

【論 24-19】

論文

最小ノルム法による電場源推定逆解析<sup>†</sup>

武 居 周\*・吉 村 忍\*

**ABSTRACT** Calculation of electric field sources i.e. charge density from locally measured electric fields is essentially reduced into solving an ill posed linear system. In this paper, we evaluate a unique solution in a simple model by means of the minimum norm method, which calculates a unique solution whose norm takes a globally minimum value. However, the solution does not always correspond to a physically existing solution. In the research, we propose a parametric study approach finding the optimal system equation. The approach imposes mathematical strictness into the solution. As a result, we have succeeded in obtaining the optimum solution corresponding to the physically existing source.

## 1. 緒言

科学および工学で扱う問題では、入力を与えてそれに対する応答を求める順方向の問題、つまり順問題を取り扱うことが多い。たとえば、ポアソン方程式で規定される静電場で、電荷密度分布  $\rho$  [C/m<sup>2</sup>] を既知情報として入力したときの応答として電位  $V$  [V] あるいは電場  $E$  [V/m] を計算する問題がある。しかし、入力として常に必要な情報が完全に与えられているとは限らない。電磁場問題では、電子回路から放射される漏洩電磁場の解析がその代表例であり、入力情報となる回路基板上の電磁場源分布を完全に計測することは一般に不可能である。ゆえに、順方向とは逆にその出力である放射電磁場から入力条件である回路基板上あるいは回路素子内部に存在する電磁場源を推定する必要性が生じる。いわゆる逆問題である。

逆問題では、結果から原因を突き止める、あるいは出力より入力を探ろうとするため、順問題にはない不適切性と呼ばれる困難がある。提起された問題の解に対して、(1)解の存在性(existence)、(2)解の一意性(uniqueness)および(3)解の安定性(stability)の3つの要件が満足されているとき、問題は適切(well-posed)である。問題が不適切(ill-posed)であるとは、これらの適切性に関する要件のうち、少なくともひとつが失われていることを意味している。要件(1)の存在性は、例えば

Inverse Analysis for Electric Field Sources Search Using Minimum Norm Method. By Amano Takei and Shinobu Yoshimura (Institute of Environmental Studies, The University of Tokyo).

\* 東京大学大学院新領域創成科学研究科環境学専攻

† 2005年3月11日受付 2005年6月24日再受付

観測結果にノイズが含まれている場合などは必ずしも保証されない。しかし、物理現象においてその原因を同定するような場合、すなわち電磁場強度の測定値から電磁場源分布を計算するような問題では、モデルが正しい限り解が存在することが保証され、その存在性の厳密な証明はできなくても、工学上はそれが障害にならないことも多い。また、ノイズを含む応答にそのまま対応するような解がないときも、それに近い応答に対応するような解を求めることができればそれで足りる<sup>1)</sup>。

本論文では、不適切な線形方程式系に対して解を与える最小ノルム法<sup>2)</sup>の電荷密度分布推定逆解析への適用方法に関して述べる。最小ノルム法は一般化逆行列法の一つであり、その最大の長所は必ず一意的に解が定まる点である。つまり、本手法で定式化を行うことにより要件(2)が満たされる。しかしながら、通常最小ノルム法は要件(1)、(3)を満たさないことが知られている。一般に逆行列型解法では、観測結果にノイズが含まれている場合、解は要件(1)を満たさない。これを克服するためフーリエフィルタ等を用いてノイズの影響を除去する手法がとられるがフィルタの性質上、最小ノルム解の数学的厳密性を損なってしまう。また要件(3)を満足するために、得られた解が不連続点を含む場合がある等、物理的に正しくない解が得られた場合は、何らかの適切化を行う必要がある<sup>3,4)</sup>。

本研究では、電磁場系逆問題の一つである電場源推定逆解析においてこれらの要件(1)~(3)を満足するために、フーリエフィルタ等を用いずにシステム方程式の最適化を行うことにより解を得る改良型最小ノルム

法を新たに提案し、解の性質、実問題への適用に関して報告する。

## 2. 最小ノルム法の原理

最小ノルム法とは、解ベクトルのノルムを最小とする拘束条件のもとに、無数に存在する解の中から解ベクトルを特定する手法である。ここでは、式(1)のような1つの方程式から3つの未知数を計算する問題を考える。求める解は $x_1, x_2, x_3$ であり、式(1)の平面上が解空間となる。

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$$

$$(a \ b \ c) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (d) \quad (1)$$

または

$$\mathbf{CX} = \mathbf{Y}$$

最小ノルム解は図1に示す解平面上で最も原点から距離 $L$ が短い解、 $x_{1\min}, x_{2\min}, x_{3\min}$ を式(1)の解とする。その距離 $L$ は

$$L = \|\mathbf{X}\| = \sqrt{x_{1\min}^2 + x_{2\min}^2 + x_{3\min}^2} \quad (2)$$

となる。式(2)が成立する解、すなわち解ベクトル $\mathbf{X}$ のノルムが最小になる解は、原点を通り式(1)の平面と垂直に交わる直線との交点の座標に他ならない。この直線の方程式は、

$$\frac{x_1}{a} = \frac{x_2}{b} = \frac{x_3}{c} \quad (3)$$

である。したがって、式(1)と式(3)により最小ノルム解式(4)が与えられる。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \left( (a \ b \ c) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right)^{-1} (d) \quad (4)$$

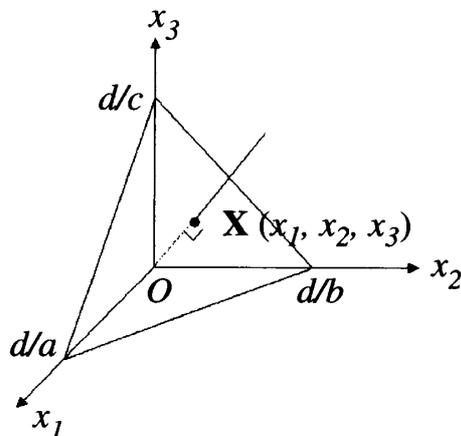


図1 Sketch of solution space.

または

$$\mathbf{X} = \mathbf{C}^T (\mathbf{C}\mathbf{C}^T)^{-1} \mathbf{Y}$$

また、式(4)は解ベクトル $\mathbf{X}$ が4次の場合も3次の場合と同様に成り立ち、さらに解ベクトル $\mathbf{X}$ が $n$ 次の場合でもこの問題の自然な拡張により適用することができる。

## 3. 一次元場問題による原理検証

### 3.1 モデリングと定式化

図2に計算モデルの概略を示す。電荷は推定面メッシュの中心に位置し、その大きさは電荷密度とメッシュの微小面積との積で与えられる。電場強度の測定点は測定面メッシュの中心に位置する。電荷密度分布推定面と電場強度測定面それぞれの長さを1[m]とする。さらに、測定点個数は $n$ 、推定面の分割個数は $m$ であり、測定面と対象面間の距離を $zOff$ とする。問題に対するシステム方程式は式(5)で与えられる。 $x_m$ は解像度 $m$ の解ベクトルであり、 $y_n$ が測定点数 $n$ の入力ベクトル、 $G_{nm}$ が離散化されたグリーン関数である。本問題ではグリーン関数は式(6)で与えられることが知られており、これによりシステム行列が決定する。本式中の $r(x, zOff)$ は測定点位置と推定面上の電荷密度の存在する点との距離であり、両者の $x$ 方向の距離 $x$ および $zOff$ の関数となっている。最小ノルム法による解は式(7)で与えられる。最小ノルム法は、一般的に必ず解が得られる点や空間に蓄えられるエネルギーを最小とする拘束条件を自動的に満足する等の長所を有するものの、測定ノイズや解の空間解像度によっては不適切な解を算出する場合があります。前章で述べた要件(3)を必ずしも満たさないことが知られている。

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1m} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1} & G_{n2} & \cdots & G_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad (5)$$

$m > n$

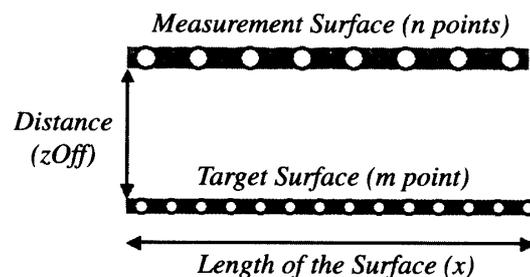


図2 Model Description.

または

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X}$$

$$G_{nm} \propto \frac{1}{r(x, zOff)^2} \quad (6)$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{C}^T (\mathbf{C}\mathbf{C}^T)^{-1} \mathbf{Y} \quad (7)$$

### 3.2 解析

図3に原理検証用に定義した正解の電荷密度分布を示す。横軸が電荷分布の存在する位置、縦軸が電荷密度分布強度を表わす。この正解から式(6)の関係より測定面に与える電場強度分布を計算した結果を図4に示す。

式(7)より計算される最小ノルム解を図5に示す。解が振動しており明らかに物理的に正しくない。最小ノルム解と正解との間の誤差分布をフーリエ空間で評価

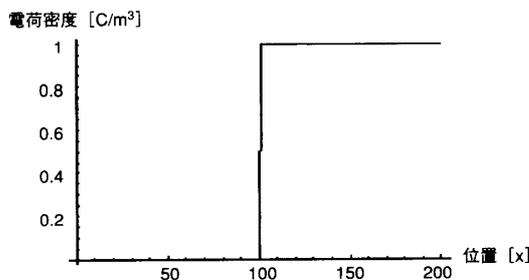


図3 Distribution of model field source.

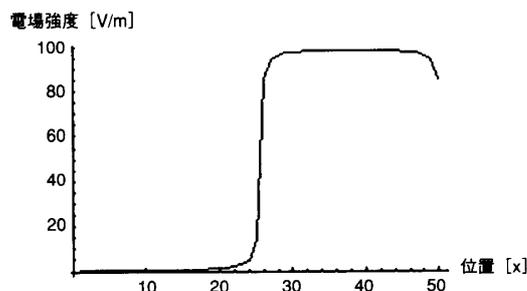


図4 Measured field intensity.

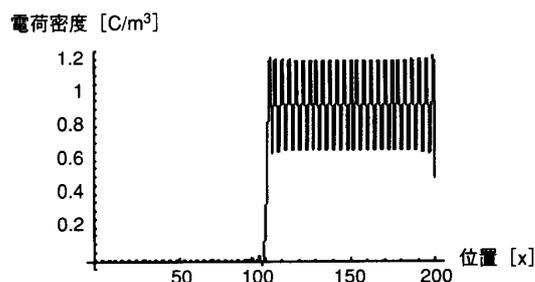


図5 Minimum norm solution.

するために誤差分布のフーリエ係数のプロットを図6に示す。誤差は解ベクトルのフーリエ級数第40項～60項の範囲で顕著である。

次に要件(3)を満たすために解の最適化を考える。

### 3.3 解の最適化

最小ノルム法は必ずしも要件(3)を満たさないがモデリングの性質上、要件(1)は満たすと考えてよい。物理的な解を与える条件をシステム方程式を変更することにより得ることを考える。最小ノルム解は式(7)からも判るとおり、システム行列Cの構成要素の大きさに依存する。よって、電荷密度分布が存在する面と測定面との距離zOffを変更して、要件(3)を満たす解を得ることを考える。

zOffを1cmから7cmまで0.5cm間隔で変更し、正解 $\mathbf{X}_{Org}$ と最小ノルム解 $\mathbf{X}$ の解ベクトルパターンの一致度を式(8)に基づきフーリエ空間で相関を取り評価する<sup>5)</sup>。図7にパターン一致度の遷移をプロットしたものを示す。これより最適な一致度を与えるzOff<sub>max</sub>が存在することが判る。このとき相関の最大値はmaxP = 0.9985であり図3で示した正解と最小ノルム解が99%以上一致している。そのときの測定面高さはzOff<sub>max</sub> = 1.5 [cm]である。

$$\max P = \frac{\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}_{Org}}{|\mathbf{X}| |\mathbf{X}_{Org}|} \quad (8)$$

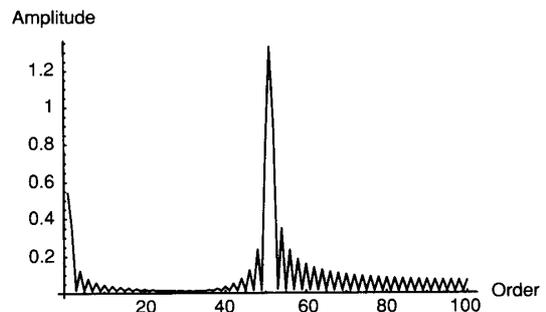


図6 Fourier spectrum of the error in Fig. 5.

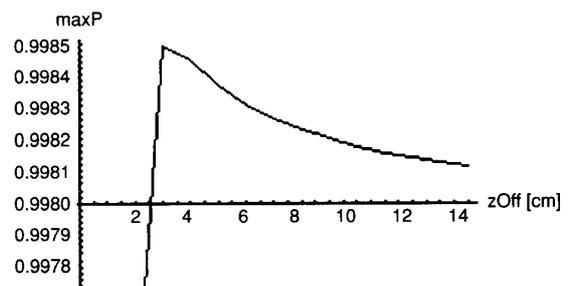


図7 Correlative coefficient vs. zOff.

次にこの $zOff_{max}$ を式(6)に代入することにより、システム方程式の最適化を行う。得られた最小ノルム解と正解を重ねてプロットしたものを図8に示す。図5の解と比較して最適解は明らかに正解に近づいている。最適解と正解間の誤差波形のフーリエ係数を図9に示す。誤差は全周波数帯域に渡り分布しているが、図6に示した最適化前の誤差波形と比較して誤差波形の振幅の最大値が1/10以下に低減された。以上より、システムの最適化により最小ノルム解は数理的に改善されたことが判明した。

### 3.4 測定値にノイズが混入している場合

次に、前節よりもさらに実際の測定条件に近い問題設定に変更する。一般に測定値には少なからずノイズが含まれる。ノイズを含む応答に対応する解を得るために、要件(1)を満たすよう再びシステム方程式を変更する。

図3で示した正解によって測定面に与えられる電場強度の10%を最大振幅とするノイズ信号より誘起される電場強度を仮定する。この電場強度から最適化したシステム方程式によって最小ノルム解を計算した結果を図10に示し、得られた最小ノルム解のフーリエスペクトラムを図11に示す。第40次までの基本波に近い周波数帯域で誤差をかなり含んでいるため、従来のフィルター法で完全にノイズの影響を除くことは困難であると考えられる。

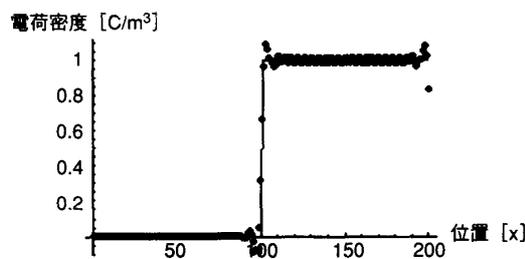


図8 Solid and dotted lines show the exact and computed solutions, respectively.

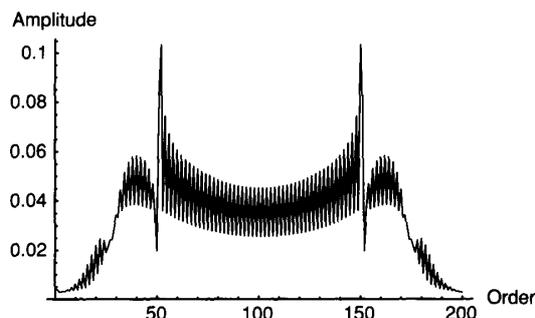


図9 Fourier spectrum of the error in Fig. 8.

正解による本来の電場強度とノイズ信号が誘起する電場強度を足し合わせたものから最適化したシステムによる最小ノルム解を計算した結果を図12に示し、正解と最小ノルム解間の誤差のフーリエ係数を図13に示す。ノイズの影響が顕著であり、誤差は全空間周波数帯域に分布している。従来のフィルター法により解の改善を試みる<sup>6)</sup>。図13のフーリエ係数を第10次まで用いて解を構成する。またフーリエ係数第11次以降は0とし強制的にフーリエ係数を収束させた。これにより得られた解、および誤差のフーリエ係数をそれぞれ図14、15に示す。図15より解の全周波数帯域に誤差が分布していることが判る。そのピーク値は0.3であり、フィルター処理前と比較して解はほとんど改善されていないことが判明した。

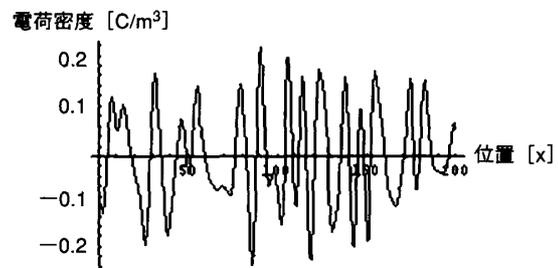


図10 Field source evaluated in the case of having 10% random noise.

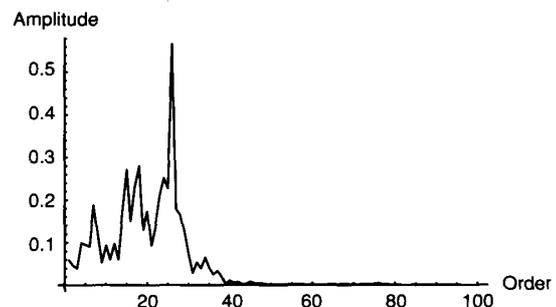


図11 Fourier spectrum of the field source shown in Fig. 10.

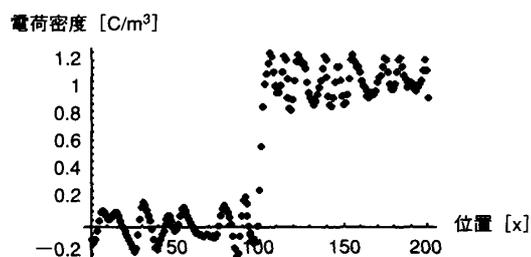


図12 Minimum norm solution from the noisy field.

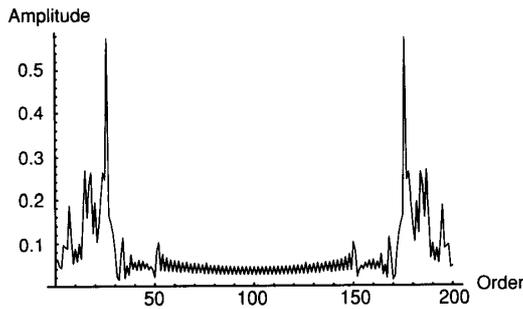


図 13 Fourier spectrum of the error in Fig. 12.

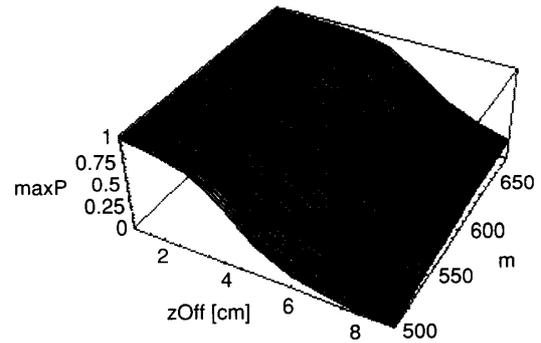


図 16 Correlative coefficient vs.  $zOff$  and  $m$ .

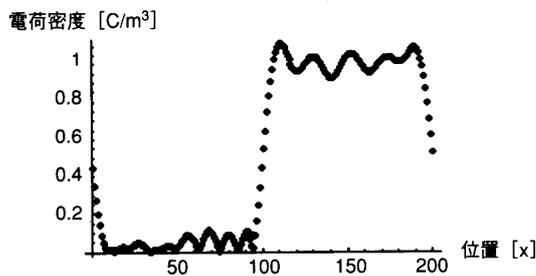


図 14 Filtered solution by means of the Fourier analysis.

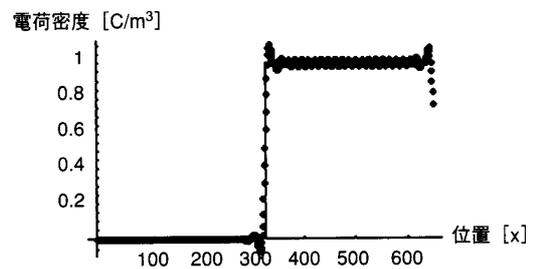


図 17 Solid and dotted lines show the exact and computed solution, respectively.

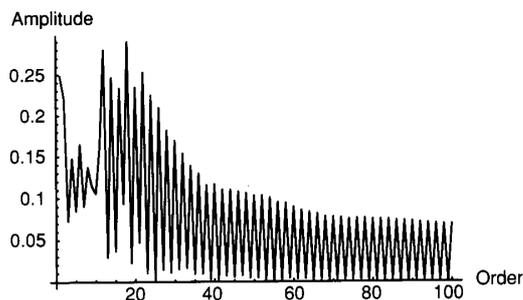


図 15 Fourier spectrum of the error in Fig. 14.

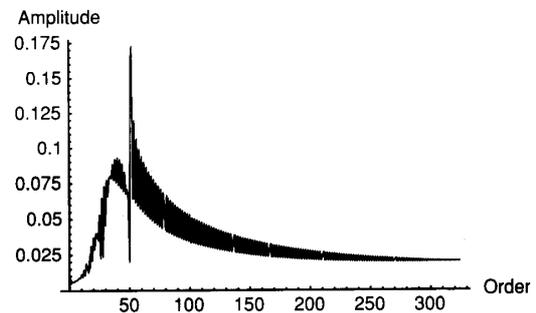


図 18 Fourier spectrum of the computed solution.

### 3.5 解像度の変更

次に  $zOff$  と解の解像度  $m$  をパラメータとして、システム方程式を変更することを考える。システム行列  $C$  のランクが  $n$  以上と仮定した場合、解ベクトル  $\mathbf{X}$  のうち、入力ベクトル  $\mathbf{Y}$  と同次元数だけ決めれば、残りは従属して決まる。また、最小ノルム法の性質上、解は計算モデル系に蓄えられるエネルギーを最小として計算される。その最小のエネルギーを蓄えることのできる解の解像度を用意することが必要である。よって、最適な  $m$  は測定点数  $n$  や測定面と電荷密度分布推定面との距離  $zOff$  等、系のモデリングに依存する。

$n$  は測定系の空間分解能で決まり、これを越えた測定は不可能であるため、パラメータとして変更しない。

よって、要件(3)を満たす収束解を算出するために、解の解像度  $m$  と測定面高さ  $zOff$  をパラメータとして最適解を与えるシステム方程式を決定する。最適解を与える  $m_{max}$  と  $zOff_{max}$  を計算する過程を図 16 に示す。この計算結果より、相関の最大値は  $maxP = 0.9968$  となり、このときのパラメータの値は、それぞれ  $m_{max} = 649$ 、 $zOff_{max} = 1.5$  [cm] である。

これらの値を用いて最小ノルム解を計算した結果を図 17 に示す。今回得られた解は図 14 で示した解と比較して振動が殆ど見受けられず明らかに改善されており、要件(3)を十分満たした計算結果であると考えられる。その誤差ベクトルのフーリエ係数を図 18 に示す。誤差ベクトルのフーリエ係数のピーク値は 0.175 であ

りかつ高次数で収束しており，解は本質的に改善されたと考えてよい。

以上より，本問題において最小ノルム法を逆解析に適用するには解の解像度 $m$ と測定面高さ $zOff$ をパラメータとして得られた最適値を用いてシステム方程式を変更して要件(3)を満たす最小ノルム解を得る方法が有効であることが判明した。

## 4. 実験による検証

### 4.1 実験モデル

前章で述べた手法の有用性を実験と比較することにより検証する。実験には図19に示す装置を用い，実験装置近傍で測定された電場強度からアルミ棒上の電荷密度分布を推定する問題を考える。装置全体の模式図及び等価回路を図20，21に示す。電場測定点の個数はプローブの空間分解能を勘案して決定した。

実験装置は3本のアルミ棒を平行に並べてありそのアルミ棒間に高周波電圧が印加されている。電荷密度分布の推定領域の上部に電場強度測定面を設けてあり，各測定点で得られた電場強度から各アルミ棒上の電荷密度分布を推定する。

### 4.2 電場測定プローブ

電場測定にはEMCO社製の球状プローブ(Model Number 904)を用いた。図22はプローブの外観である。

このプローブはセンサー外形が球状であり，測定空間中で磁場による誘導電流が生じない。このためセンシング部分に誘起する電圧から電場のみを測定することが可能である<sup>7)</sup>。

### 4.3 最適化パラメータの計算

実験により得られた電場強度測定値を入力として電荷密度分布推定を行う。それに先立ち，計算する最小ノルム解が要件(3)を満たすよう本実験モデルにおいてシステム方程式の最適化を行った。

電荷密度推定面と電場強度測定面それぞれの $x, y$ 方向の長さを0.5 [m]とする。さらに，測定点個数は $n=9 \times 9$ ，ターゲットの分割個数は $m=m_x \times m_y$ であり，測定面と対象面間の距離を $zOff$ とする。

本計算モデルにおいて考えられる最大の空間変化率を持つ仮想解，すなわち測定点個数と同じ次数のフーリエ係数で構成される電荷密度分布を仮定し，測定面高さ $zOff$ および解像度 $m$ をパラメータとし，仮想解 $\mathbf{X}_{Org}$ と最小ノルム解 $\mathbf{X}$ の相関度 $\max P$ を式(8)により計算する。その計算結果より，最小ノルム解が要件(3)を満たす解となるシステム方程式を得る。なお，計算する際に電場強度分布には実験系における測定ノイズを想定して強度の10%のランダムノイズを重畳させた。仮定したパラメータ算出用の仮想解を図23に示す。

図24は最適パラメータ計算過程のプロットである。

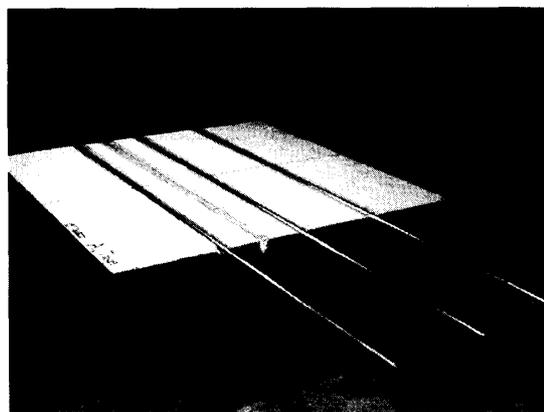


図19 Experimental setup.

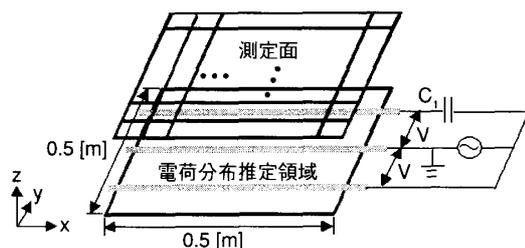


図20 Schematic view of the arrangement.

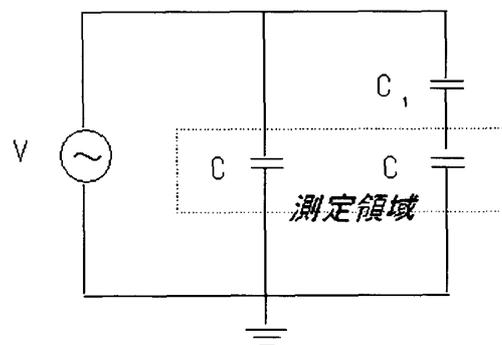


図21 Equivalent circuit.



図22 Probe for electric field measurement.

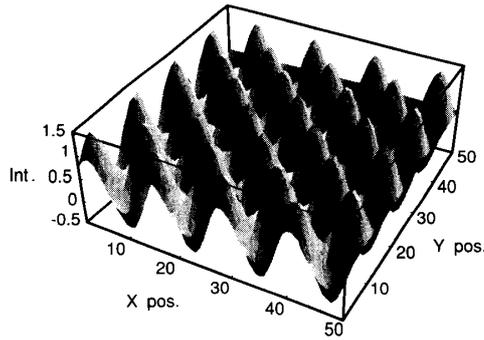


図23 Model charge density.

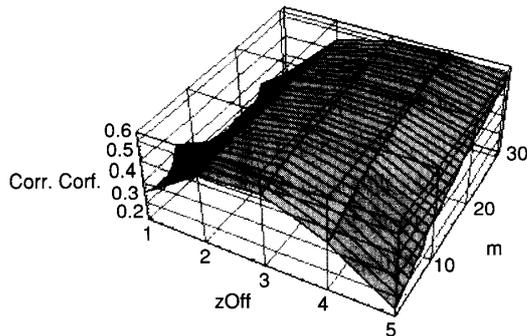


図24 Correlative coefficient vs. zOff and m.

この計算から最適な値は  $zOff_{max} = 3.5$  [cm],  $m_{xmax} = m_{ymax} = 60$  と算出された。この結果を用いてシステム方程式の最適化を行った。

#### 4.4 電荷密度分布推定計算

図25に電場強度測定面で測定した電場強度分布を示す。計測誤差によりピーク値が不均一である。この測定結果から、最小ノルム法によりアルミ棒上の電荷密度分布を推定する。

図26に電荷密度分布推定解を示す。得られた結果は、最大値で正規化して相対的な評価にとどめているが、アルミ棒上の電荷密度分布の位置を把握することができる。また、計測誤差の影響によりアルミ棒上の電荷密度分布が不均一に算出されているが、図5のような非物理解は含まれておらず、得られた解は要件(3)を満たしていると考えられる。以上の結果から、本手法は本実験で用いたようなモデルに対して数的に正しい解を与えることができ、有効な電場源推定逆解析手法であることが示された。

## 5. 結言

本論文では、不適切な線形方程式系に対して解を与える最小ノルム法の密度分布推定逆解析への適用法を提案した。最小ノルム法は、解の安定性を満たすよう

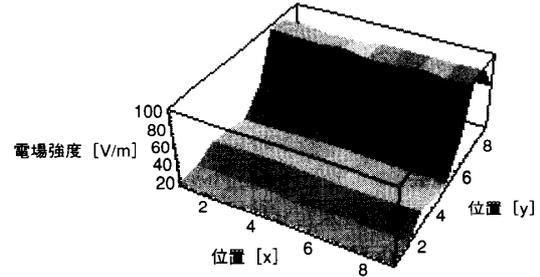


図25 Measurement field intensity.

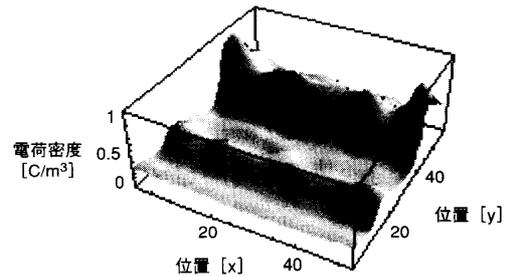


図26 Minimum norm solution.

な解を計算するようにシステム方程式を最適化することにより逆解析へ適用可能であることを示した。また、ノイズ対処法に関しても従来のフィルター法と比較して解が改善されることが示された。本手法は実験値に対しても数的に正しい解を与え、克服すべき要件、解の存在性、解の一意性および解の安定性を満足する有効な電場源推定逆解析法であることが判明した。また、実験環境改善等による実験検証精度向上が今後の課題である。

#### 参考文献

- 1) 久保司郎著：逆問題，培風館（1992）
- 2) G. ストラング著，山口昌哉，井上昭 訳：線形代数とその応用，産業図書（1989）
- 3) T. Katila: Electromagnetics in Materials, J. Apply. Phys., 179/187(1990)
- 4) J. Z. Wang et al.: IEEE Trans. Biomedical Engineering, BME-39-7(1992)
- 5) A. Takei et al.: Optimal Sensor Layout for Minimum Norm Approach to Searching for the Radioactive Sources, Inverse Problems in Engineering Mechnics, M. Tanaka and GS. Dulikravich Eds., Elsevier Publishing, 503/508(1998)
- 6) A. Takei et al.: A Weighted Inverse Matrix Approach to Searching for the Electric Field Sources, IEEE Trans. Magnetics, 36-64, 1031/1034(2000)
- 7) MODEL 7405 NEAR-FIELD PROBE SET USER'S MANUAL, The Electro-Mechanics Company (EMCO™)