がある。このような処理において計算効率を向上させるために前述のように、レベルセット関数を用いることができる。レベルセット関数を用いて式(17)を書き換えて次式を得る。

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \phi_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i + \sum_{l \in C} \phi_l(\mathbf{x}) \sum_{k=1}^4 \gamma_k(\mathbf{x}) \mathbf{a}_l^k + \sum_{l \in J} \phi_l(\mathbf{x}) H(\tilde{f}(\mathbf{x})) \mathbf{b}_l \quad (19)$$

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \phi_i(\mathbf{x}) f_i \quad (20)$$

ただしヘビサイド関数の引数がベクトルからスカラーとなっていることに注意されたい。

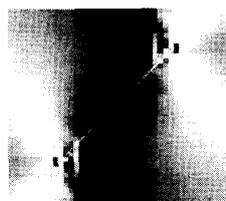
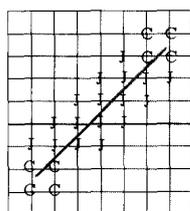
このような内挿関数を用いて、格子状の矩形メッシュに対して傾斜角45度にき裂を設定し、応力解析を実施した例を図8に示す¹⁴⁾。

3.2 自由表面のモデル化(図9参照)

解析領域内部のポイド表面や外表面などに現われる自由表面における変位の不連続性を表現するために、エンリッチ関数として領域内部で1、領域外部で0となるステップ(Step)関数 V を用いる。すなわち、次式に示すような内挿関数を用いる。

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_l \phi_l(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}) \mathbf{u}_l \quad (21)$$

このような内挿関数を用いることによって、解析領域の外側での変位は必ずゼロになり、解析領域表面における変位場の不連続性を表現することができる。ただし式(21)は式(1)のX-FEMの内挿関数の一般形式にはなっていない。詳細な説明は省略するが、式(21)は式(1)の一般形式を自由表面近傍の節点に適用し、節点



C: Enriched with asymptotic function
J: Enriched with Heaviside function

von Mises stress

図8 X-FEMによる傾斜き裂の応力解析(傾斜き裂角度45度)。き裂形状をメッシュと独立に定義できる。

自由度に関する拘束条件を考慮することにより得ることができる。図9においてFと記された節点はステップ関数の自由度をエンリッチした節点、Dは自由度が完全に拘束される節点である。式(21)においてエンリッチ節点においても自由度は増えてないこと、また自由表面近傍の外側の節点も自由度を有していることに注意されたい。式(21)を用いて要素剛性を評価する方法は、結果的にはボクセル解析などで用いられる方法と同様になる。

なお、式(21)を適用する際に、評価点において自由表面形状を参考にして、ステップ関数の値を評価する必要がある。レベルセット関数を用いて式(21)を書き換えると次式を得る。

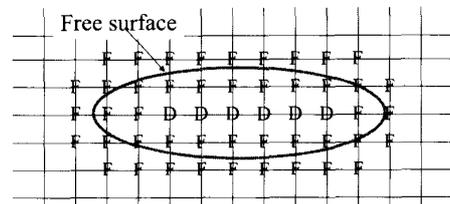
$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_l \phi_l(\mathbf{x}) V(\tilde{f}(\mathbf{x})) \mathbf{u}_l \quad (22)$$

ただしステップ関数の引数がベクトルからスカラーになったことに注意されたい。

このような内挿関数を用いて、格子状の矩形メッシュに対して円孔形状を設定し、応力解析を実施した例を図10に示す。X-FEMでは、円孔を定義する形状曲線にメッシュを整合させることなくモデル化が可能となる。

3.3 異種材界面のモデル化(図11参照)

異材界面境界では、変位は連続であるが、変位の微分であるひずみが不連続になる。従来のFEMでは異材界面境界と要素境界を一致するような要素分割を用いることによってモデル化される。これに対してX-FEMではこのような異材界面境界における変位の連続性、その微分の不連続性を表現するためにエンリッチ関数としてランプ関数 F を用いる。すなわち次式に示すような内挿関数が用いられる。



$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{l \in F} \phi_l(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}) \mathbf{u}_l$$

Enrichment functions : $V(x)$: Step Function



図9 X-FEMによる自由表面のモデル化に用いられる内挿関数
エンリッチ節点: F, 自由度を有しない節点: D
自由表面近傍の外側の節点も自由度を有する

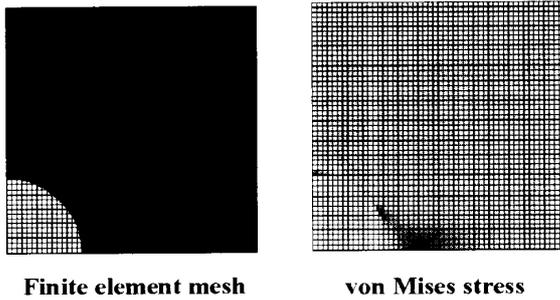


図10 X-FEMによる円孔つき平板の応力解析
自由表面形状をメッシュと独立に定義できる

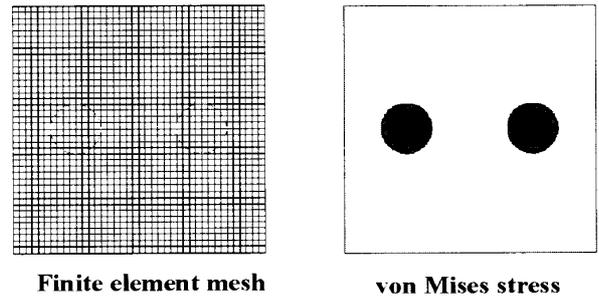
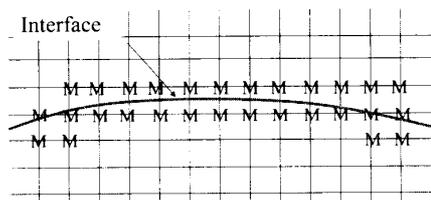


図12 X-FEMによる異種材界面を有する平板の応力解析
異材界面形状をメッシュと独立に定義できる



$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^m \phi_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I + \sum_{I \in \mathbf{M}} \phi_I(\mathbf{x}) F(\mathbf{x}) \mathbf{a}_I$$

Enrichment functions : $F(\mathbf{x})$: Ramp Function

図11 X-FEMによる異種材界面のモデル化に用いられる
内挿関数. ランプ関数の自由度を有する節点:M.

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^m \phi_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I + \sum_{I \in \mathbf{M}} \phi_I(\mathbf{x}) F(\mathbf{x}) \mathbf{a}_I \quad (23)$$

ここに \mathbf{M} はランプ関数の自由度をエンリッチする節点の集合である。

$F(\mathbf{x})$ には任意性があり異材界面の近傍でランプ関数の特性(境界の前後で値は連続, その微分値が不連続)を有するものであれば基本的には何でもよい。しかしながら, $F(\mathbf{x})$ の設定の仕方によっては, 得られる剛性方程式の条件数に影響を及ぼす。文献9)では, $F(\mathbf{x})$ の範囲を限定してエンリッチ関数として用いている。ここでは, 文献15)で提案されているレベルセット関数を用いた方法を紹介する。

レベルセット関数を用いて, 次式のようにエンリッチ関数 $F(\mathbf{x})$ を定義する。

$$F(\mathbf{x}) = \sum_I |f_I| \phi_I(\mathbf{x}) - \left| \sum_I f_I \phi_I(\mathbf{x}) \right| \quad (24)$$

このようなエンリッチ関数を用いると, 境界線を含まない要素でエンリッチ関数 F の寄与を完全になくすることができる。

このような内挿関数を用いて, 二つの円形形状を有

する異材を含む平板の応力解析を実施した例を図12に示す。格子状の矩形メッシュに対して二つの円形形状を有する異材界面を設定した解析を行える。

4. おわりに

本稿では, メッシュフリー法的一种として分類されるX-FEMによる解析手法について解説した。X-FEMによりき裂, 自由表面, 異材界面形状を含む固体の応力解析を, 形状と整合しない有限要素分割を用いて実施できることを示した。ここでは, 二次元問題について言及したが, 三次元問題への展開も可能である^{9, 11)}。また, 応力解析以外にも伝熱解析にも利用できる¹⁴⁾。さらに, 破壊力学問題への応用においては, 均質な等方性材中のき裂だけではなく異材界面き裂問題へも適用できる^{16, 17)}。現在, より実際の解析での利用を想定し, 直交異方性材料から構成される複合材料積層板の破壊力学問題への適用^{18, 19)}, 弾塑性破壊力学問題への適用²⁰⁾についても検討されていることを付記しておく。本稿がX-FEMの理解及び応用, さらにはX-FEMプログラム作成のための参考になれば幸いである。

参考文献

- 1) T. Belytschko, Y. Y. Lu, L. Gu: Element-free Galerkin methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **37**, 229/256 (1994)
- 2) P. Lancaster, K. Salkauskas: Surface generated by moving least squares methods, *Mathematics of Computation*, **37**, 141/158 (1981)
- 3) J. M. Melenk, I. Babuska: The partition of unity finite element method: Basic theory and applications, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **139**, 289/314 (1996)
- 4) I. Babuska, J. M. Melenk: The partition of unity methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **40**, 727/758 (1997)
- 5) T. Belytschko, T. Black: Elastic crack growth in finite elements

- with minimal remeshing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **45**, 602/620 (1999)
- 6) N. Moës, J. Dolbow, T. Belytschko: A finite element method for crack growth without remeshing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **46**, 131/150 (1999)
 - 7) M. Fleming, Y. A. Chu, B. Moran, T. Belytschko: Enriched element-free Galerkin methods for singular fields, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **40**, 1483/1504 (1997)
 - 8) N. Sukumar, N. Moës, B. Moran, T. Belytschko: Extended finite element method for three-dimensional crack modeling, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **48**, 1549/1570 (2000)
 - 9) N. Sukumar, D. L. Chopp, N. Moës, T. Belytschko: Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite element method, *Computer Methods Applied Mechanics and Engineering*, **190**, 6183/6200 (2001)
 - 10) N. Moës, A. Gravouil, T. Belytschko: Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets-Part I: Mechanical model, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **53**, 2549/2568 (2002)
 - 11) A. Gravouil, N. Moës, T. Belytschko: Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets-Part II: Mechanical model, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **53**, 2569/25868 (2002)
 - 12) T. Belytschko, N. Moës, S. Usui, C. Parimi: Arbitrary discontinuities in finite elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **50**, 993/1013 (2001)
 - 13) H. A. Sethian: *Level Set Methods and Fast Marching Methods: evolving interface in computational geometry fluid mechanics computer vision and material science*, Cambridge, UK: Cambridge University Press, (1999)
 - 14) 長嶋, 大本, 谷: 拡張有限要素法(X-FEM)による二次元熱応力解析, *機論*, **70-691**, A, 383/390 (2004)
 - 15) N. Moës, M. Cloirec, P. Cartraud, J. F. Remacle: A computational approach to handle complex microstructure geometries, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **192**, 3163/3177 (2003)
 - 16) T. Nagashima, Y. Omoto S. Tani: Stress Intensity Factor Analysis of Interface Cracks using X-FEM, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **56**, 1151/1173 (2001)
 - 17) N. Sukumar, Z. Y. Huang, J. -H. Prevost, Z. Suo: Partition of unity enrichment for biomaterial interface cracks, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **59**, 1075/1102 (2004)
 - 18) 長嶋, 近藤, 末益: X-FEMによる複合材料積層板の応力解析, *機論*, **70-691**, A, 391/398 (2004)
 - 19) T. Nagashima, H. Suemasu: Application of extended finite element method to fracture of composite materials, *ECCOMAS 2004*, (2004-7)
 - 20) T. Nagashima: Application of extended finite element method to nonlinear problems, *WCCM VI in conjunction with APCOM'04*, (2004-9)