

平均曲率流への不規則外乱の影響と運動の一意性[†]

石川 昌明*・田邊 孝行**

ABSTRACT Phase boundaries are defined as a surface separating different physical states such as a water-ice interface. The mean curvature flow is motion that the phase boundary moves with a normal velocity equals the mean curvature at each point on the phase boundary. We formulate the mean curvature flow by a stochastic level set equation and study the influence of the random noise on motion of the phase boundary by a numerical simulation. In numerical simulations, sample behaviors of the stochastic mean curvature flows of two types of torus shapes are studied. And we numerically show that sample behaviors of the torus shape in stochastic mean curvature flows have a possibility of remarkably changing by the random noise without any fattening phenomena. And in the case where fattening occurs, we show that the random noise plays a role of selecting a unique solution among the set of possible solutions. From simulation results, we have conjectured that the unique solution selected by the random noise is the maximum solution in the sense defined in this paper.

1. 緒言

水と氷の境界のように物理状態の異なる2相を隔てる曲面を相境界という。相境界の位置と状態量の値を求める問題は自由境界問題¹⁾と呼ばれ、工学における重要な非線形問題の一つである。自由境界問題の代表例として、氷が融解(または水が凝固)する際の氷と水の境界の位置と氷や水の温度分布を求めるステファン問題²⁾がある。ステファン問題では相境界の変化は相境界外部の影響を受ける。しかし、金属の焼き鈍しの際に見られる粒界の運動のように、相境界の挙動が外部の影響を受けず、その幾何学的形状のみに依存する場合もある³⁾。本論文では、相境界の挙動が外部状態に依存せず、その幾何学的形状のみに依存する場合を考察対象に等高面法を用いて相境界運動のシミュレーション解析を行う。

まず、第2節において相境界上の各点の平均曲率に等しい速度で相境界が運動する平均曲率流^{4~9)}のモデル化を行う。モデル化の際には成長速度(相境界の法線

方向の運動速度)の揺らぎを考慮した確率モデルを提案する。第3節では提案した確率平均曲率流方程式を用いて、トーラス型相境界の平均曲率流のシミュレーションを行い、相境界運動への外乱の影響を考察する。第4節では相境界運動に一意性がない場合を取り上げ、外乱が解集合の中から一意的に解を選び出す働きをしていることをシミュレーションにより示す。

2. 確率平均曲率流方程式

本節では相境界上の各点における平均曲率に等しい速度で相境界が運動する、いわゆる平均曲率流のモデル化について考察する。

$S(t)$ を時間 t における相境界とし、 $S(t)$, ($t \geq 0$)は連続関数 $u(t, x)$ を用いて次のように表現できるとする。

$$S(t) = \{x | u(t, x) = 0, x \in R^n\} \quad (1)$$

式(1)は図1に示されたように相境界 $S(t)$ が関数 $u(t, x)$ の零等高面として表現されることを表し、 $S(t)$ の内部で $u(t, x) > 0$ 、外部で $u(t, x) < 0$ とする。また、相境界上の各点の外向き法線方向の速度成分 V を成長速度という。

本論文では相境界の挙動がその幾何学的形状のみに依存し、特に成長速度 V と平均曲率 k が次の関係にある平均曲率流を考察する。

$$V = -k \quad (2)$$

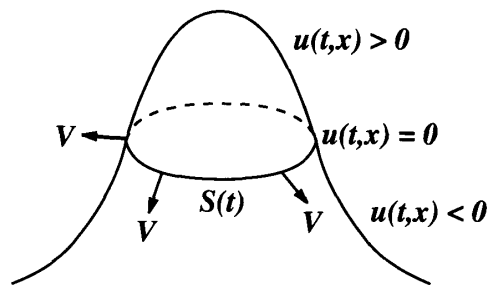
相境界 $S(t)$ が式(1)のように関数 $u(t, x)$ の零等高面と

The Influence of Random Noises on Mean Curvature Flows and the Uniqueness of Motion. By Masaaki Ishikawa (Faculty of Engineering, Yamaguchi University) and Takayuki Tanabe (Graduate School of Science and Engineering, Yamaguchi University).

* 山口大学工学部知能情報システム工学科

** 山口大学大学院理工学研究科

† 2005年3月28日受付 2005年6月15日再受付

図1 成長速度 V と相境界 $S(t)$

して表されているとき、成長速度 V と $S(t)$ 上の外向き単位法線ベクトル $\mathbf{N}$ は次のように計算できる^{4,5)}。

$$V = \frac{u_t}{|\text{grad } u|}, \quad \mathbf{N} = \frac{\text{grad } u}{|\text{grad } u|} \quad (3)$$

ここで、 u_t は u の時間 t に関する偏微分を表す。

相境界 $S(t)$ 上の各点における平均曲率 κ は $\kappa = -\text{div} \mathbf{N}$ で与えられるので、式(3)より次式を得る。

$$\kappa = -\text{div} \left(\frac{\text{grad } u}{|\text{grad } u|} \right) \quad (4)$$

平均曲率流の定義式(2)と式(3)、(4)より、関数 $u(t, x)$ を用いた平均曲率流方程式のモデルは次のようになる。

$$u_t = |\text{grad } u| \text{div} \left(\frac{\text{grad } u}{|\text{grad } u|} \right) \quad (5)$$

式(5)は外乱の影響がない場合の平均曲率流のモデルである。しかし、実際の金属の焼き鈍しにおいては材料内の異物や不純物の影響により、成長速度に不規則な揺らぎが生じる。この不規則な揺らぎの相境界運動への影響を考察するのが、本論文の目的である。そこで、揺らぎの不規則性を正規性白色雑音でモデル化し、式(2)に代わり次式を考える。

$$V = -\kappa + b \frac{dw(t)}{dt} \quad (6)$$

ここで、 b は定数、 $w(t)$ は標準ブラウン運動過程であり、その形式微分が正規性白色雑音を表す。

式(3)、(4)、(6)より、成長速度の揺らぎを考慮した平均曲率流方程式は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} du(t, x) &= |\text{grad } u| \text{div} \left(\frac{\text{grad } u}{|\text{grad } u|} \right) dt \\ &+ b |\text{grad } u| \circ dw(t), \quad (t, x) \in \mathbf{R}_+^1 \times \mathbf{R}^n \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 $\mathbf{R}_+^1 = (0, \infty)$ 、式(7)の右辺第2項の確率積分はストラトノビッチ型確率積分¹⁰⁾を表す。伊藤型確率積分¹⁰⁾ではなくストラトノビッチ型を用いる理由は注意2.1を参照。

初期時刻 $t=0$ における相境界の形状を S_0 として、式

(7)の初期条件は次のように与えられる。

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \mathbf{R}^n \quad (8)$$

ただし、 $u_0(x)$ は次式を満たす。

$$S_0 = \{x | u_0(x) = 0, x \in \mathbf{R}^n\} \quad (9)$$

注意2.1 式(7)は非線形性が強いので、部分積分に基づく超関数的な弱解¹¹⁾を定義することはできないが、確率粘性解^{12~15)}の意味で弱解を定義可能であり、初期値 u_0 が一様有界連続であれば文献12~15)の手法により、確率粘性解の意味で一意識を持つことが示せる。式(7)において伊藤型確率積分を用いると変数変換を行った際にブラウン運動の分散に関連した項が現れ、粘性解の存在を証明できなくなる。たとえば、変数変換 $\beta(u)$ を行うと $\beta''(u)b^2|\text{grad } u|^2/2$ という項が現れ、 $\beta(u)$ はもとの方程式を満たさなくなり、粘性解の存在が示せない。一方、ストラトノビッチ型確率積分では変数変換を行っても、新たな項が現れることがなく、 $\beta(u)$ はもとの同じ方程式を満たすため、確率粘性解の存在が証明できる。

3. シミュレーション

3.1 等高面法

相境界の挙動を等高面法^{4,5)}を用いて、解析する。まず、等高面法について簡単に説明する。

(Step-1) 与えられた初期相境界 S_0 に対して、次式を満足する関数 $u_0(x)$ を以下の手順で生成する。

$$S_0 = \{x | u_0(x) = 0, x \in \mathbf{R}^n\} \quad (10)$$

まず領域内の各点から相境界 S_0 までの距離を表す関数 $\rho(x, S_0)$ および S_0 の内部と外部を区別する関数 $q(x)$ を考える。

$$\rho(x, S_0) = \min_{y \in S_0} \{|x - y|\}, \quad q(x) = \begin{cases} 1 & x \in \text{int}(S_0) \\ -1 & x \notin \text{int}(S_0) \end{cases}$$

ここで、 $\text{int}(S)$ は S の内部を表す。

このとき、式(10)を満足する関数 $u_0(x)$ は次のように生成できる。

$$u_0(x) = \rho(x, S_0) q(x) \quad (11)$$

(Step-2) (Step-1)で生成した初期値 $u_0(x)$ のもとで、次の確率平均曲率流方程式を解く。

$$\begin{aligned} du(t, x) &= |\text{grad } u| \text{div} \left(\frac{\text{grad } u}{|\text{grad } u|} \right) dt \\ &+ b |\text{grad } u| \circ dw(t) \end{aligned} \quad (12)$$

(Step-3) 式(12)の解 $u(t, x)$ の零等高面 $S(t)$ を次式に

より求め、 $S(t)$ を時刻 t における相境界とする。

$$S(t) = \{x | u(t, x) = 0, x \in \mathbf{R}^n\} \quad (13)$$

本論文では式(11)により生成された初期値のもとで、有限差分法を用いて式(12)を差分化し、数値計算ソフトMatlab(サイバネット社)を使用して、式(12)を解いた。その際、式(12)の右辺第1項の分母が零にならないよう $|\text{grad } u| = (|\text{grad } u|^2 + 10^{-60})^{\frac{1}{2}}$ と置いた。また、求めた解 $u(t, x)$ の零等高面は等高線を求めるMatlabの組み込み関数であるcontourコマンドを用いて、式(13)を計算し、図示した。

3.2 トーラス型の相境界の平均曲率流

本節では3.1節の等高面法を用いて、2種類のトーラス型相境界に対するシミュレーションを行い、相境界運動への不規則外乱の影響を考察する。

まず図2のように d_1, d_2 という2つのパラメータでトーラス型をパラメータ化する。図3に示されたように円環部の断面の直径 d_1 は同一で中央部の穴の直径 d_2

が異なる2つのトーラスI, IIを考える。すなわち、トーラスI, IIは共に $d_1 = 0.6$ であり、トーラスIは $d_2 = 0.25$ 、トーラスIIは $d_2 = 0.5$ でトーラスIIの中央部の穴の直径はトーラスIの2倍である。

3.3 トーラスIの平均曲率流

まず、中央部の穴の小さいトーラスIの平均曲率流への外乱の影響を考察する。図4はトーラスIの断面形状を零等高面にもつ初期関数 $u_0(x)$ とその零等高面

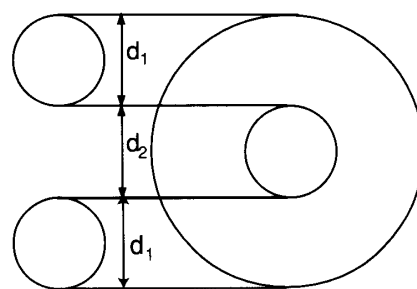
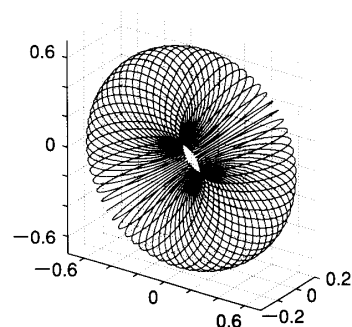
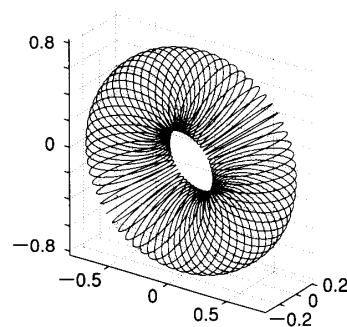


図2 トーラス型のパラメータ d_1 と d_2



(a) トーラス I
($d_1 = 0.6, d_2 = 0.25$)



(b) トーラス II
($d_1 = 0.6, d_2 = 0.5$)

図3 2種類のトーラス型

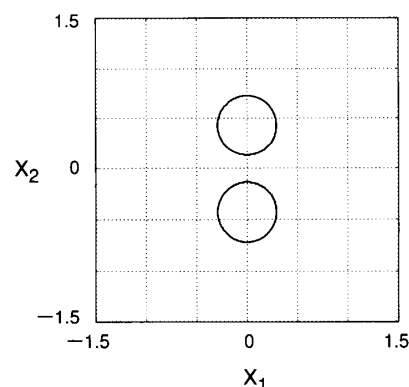
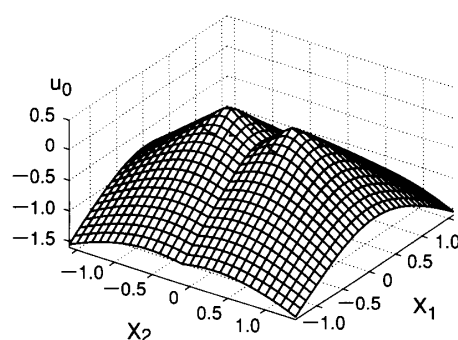


図4 トーラス型Iの初期値 $u_0(x)$ とその零等高面

ある。図5～7は図4の初期値 $u_0(x)$ のもとでの外乱の有無によるシミュレーション結果である。図5は外乱がない場合の相境界の時間的変化を示したものである。外乱が存在する場合には同一の初期条件のもとでも、ブラウン運動過程 $w(t)$ の見本過程が異なるため、一般に相境界 $S(t)$ の見本過程は異なる。図6, 7に外乱の強度は同じ($b=0.2$)であるが挙動特性が大きく異なった場合の相境界の見本過程を示した。図5より外乱がない場合のトーラスIの平均曲率流ではまず、中央部の穴が消滅し、球状になった後、消滅していることが分かる。すなわち、相境界は位相的变化を起こした後、消滅する。一方、外乱下では図6, 7のように消滅までの挙動に2種類あることが分かる。一つは外乱のない場

合と同じようにトーラスが球状になってから消滅する図6のような場合である。この場合には消滅時刻が外乱のない場合より早い場合と遅い場合があるが、ここでは図6のように消滅時刻が遅れる場合だけを示した。もう一つの場合は、図7のようにトーラス型を維持したまま消滅する場合である。この場合の消滅時刻は他のケースに比べて早くなる。これは図8に示したように球状の曲率よりトーラスの円環部の断面の曲率が大きいためである。

注意3.1 外乱下では同一の初期条件のもとでも図6, 7のような現象が起きるが、図6, 7は第4節で論じる運動の一意性がない、いわゆる相境界の肥満現象^{7, 16~19)}ではないことに注意。

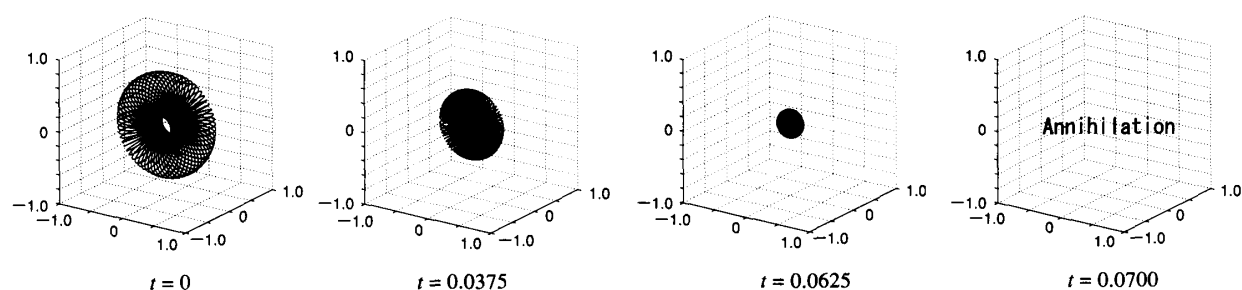


図5 トーラスIの平均曲率流(外乱なし)

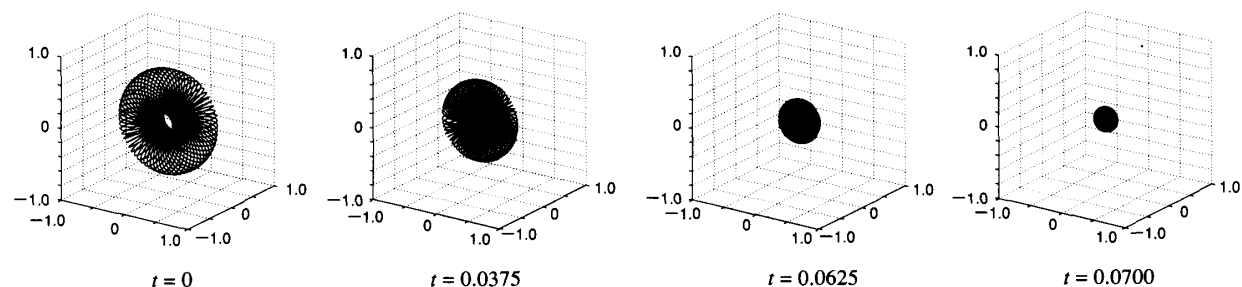


図6 トーラスIの平均曲率流の見本過程A

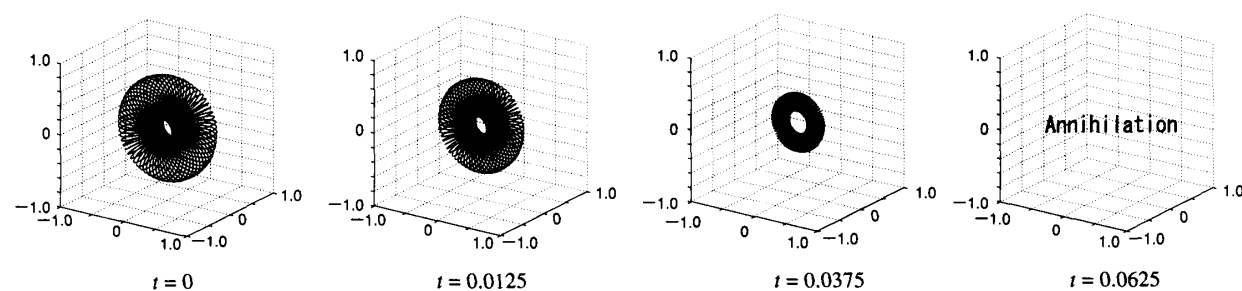


図7 トーラスIの平均曲率流の見本過程B

3.4 トーラス II の平均曲率流

トーラス I より中央部の穴の大きいトーラス II に対するシミュレーションを行い、外乱の相境界挙動への影響を考察する。図 9 はトーラス II の断面形状を零等

高面にもつ初期関数 $u_0(x)$ とその零等高面である。図 10, 11 は図 9 で与えられる初期値 $u_0(x)$ のもとでの外乱の有無によるシミュレーション結果である。図 10, 11 より中央部の穴の大きいトーラス II の平均曲率流で

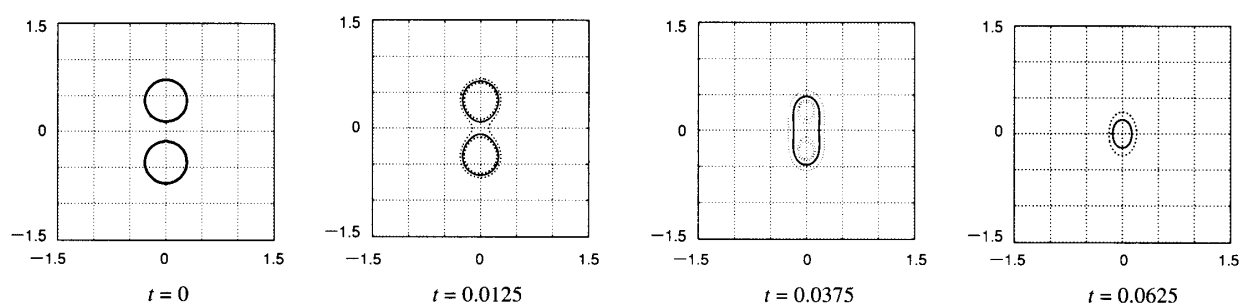


図 8 トーラス I の断面図による平均曲率流の時間的変化
(破線：外乱有り，実線：外乱なし)

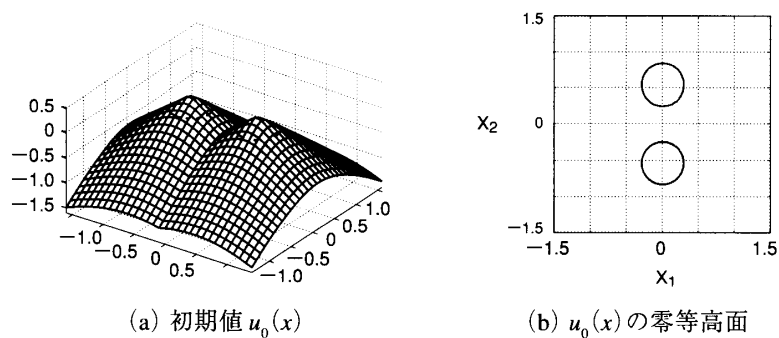


図 9 トーラス型 II の初期値 $u_0(x)$ とその零等高面

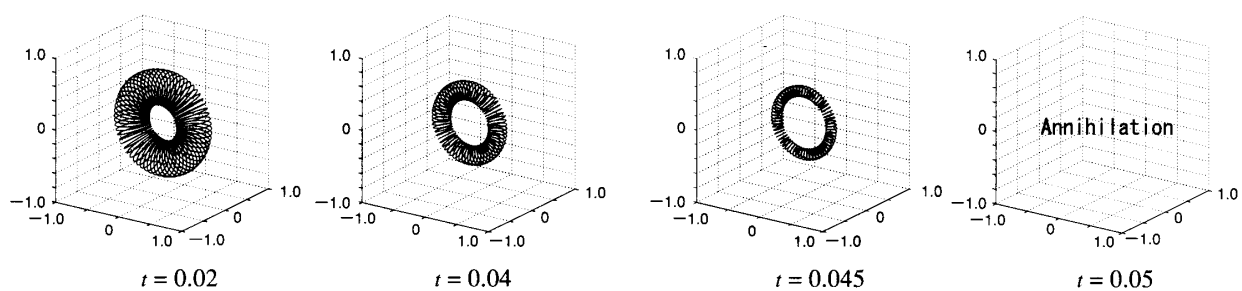


図 10 トーラス II の平均曲率流 (外乱なし)

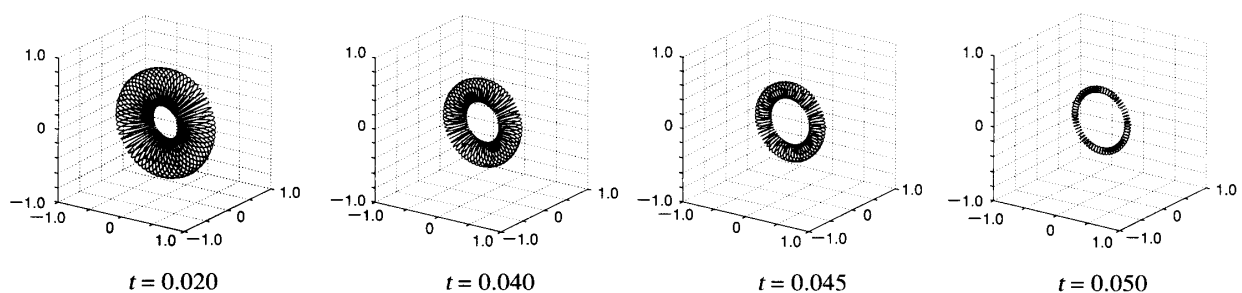


図 11 トーラス II の平均曲率流の見本過程

は外乱の有無にかかわらず、相境界はトーラス型を維持したまま消滅することが分かる。これは中央部の穴の曲率より円環部の断面の曲率がかなり大きいため、中央部の収縮速度より円環部の収縮速度が速いためである。このとき外乱は相境界の消滅時刻に揺らぎを与えるだけで、トーラスを図6のように球状に変化させるだけの影響力はもたない。すなわち、外乱はトーラスIの場合とは異なり、トーラスの位相的性質を変えるほどの影響を持たず、外乱の影響は小さいと考えられる。なお、外乱のある場合には消滅時刻が外乱がない場合より早くなる場合と遅くなる場合があったが、ここでは遅くなる場合だけを示した。

4. 運動の一意性

本節では相境界運動の一意性について考察する。運動の一意性とは $u(t, x)$ の零等高面として定義される相境界 $S(t)$ が2次元の場合には曲線となることを意味する。2次元の場合に $S(t)$ が曲線ではなく、面積をもつ現象は肥満現象^{7, 16~19)}と呼ばれ、上記の意味で運動に一意性がないことを意味する。たとえば、図12に示された8の字型の相境界は肥満現象を起こすことが知られている¹⁸⁾。すなわち、図12の8の字型の相境界を初期値とした平均曲率流方程式の解 $u(t, x)$ は図13(a)のようになり、その零等高面として定義される相境界 $S(t)$ は図13(b)のように曲線ではなく面積をもつため、

無数に相境界が存在することになる。8の字型相境界の平均曲率流で肥満現象が起きるのは以下の理由による。8の字型は図14(a)に示したように左右2つの円状の相境界が接した図形という解釈と図14(b)の中央部が結合した図形という2つの解釈ができる。図14(a), (b)の平均曲率流は異なるため、この両者の平均曲率流を満たすように、図14(c)のような肥満現象が起きると考えられる。

8の字型は中央部に特異点があるため、肥満現象が起きると考えられる。本論文では特異点をもつ初期相境界として8の字型と4つの合同な三角形が頂点で接している2つの場合を考え、外乱が肥満現象に及ぼす影響をシミュレーションにより解析する。

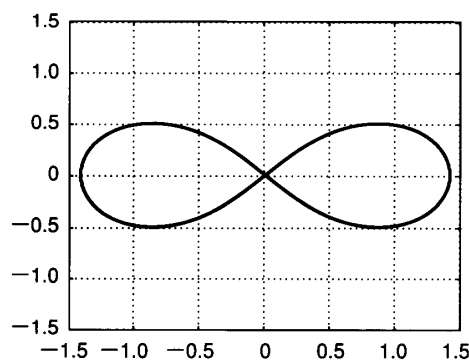
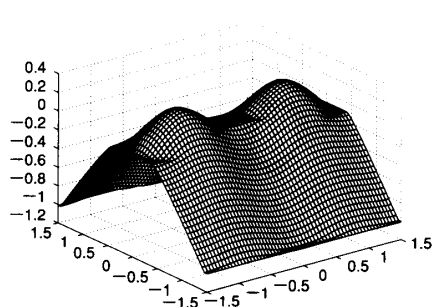
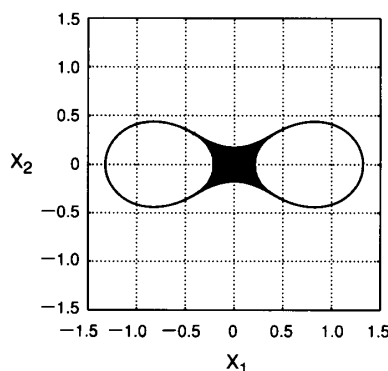


図12 8の字型初期相境界

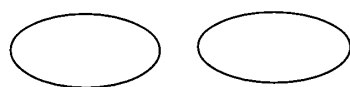


(a) 関数 $u(t, x)$ の輪郭



(b) $u(t, x)$ の零等高面

図13 肥満現象



(a) 2つの円状



(b) 1つの楕円状



(c) (a), (b)の2つを満足

図14 8の字型曲線の解釈と肥満現象

4.1 肥満現象への外乱の影響 I

本節では図12の8の字型相境界の平均曲率流への外乱の影響を考察する。図15は図12の8の字型相境界を零等高面にもつ初期関数 $u_0(x)$ である。図15の初期値のもとで外乱のない場合の図12の平均曲率流のシミュレーション結果が図16である。図16より相境界 $S(t)$ が、面積をもち、肥満現象が起きていることが分かる。図17は同一の初期相境界の外乱下(外乱係数 $b = 0.2$)における相境界の時間的変化である。図17に示されているように外乱下では相境界は曲線であり、肥満現象が起きず、運動が一意に決定している。すなわち、

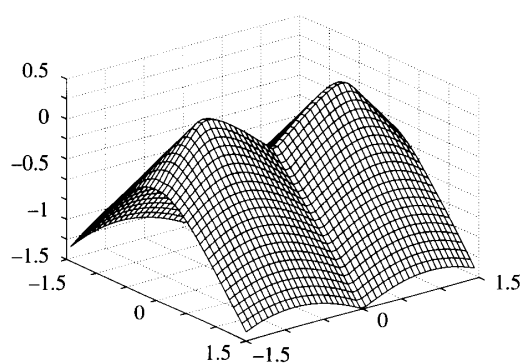


図15 初期関数 $u_0(x)$

外乱は図16のような相境界の集合から一意に相境界を選択する働きをしていることが分かる。図18は図16, 17と同一の初期条件のもとで、外乱係数を $b = 0.05$ とした場合のシミュレーション結果であるが、この場合は図16と同じように相境界が厚みを持ち、肥満現象が起きており、外乱は一意に解を選択できていない。8の字型のシミュレーションでは外乱係数が $b < 0.2$ であれば肥満現象が起きた。

4.2 肥満現象への外乱の影響 II

ここでは、図19(b)のように4つの合同な三角形が頂点で接している図形の平均曲率流への外乱の影響を考察する。図19(a)は図19(b)を零等高面にもつ初期関数 $u_0(x)$ である。図19(a)の初期値のもとで外乱のない場合の図19(b)の平均曲率流のシミュレーション結果が図20である。図20より相境界 $S(t)$ が面積をもち、肥満現象が起きていることが分かる。図21は同一の初期相境界 S_0 の外乱下(外乱係数 $b = 0.3$)における相境界の時間的変化である。図21に示されているように外乱下では相境界は曲線であり、肥満現象が起きず、図17の場合と同じように外乱は図20のような相境界の集合から一意に相境界を選択する働きをしていることが分かる。外乱係数 $b = 0.3$ のときには図21に示されたように外乱は解を一意に選択する働きをしたが、外乱が小

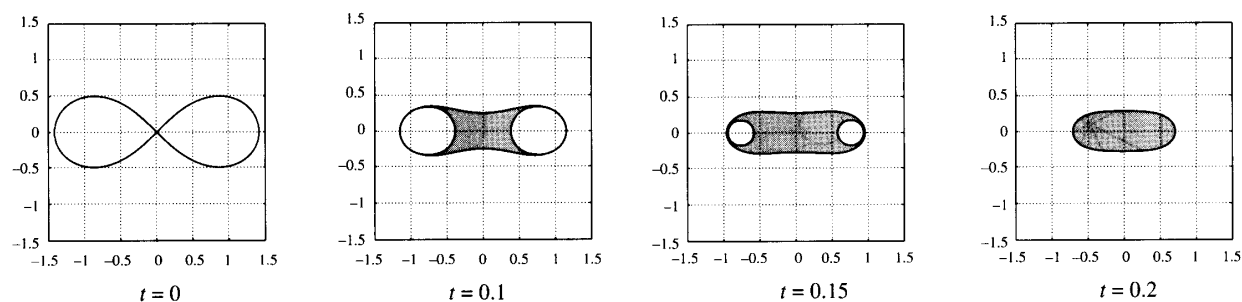


図16 8の字型の外乱がない場合の相境界運動(肥満現象)

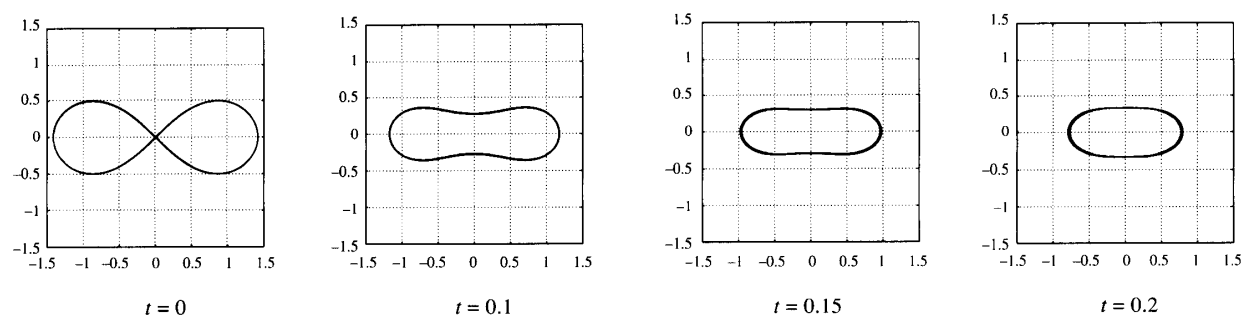


図17 外乱係数 $b = 0.2$ のときの8の字型の相境界運動

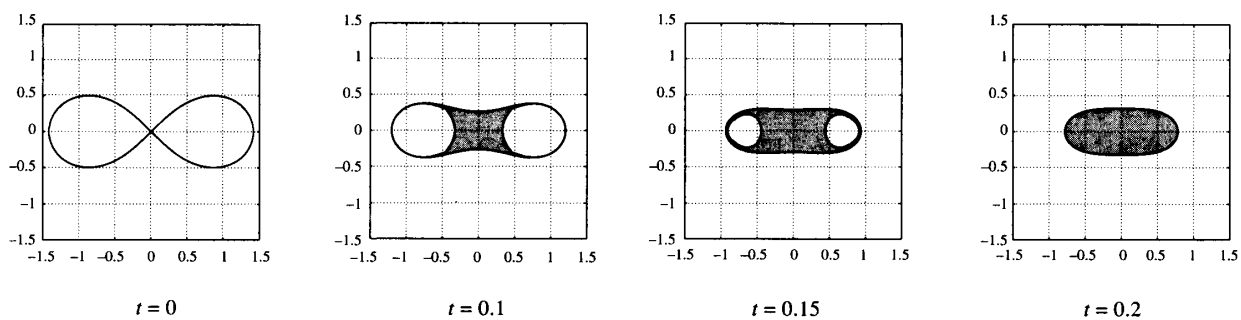
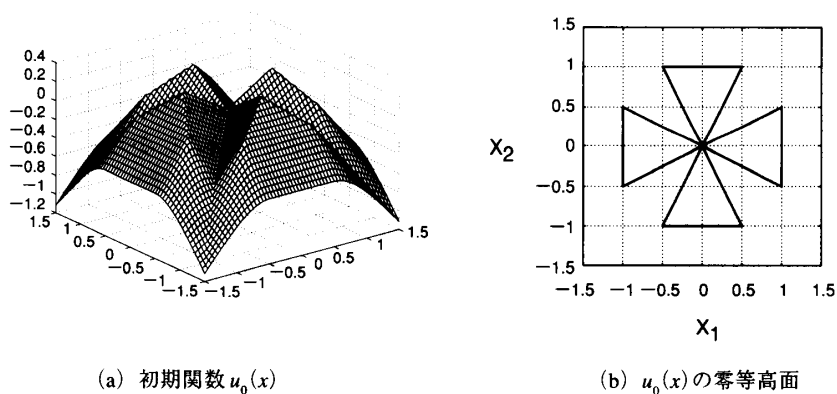
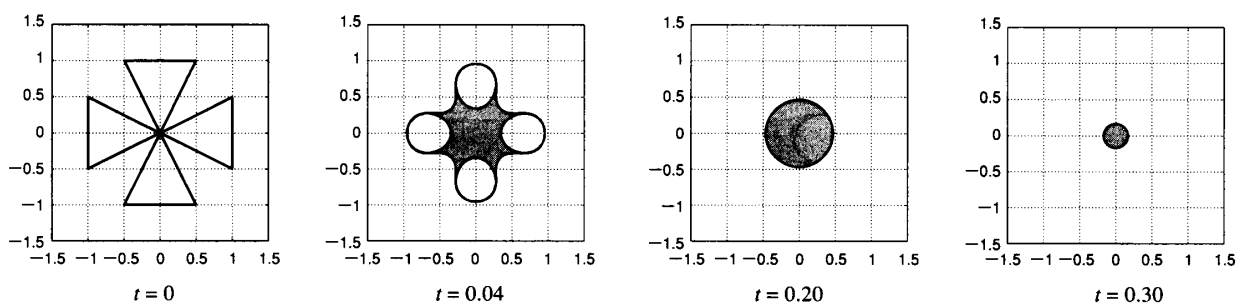
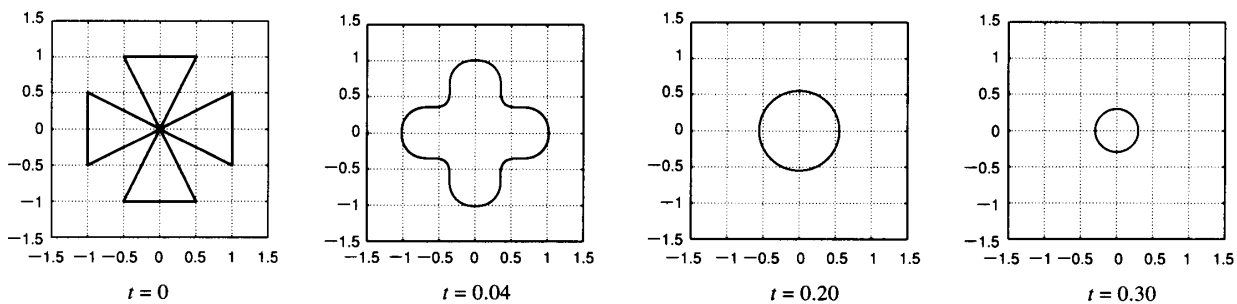
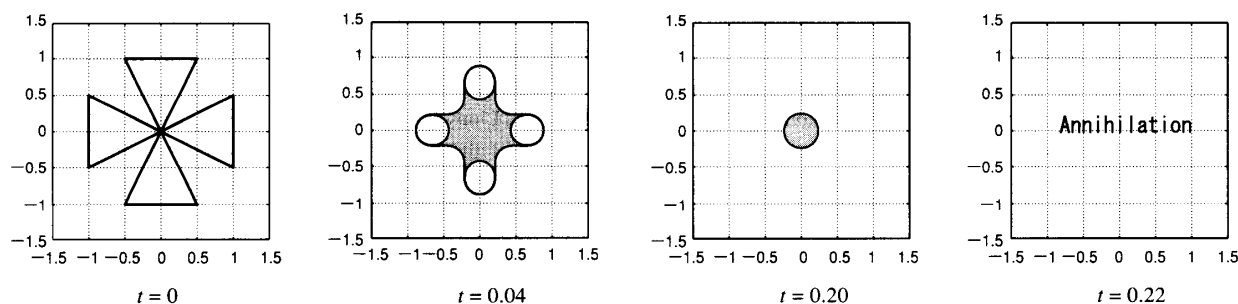
図18 外乱係数 $b=0.05$ のときの8の字型の相境界運動(肥満現象)(a) 初期関数 $u_0(x)$ (b) $u_0(x)$ の零等高面図19 初期値 $u_0(x)$ とその零等高面

図20 外乱がない場合の相境界運動(肥満現象)

図21 外乱係数 $b=0.3$ のときの相境界運動

図22 外乱係数 $b = 0.1$ のときの相境界運動

さすぎると解の一意的選択は行われない。例えば外乱係数を $b = 0.1$ とした場合のシミュレーション結果が図22であるが、この場合は相境界が厚みを持ち、肥満現象が起き、外乱は一意に解を選択できていない。シミュレーションでは外乱係数が $b < 0.3$ であれば肥満現象が起きた。このように外乱が解を一意に選択するためには適度な強度の外乱が必要であることが分かる。外乱が解を一意に選択するために必要な外乱の強度を理論的に求めることは困難であるが、4.1節および4.2節の結果から、相境界が肥満を起こさないために必要な外乱の強度は相境界の初期形状に依存し、8の字型相境界では外乱係数が $b = 0.2$ 、4つの三角形が頂点で接する形状では $b = 0.3$ であれば肥満現象は起きないと考えられる。

理論的証明はまだできていないが、4.1節および4.2節のシミュレーション結果より、外乱によって一意に選択された相境界を $S_{\max}(t)$ とすると $S_{\max}(t)$ は次の意味で最大解であると推測される。

定義 4.1 最大解 $S_{\max}(t)$

$S_{\max}(t)$ と $S(t)$ は式(7)の解 $u(t, x)$ の零等高面とする。すなわち、

$$S_{\max}(t), S(t) \in \{x \mid u(t, x) = 0\}, (t, x) \in \mathbf{R}_+^1 \times \mathbf{R}^2 \quad (14)$$

のとき、次式を満足する相境界 $S_{\max}(t)$ を最大解という。

$$\text{int}(S(t)) \subset \text{int}(S_{\max}(t)), \forall t > 0 \quad (15)$$

5. 結 言

本論文では外乱を考慮した相境界の平均曲率流のモデル化を行った。シミュレーションにより外乱が相境界運動に及ぼす影響を解析した。さらに、運動の一意性がない、いわゆる肥満現象についても提案したモデルを用いてシミュレーションを行い、不規則外乱の肥満現象への影響について考察した。そして、シミュ

レーションによる考察より、以下の結果を得た。

(i) 確率等高面方程式の解の見本過程は一般に異なるため、外乱の強度は同じであっても、相境界挙動に大きな影響を及ぼすことがある。たとえば、円環部の断面直径より中央部の穴の直径の小さなトーラス型相境界の平均曲率流では外乱がなければ中央部が先に消滅し、球状になってから消滅するが、外乱存在下では外乱の影響で中央部が消滅せず、トーラス型を維持したまま消滅することがある。この場合は消滅時刻が他の場合より早くなる。一方、中央部の穴の直径が大きなトーラス型相境界の場合には外乱の有無に関係なく、相境界はトーラス型を維持したまま消滅し、外乱の相境界挙動への影響は少ない。

(ii) 8の字型相境界の平均曲率流のように肥満現象が起き、運動に一意性がなくなる場合がある。そのような場合、外乱は解集合から一意に解を選択する性質をもつことがシミュレーション結果より推測できる。また、外乱が一意に解を選択するためには適度な強度の外乱が必要であり、その強度は相境界の初期形状に依存することも分かった。さらに、外乱によって一意に選択された解は4節で定義した意味で最大解であると思われる。

上記(ii)はシミュレーション結果からの推測であり、その理論的証明が今後の課題として挙げられる。

参 考 文 献

- 1) A. Friedman: Variational principles and free boundary problems, John-Wiley(1982)
- 2) M. M. Anwarbek: The Stefan problem, Walterde Gruyter(1992)
- 3) M. E. Gurtin: Thermomechanics of evolving phase boundaries in the plane, Clarendon Press(1993)
- 4) S. Osher and R. Fedkiw: Level set methods and dynamic implicit surfaces, Applied Mathematical Sciences 153, Springer-Verlag(2003)

- 5) J. A. Sethian: Level set methods and fast marching methods, Cambridge University Press (2002)
- 6) Y-G. Chen, Y. Giga and S. Goto, Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations, *J. Differential Geometry*, **33**, 749/786 (1991)
- 7) L. C. Evans and J. Spruck: Motion of level sets by mean curvature. I, *J. Differential Geometry*, **33**, 635/681 (1991)
- 8) F. Cao: Geometric curve evolution and image processing, Springer Lecture Notes In Mathematics 1805, Springer-Verlag (2003)
- 9) S. Osher and J. Sethian: Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi Formulation, *J. Comp., Phys.*, **79**, 12/49 (1988)
- 10) H. Kunita: Stochastic flows and stochastic differential equations, Cambridge University Press (1990)
- 11) J. L. Lions: Optimal control of systems governed by partial differential equations, Springer-Verlag (1971)
- 12) P. L. Lions and P. E. Souganidis: Uniqueness of weak solutions of fully nonlinear stochastic partial differential equations, *Comptes Rendus-Academiedes Science Paris, SERIEI*, **331**, 783/790 (2000)
- 13) P. L. Lions and P. E. Souganidis: Fully nonlinear stochastic pde with semilinear stochastic dependence Lions, *Comptes Rendus-Academiedes Science Paris, SERIEI*, **331**, 617/624 (2000)
- 14) P. L. Lions and P. E. Souganidis: Fully nonlinear stochastic partial differential equations: non-smooth equations and applications, *Comptes Rendus - Academiedes Science Paris, SERIEI*, **327**, 735/742 (1998)
- 15) P. L. Lions and P. E. Souganidis: Fully nonlinear stochastic partial differential equations, *Comptes Rendus - Academiedes Science Paris, SERIEI*, **326**, 1085/1092 (1998)
- 16) A. Markos, Katsoulakis and Alvin T. Kho, Stochastic curvature flows: asymptotic derivation, level set formulation and numerical experiments. *Interfaces and Free Boundaries*, **3**, 265/290 (2001)
- 17) Nicolas Dirr, Stephan Luckhaus and Matteo Novaga: A stochastic selection principle in case of fattening for curvature flow, *Calculus of Variations*, **13**, 405/425 (2001)
- 18) P. E. Souganidis and N. K. Yip: Uniqueness of motion by mean curvature perturbed by stochastic noise, *Annales de L'institut Henri Poincare*, **21**, 1/23 (2004)
- 19) N. K. Yip: Stochastic Motion by Mean Curvature, *Arch. Rational Mecn. Anal.*, **144**, 313/355 (1998)