

限定記号消去法に基づくロバスト制御系設計ツール[†]

穴 井 宏 和*・原 辰 次**

ABSTRACT For multi-objective design and robust control synthesis problems, several methods based on Quantifier Elimination (QE) have been proposed. QE based methods are really suitable for such problems but, in general, they have a drawback on computational complexity. In this paper, we propose an efficient symbolic method for parameter space approach based on sign definite condition (SDC) by a special quantifier elimination method using Sturm-Habicht sequence. Then we examine its feasibility, in particular, for multi-objective control using low degree fixed-structure controller by showing the several experimental results. Moreover, we provide our new MATLAB toolbox for robust parametric control design based on the QE-based method.

1. はじめに

ロバスト制御系設計や複数の仕様を同時に満たす設計 (Multi-objective design) に対して, パラメータ空間法による設計法は最も有効な方法の一つとして知られている^{1, 26)}. パラメータ空間法に必要な与えられた制御仕様を満足する設計パラメータの実行可能領域を抽出する方法として, 代数的算法である限定記号消去 (quantifier elimination: QE) が有効である. 既存の数値的方法では, パラメータ値を適当な領域でスイープして繰り返し数値計算を行うことになるが, QE によれば直接に実行可能領域 (一般に非凸領域) を式として (正確に) 求めることができる.

近年, QE に基づくパラメータ空間アプローチがいくつか提案された^{2, 15, 20, 24)}. 例えば, Dorato らは, ロバスト設計問題 (複数仕様の場合も含む) が QE の問題に帰着でき, QEPCAD¹ を用いて実際に解けることを示した¹⁵⁾. また, Jirstrand は線形時不変系のフィードバック設計問題において, ロバスト性の仕様 (H_∞ ノルム制約, 安定余裕, 極配置など) が QE の問題に帰着できることを示し, QEPCAD を使っていくつかの例を解いた²⁰⁾. これらの QE に基づく方法に共通する基本的な手順は, ロバスト制御系設計の問題を, まず一階述

語論理式 (first-order formulas) として帰着し, QE を適用して所望の設計パラメータの可能領域を求めることである. これらの例が示すとおり, QE はこの種の問題について非常に有効である. しかしながら, これら単に QE を用いたアプローチでは, QE の基礎となる CAD アルゴリズムの計算量が一階述語論理式に現れる変数の数について 2 重指数的であるため, 実用的な時間で解ける問題の規模は非常に小さいものであった (通常 2 次, 特別な場合でも高々 3 次までのシステム).

QE に基づくパラメータ空間法によって実用的な時間で実用的な規模の設計問題を解くことを実現するためには, 制御系設計の問題を, いかに関 QE の問題として簡単な形に帰着させるか, またその QE 問題の構造の特殊性を利用し特化した効率的な QE アルゴリズムを利用することがポイントとなる²⁸⁾. 本稿では, まず QE について簡単に説明 (第 2 章) した後, ロバスト制御理論においてしばしば用いられる重要な設計仕様が, Sign definite condition (以後 SDC) と呼ぶある特別なクラスの一階述語論理式に帰着できることに着目して (第 3 章), その特別なクラスの入力式に対して, より効率的な QE のアルゴリズムを適用することで実用性を達成できることを示す (第 4 章). 実際その計算複雑度は 2 重ではなく 1 重指数的であり 10 次から 15 次程度の実用的な次数のシステムまで計算が可能である (第 5 章). また, この特別なクラスの式に対する QE を用いた制御系設計法に基づいたロバスト制御系設計ツールにつ

Parametric Robust Control Toolbox by Quantifier Elimination.
By Hirokazu Anai (Fujitsu Laboratory Ltd.) and Shinji Hara (The University of Tokyo).

* (株)富士通研究所

** 東京大学

† 2004 年 12 月 24 日受付 2005 年 6 月 30 日再受付

1 Cylindrical Algebraic Decomposition (CAD) アルゴリズムに基づく QE のソフトウェア¹¹⁾.

いて紹介する(第6章)。

2. 限定記号消去(QE)

ここでは本稿で用いる代数的算法である QE について簡単に説明する(詳細は^{8,9)}を参照)。QE は述語論理(predicate logic)の一階述語論理(first-order theory)において現われ、扱う対象(入力)となるのは、一階述語論理式(first-order formula)である。一階述語論理式とは、代数方程式、不等式、限定記号($\forall, \exists$)、そしてブール演算($\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ etc)からなる式のことである: 実数体 $\mathbb{R}$ を係数体とする変数 $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ と $U = \{u_1, \dots, u_m\}$ についての多項式の集合を $\mathbb{R}[X, U]$ とする。ここで、 X を限定記号付き変数で、 U は限定記号の付かない変数とする。 $f_i(X, U) \in \mathbb{R}[X, U]$, $i = 1, 2, \dots, t$, とする。 $F_i = f_i(X, U) \rho_i$ 0 を原子式(atomic formula)という。ここで、 $\rho_i \in \{=, \geq, >, \neq\}$ である。 $Q_j \in \{\forall, \exists\}$ とし X_j は q_j 個の限定記号付き変数($j = 1, \dots, s$)のブロックとする。このとき、一階述語論理式 ϕ は

$$\phi = (Q_1 X_1 \dots Q_s X_s) G(F_1, \dots, F_t)$$

で与えられる。ここで G は限定記号無しのブール式で $G(F_1, \dots, F_t)$ を式(formula)と呼ぶ。一言でいうと、「QE は与えられた一階述語論理式に対し、その式と等価で限定記号を含まない式を導く算法」である。QE によって、 ϕ の限定記号と限定記号の付いていた変数 X は消去され、限定記号の付いていない変数 U についての式 $\Phi(U)$ が得られる。 $\Phi(U)$ は、入力の一階述語論理式が真であるための変数 U の実行可能な領域を示している。もし、変数 U の実行可能な領域がない場合 QE は偽(false)を返す。この問題を一般限定記号消去問題(general QE problem)という。例えば、入力 $\forall x(x^2 + bx + c > 0)$ に対して、QE により($\mathbb{R}$ 上)等価な限定記号の無い式 $b^2 - 4c < 0$ が導かれる。また、入力となる一階述語論理式の変数のすべてに限定記号が付いている場合(i.e. $m = 0$)、すべての変数が消去され QE は与えられた一階述語論理式の真(true)あるいは偽(false)を返す。この問題を決定問題(decision problem)という。

QE は、制約問題の代数的な解法の一つであり、パラメータを含む変数多項式不等式系(Multivariate Polynomial Inequalities; MPIs)で記述される問題(等式も許す)に適用可能で、(1)一つの実行可能解だけでなく実行可能領域を(正確に)求めることができる、(2)非凸な最適化問題も扱うことができる、そして(3)MPIsの実行可能性も正確に判定できる、といった利点をもつ。

QE の基礎となるアルゴリズムとして、1975 年に G.

E. Collins が CAD(Cylindrical Algebraic Decomposition)法に基づく QE のアルゴリズム¹⁰⁾を提示した。CAD に基づく QE アルゴリズムの計算量は、本質的に変数の数について指数的であることが知られている¹²⁾。このため、実効的な効率化として、有意なサブクラスの問題を対象にしたより高速なアルゴリズムが提案されてきた。例えば、V. Weispfenning²³⁾らによる低次数(1 or 2 次)の一階述語論理式に対する QE アルゴリズムや、L. González-Vega¹⁷⁾らによる一変数多項式の正定条件 $\forall x f(x) > 0$, ($f(x) \in \mathbb{R}[x]$)に対する QE アルゴリズムなどである。これらの効率的な特別なクラスの入力式に対する QE アルゴリズムの開発やソフトウェアとしての実装が同時に進展してきたことが、近年のシステム・制御理論の分野への QE 応用の研究の隆盛の背景となっている。

3. 特別なクラスの QE アルゴリズムに基づくロバスト制御系設計法

3.1 ロバスト制御系設計と SDC

QE に基づくパラメータ空間法による設計法は、ロバスト制御系設計や複数の仕様を同時に満たす設計に対して、非常に有効である^{2, 15, 20, 24)}。しかし、実用的な規模の問題に適用するためには、その計算効率の改良が不可欠である。

一般に、QE に基づく方法は制御の問題を一階述語論理式に帰着させる部分と、得られた式を QE によって解く部分からなる。ここでは、QE の問題としてより簡単な式へ定式化し、その式に特化した効率的 QE アルゴリズムの適用をうまく組み合わせることで効率化を実現する^{3, 4)}。

Sign Definite Condition そのような式として、1 変数多項式の正の定義域における正定性条件:

$$\forall x > 0, f(x) > 0 \quad (1)$$

に着目する。ここで、 $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ であり一般に $f(x)$ の係数に設計パラメータが含まれる。これを sign definite condition (以後 SDC) と呼ぶ。有限区間での正定性を以下で定義する。

定義 1. $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, $a < b (\in \mathbb{R})$ とする。区間 $[a, b]$ において $f(x)$ の符号が変わらない、または、 $f(x)$ が $[a, b]$ において零と交差しないとき、 $f(x)$ は $x \in [a, b]$ において定符号(sign definite)といい、 $f(x) \in \mathbf{N}_0[a, b]$ と書く。

条件 $f(x) \in \mathbf{N}_0[a, b]$ は双線形変換(bilinear transformation) $z = \frac{x-a}{x-b}$ により $f(z) \in \mathbf{N}_0[0, +\infty]$ へ変換できる。

よって、以後一般性を失うことなく任意の有限区間における定符号条件も SDC として考える²。

ロバストコントローラ設計と SDC SDC を用いた手法によってどのような制御系設計問題が解決できるか説明する。ロバスト性の指標としてしばしば用いられる非常に多くの設計仕様、例えば

- H_∞ ノルム制約, 周波数限定ノルム制約
- 安定余裕, 安定半径
- 極配置

は, 簡単な記号計算により軽微な計算コストで, すべて SDC に帰着できる。ただし, 帰着の手順は仕様ごとに異なる。例えば, H_∞ ノルム制約の場合の帰着法は例 1 のとおりである。その他については参考文献^{5, 19, 21, 22)}を参照されたい。以下の例にあるように, SDC の多項式 $f(x)$ の係数にコントローラのパラメータが現れており, QE を適用することで x が消去されコントローラのパラメータについての可能領域を示す式が, 不等式や等式のブールの組合せすなわち半代数的集合 (semi-algebraic set) として得られる。ここで注目すべきは, 一般に可能領域は非凸領域であるが QE により半代数的集合として正確に得られる点である。例えば, 図 2 の斜線で示された可能領域は非凸領域である。

多くのロバスト制御系設計問題が SDC に帰着されることで, さまざまな設計問題の統一的な扱いも可能となり, かつ SDC は非常に簡単な構造をした式であることにより, 効率のよい QE アルゴリズムを利用することが可能となる。SDC に対しては, §4 で述べる Sturm-Habicht 列を用いた効率的な QE アルゴリズム³⁾を適用可能である。これにより, SDC と特別なクラスの QE の組み合わせにより効率的な QE に基づくロバスト制御系設計法が実現できる。

3.2 設計例

例題 1 (H_∞ ノルム制約)。真にプロパーな伝達関数 $G(s) = n(s)/d(s)$ に対して $\|G(s)\|_\infty := \sup_\omega |G(j\omega)| < 1$ という H_∞ ノルム制約を考える。これは

$$d(j\omega)d(-j\omega) > n(j\omega)n(-j\omega); \forall \omega.$$

に等価であり, 以下のような $f(\omega^2)$

$$f(\omega^2) = d(j\omega)d(-j\omega) - n(j\omega)n(-j\omega) > 0$$

を構成できるので, $x = \omega^2$ とすることにより SDC(1) に帰着できる。

また, 安定な真にプロパーな n 次の伝達関数 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ が $\|G(s)\|_\infty < 1$ を満たすための必要十分

² 正確には $f(x) \in \mathbb{N}_0[0, +\infty]$ かつ $f(x) > 0$ の場合が SDC(1) である。

条件は, ハミルトン行列

$$H = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C^T & -A^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B^T \end{bmatrix}$$

が虚軸上に固有値を持たないことである。ハミルトン行列の特性多項式には奇数次の項が現れないことが知られており, この条件は,

$$g(s^2) = |sI - H| = \sum_{i=1}^n g_i s^{2i}$$

が純虚数 ($s = j\omega$) と原点 ($s = 0$) に解をもたないことに等しい。ここで, $g_n = 1$ に注意しておく。今 $x = -s^2 (= \omega^2 \geq 0)$ とおき

$$f(x) = (-1)^n \sum_{i=0}^n g_i x^i$$

と定式化すると $g_n = 1$ より $f(x) > 0$ となる。よって, 純虚数に解を持たない条件は SDC(1) に帰着される。これに加えて,

$$f(0) = (-1)^n g_0 > 0$$

の条件をチェックすればよい。

$G(s)$ の有限周波数領域 $[\omega_1, \omega_2]$ における H_∞ ノルムを $\|G(s)\|_{[\omega_1, \omega_2]} := \sup_{\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2} |G(j\omega)|$ とすると, 有限周波数帯域での H_∞ ノルム制約 $\|G(s)\|_{[\omega_1^2, \omega_2^2]} < 1$ は $f(x) \in \mathbb{N}_0[\omega_1^2, \omega_2^2]$ に帰着できるので, 双線形変換により SDC に定式化できる。

例題 2 (相補感度関数のゲイン制約)。図 1 の PI 制御系を考える。相補感度関数は次式のようになる。

$$T(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} = \frac{ks + m}{s^2 + (k - p)s + m}. \quad (2)$$

ここで, p はプラントのパラメータである。この時 H_∞ ノルム制約 $\|T(s)\|_{[\omega_l, \infty]} < \gamma_l$ は, ハミルトン行列の特性多項式から, SDC:

$$\forall x > 0, f_l(x) = x^2 + b_1 x + b_0 > 0$$

に帰着される。ここで $\alpha = \frac{1}{\gamma_l^2}$ として

$$b_1 = -2\omega_l^2 + k^2\alpha - k^2 + 2pk + 2m - p^2,$$

$$b_0 = \omega_l^4 + (-k^2\alpha + k^2 - 2pk - 2m + p^2)\omega_l^2 - m^2\alpha + m^2.$$

例題 3 (混合感度問題)。図 1 のようなフィードバック

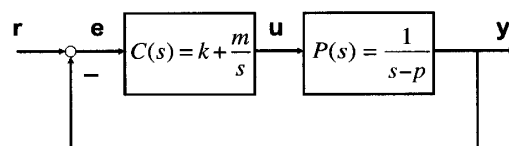


図 1 PI control system

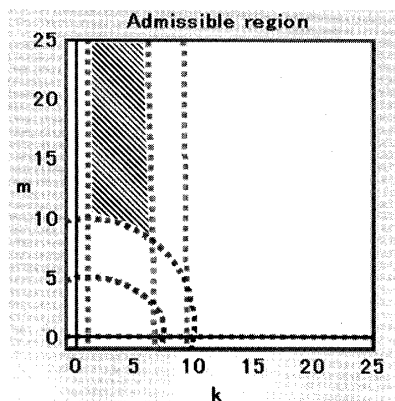


図2 安定性と混合感度問題に対する実行可能領域

ク系を考える．ここで， $G(s) = \frac{1}{s-1}$ ， $C(s) = k + \frac{m}{s}$ とする．以下の感度関数 $S(s)$ ・相補感度関数 $T(s)$ についての仕様を同時に満足する PI コントローラのパラメータ m, k を求める．

$$\|S(s)\|_{[0,1]} \equiv \max_{0 \leq \omega \leq 1} \|S(i\omega)\| < -16 [\text{dB}], \quad (3)$$

$$\|T(s)\|_{[20,\infty]} \equiv \max_{20 \leq \omega \leq \infty} \|T(i\omega)\| < -10 [\text{dB}], \quad (4)$$

この2つの仕様はともに SDC に帰着され *Sturm-Habicht* 列による QE アルゴリズムを適用できる．その結果 *Hurwitz* 安定性を満たす領域とあわせて，上記混合感度問題を満足する m, k の可能領域は図2の斜線で示された領域となる（非凸な可能領域であることに注意）．

4. SDC に対する QE アルゴリズム

$SDC(1)$ に対する特別な QE アルゴリズムとしてまず既存の Šiljak による判定条件とその問題点についてのべる．次に，それらの問題を解消し，かつより効率的なアルゴリズムである *Sturm-Habicht* 列による QE アルゴリズムを提案する．

Šiljak の判定条件 $SDC(1)$ は，改良 Routh 表を用いて解けることが知られている^{19,27)}．改良 Routh 表の始めの2行は $f(-x)$ と $f'(-x)$ の係数であり，以下の行は Euclid 割り算により生成される多項式剰余列 (polynomial remainder sequence: PRS) の係数になっている．ただし，この Routh 表に基づく方法には，以下のような問題点がある²⁸⁾：

- PRS の多項式の係数が指数関数的に増大し計算効率が悪い．
- 係数がパラメータを含む場合パラメータ値の代入の際に “division by 0” が起こり得る．
- 一列目の要素が 0 になる場合に，改良 Routh 表はその先を構成できない場合がある²⁷⁾．

Sturm-Habicht 列 これらの問題点を解消し，かつより効率的な算法⁸⁾，*Sturm-Habicht* 列と言われる $f(x)$ から生成される PRS を利用することで実現される．*Sturm-Habicht* 列は，よく知られた Sturm 列と非常に類似した多項式列で，基本的には，部分終結式により生成される PRS になっている¹⁸⁾．

定義2. $P = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ ， $Q = \sum_{k=0}^m b_k x^k$ ($P, Q \in \mathbb{R}[x]$) とする． n, m は非負の整数である．

$i = 0, 1, \dots, l = \min(n, m)$ に対して，インデックス i の P, n, Q, m に関する部分終結式 (subresultant) $Sres_i(P, n, Q, m)$ を $\sum_{j=0}^i M_j^i(P, Q) x^j$ とする．ここで， $M_j^i(P, Q)$ は，以下に与えられる行列 $s_i(P, n, Q, m)$ の $1, 2, \dots, n+m-2i-1, n+m-i-j$ 列から構成される行列の行列式である．

$$s_i(P, n, Q, m) := \begin{pmatrix} \overbrace{a_n \cdots a_0}^{n+m-i} & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \cdots a_0 \\ b_m \cdots b_0 & & \\ & \ddots & \\ & & b_m \cdots b_0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} a_n \cdots a_0 \\ \vdots \\ a_n \cdots a_0 \end{matrix}} \right\} m-i \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} b_m \cdots b_0 \\ \vdots \\ b_m \cdots b_0 \end{matrix}} \right\} n-i \end{matrix}$$

$v = n + m - 1$ ， $\delta_k = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}$ とする．

このとき， $j = 0, 1, \dots, v-1$ について $SH_{v+1}(P, Q) = P$ ， $SH_v(P, Q) = P'Q$ ， $SH_j(P, Q) = \delta_{v-j} \cdot Sres_j(P, P'Q, v)$ ($P' = \frac{dP}{dx}$) からなる多項式のリスト $\{SH_j(P, Q)\}_{j=0, \dots, v+1}$ を， P と Q に関する The Sturm-Habicht 列という．特に， $\{SH_j(P, 1)\}_{j=0, \dots, v+1}$ を P の Sturm-Habicht 列といい $\{SH_j(P)\}$ と書く．

Sturm-Habicht 列は，Euclid 割り算に基づく PRS の計算に比べ非常に効率がよい上に，*Sturm-Habicht* 列に現れる式は，すべて有理多項式ではなく通常多項式であるため，パラメータを含む場合にパラメータの値によって分母が 0 になる (division by 0) 問題点も解消される．

例題4. 4 次の多項式 $P = x^4 + px^2 + qx + r$ の *Sturm-Habicht* 列 $\{SH_j(P)\}$ ($j = 4, 3, 2, 1, 0$) は以下で与えられる (有理多項式が現れないことに注意)：

$$\begin{aligned} SH_4(P) &= x^4 + px^2 + qx + r, \\ SH_3(P) &= 4x^3 + 2px + q, \\ SH_2(P) &= -4(2px^2 + 3qx + 4r), \\ SH_1(P) &= -4((2p^3 - 8pr + 9q^2)x + p^2 + 12qr), \\ SH_0(P) &= 16p^4r - 4p^3q^2 - 128p^2r^2 + 144pq^2r \\ &\quad - 27q^4 + 256r^3. \end{aligned}$$

Sturm-Habicht 列に基づく QE アルゴリズム $\forall x f(x) > 0$ に対する *Sturm-Habicht* 列を用いた特化した QE ア

ルゴリズムは, Gonzalez-Vegaらによって提案された¹⁷⁾が, § 3.1 で述べたように, 非常に広範な範囲のロバスト制御の設計問題がSDCに帰着できることから, SDCを解くための特化したQEアルゴリズムが必要となる. そこで, 彼らと同様にSDCを多項式の根の数え上げの問題と捉えることで(補題1参照), 以下に示すSturm-Habicht列を用いたSDCのためのQEアルゴリズムを提案する.

Sturm-Habicht列は, Sturm列と同様に, 多項式の実根の数え上げに用いられる:

定理1 (Gonzalez-Vega¹⁷⁾). $f(x)$ の Sturm-Habicht 列を $\{g_0(x), \dots, g_t(x)\} = \{SH_j(f(x))\}; j=0, \dots, t-1, t$ とし $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ かつ $\alpha < \beta$ とする. また $W_{SH}(P; \alpha)$ を $\{g_0(\alpha), \dots, g_t(\alpha)\}$ における符号の変化の数だとする. このとき

$$W_{SH}(P; \alpha, \beta) = W_{SH}(P; \alpha) - W_{SH}(P; \beta)$$

が $[\alpha, \beta]$ における f の実根の数に等しい.

すべての j について, $SH_j(f)$ の次数 j の係数を $st_j(f)$, $SH_j(f)$ の定数項を $ct_j(f)$ と書く.

f についての SDC は f が $[0, +\infty]$ において実根をもたないことと同値である. したがって, SDC と等価な条件は以下により構成できる.

補題1. $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ とする. $f(x) \in \mathbb{N}_0[0, +\infty]$ は $W_{SH}(f; 0, +\infty) = 0$ と同値である.

これより,

$$\begin{aligned} W_{SH}(f; 0, +\infty) &= W_{SH}(f; 0) - W_{SH}(f; +\infty) \\ &= V(\{ct_n(f), \dots, ct_0(f)\}) - V(\{st_n(f), \dots, st_0(f)\}) \quad (*) \end{aligned}$$

ここで V は列の符号変化の数をあらわす. 式(*)に従って具体的に $W_{SH}(f; 0, +\infty)$ を数える. $ct_0(f) = st_0(f)$ かつ $st_n(f) = st_{n-1}(f)$ なので $2(n+1) - 2 = 2n$ 個の符号評価が必要である; $\{-, 0, +\}^{2n}$.

f の Sturm-Habicht 列が得られれば, SDC と等価な条件は以下の手順で構成できる. $W_{SH}(f; 0, +\infty) = 0$ であるような

$$\{ct_n(f), \dots, ct_0(f), st_n(f), \dots, st_0(f)\}$$

に対応した符号の列 $\{\rho_j\}$ (ただし, $\rho_j \in \{>, <, =, \neq\}$) を求めれば, SDC に等価な限定記号の無い式

$$\cup \{(ct_n(f) \rho_0 0) \wedge \dots \wedge (st_0(f) \rho_t 0)\}$$

が得られる³⁾. ここで, $\cup$ は, $W_{SH}(f; 0, +\infty) = 0$ を満たすすべての符号列 $\{\rho_j\}$ についてとる.

得られる式は, パラメータの実行可能領域を正確に

与えており複数の仕様を同時に満たす必要のあるときには, それぞれに上記方法を適用し, 得られた可能領域をパラメータ空間上で重ね合わせを行えばよい.

限定記号の無い式の簡略化 Sturm-Habicht 列による SDC に対する QE アルゴリズムを適用した場合, 得られる結果の式を構成している原子式の多くは余分なもの(false)である. これにより, 結果の理解しやすさが大きく損なわれ, またさらに結果を用いた新たな計算をする際の効率を妨げる大きな要因となっている. 結果の理解しやすさという点では, 可能領域をパラメータ空間上で可視化することで対応できるが, 式が大きくなってくると可視化にも非常に時間がかかる. 従って得られた結果(論理式)の効果的な簡略化の手法が望まれる. 論理式のオートマティックな簡略化手法¹⁴⁾は QE のソフトである REDLOG³⁾, SyNRAC⁴⁾などに装備されているので, それを適用する.

5. 計算機実験による SDC 判定の計算時間

Sturm-Habicht 列に基づく QE アルゴリズムにおいて Sturm-Habicht 列の計算がすべての計算時間の中で最も支配的である. ここでは, 数式処理システム Risa/Asir⁵⁾を用いていくつかの実例の例に対し Sturm-Habicht 列の計算を行った結果を示す. 使用した計算機は Pentium III 1GHz CPU の PC である.

一般多項式 汎用 QE のソフトウェアである QEPCAD を用いて一般多項式 $F_n = \sum_{i=0}^n c_i x^i$ について SDC: $\forall x (x > 0 \rightarrow F_n > 0)$ を解くと, $n=3$ まで即座に解が得られるが, $n \geq 4$ については, 計算終了前にメモリ不足によって計算できない. 一方, 特別なクラスの QE を用いると図3に示すように $n=8$ まで容易に計算できる. 1時間以内で計算が終了したものについての計算時間を図3に示す(計算時間は対数をとった値である). 例えば, $n=8$ のときの計算時間は, 136.5sec であった.

一般多項式については一度 Sturm-Habicht 列の計算結果が得られれば, その結果は表として保持し, 以降実際に与えられた多項式の Sturm-Habicht 列の計算は, その係数を c_i に代入すればよくこれにより計算時間は格段に改善される. この方法は, パラメータを多く含む場合に特に有効である.

PID-制御系 図1の構造をもつ補償器が $C(s) = k + m/s$

3 REDLOG は, ドイツのパッサウ大で開発中の QE ソフトで数式処理システム REDUCE のパッケージである¹³⁾.

4 富士通研究所で開発中の数値/数式ハイブリッド計算に基づく最適化パッケージ^{6,7)}.

5 Risa/Asir は, (株)富士通研究所/神戸大学で開発中の数式処理システム.

であるPI制御系と補償器が $C(s) = k + m/s + (d \cdot s)/(1 + 0.1s)$ であるPID制御系に対する感度解析について考える．具体的には，相補感度関数に対する周波数限定ノルム制約 $\|T(s)\|_{[20, +\infty]} < -10$ を解くことを考える．この制約はSDCに帰着できる．図4は，プラントの次数を変えていったときの，それぞれの $f_i(z)$ の Sturm-Habicht 列の計算時間を示している．1時間以内で計算が終了したものについての計算時間を図3に示している（計算時間は対数をとった値である）．PI制御器の場合， $n = 15$ まで計算できそのときの計算時間が795.4secであった．また，PID制御器の場合， $n = 10$ まで計算でき計算時間が1232.0secであった．ここでプラントは，分子は1に固定し，分母多項式はランダムに生成している．

また，実際の例として Doyle¹⁶⁾ による以下の例を挙げる：プラントの伝達関数は

$$P(s) = \frac{0.5}{s} + \sum_{i=1}^4 \frac{0.2s}{s^2 + 2\zeta_i \omega_i s + \omega_i^2}$$

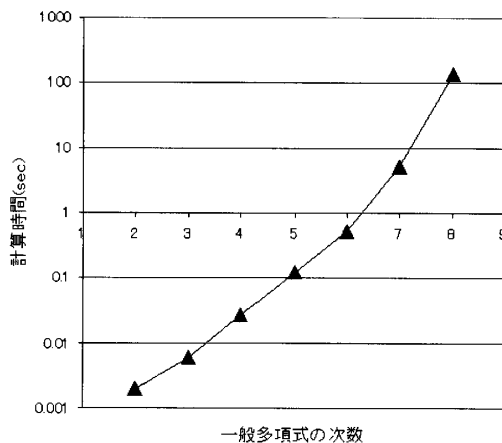


図3 一般多項式の Sturm-Habicht 列の計算

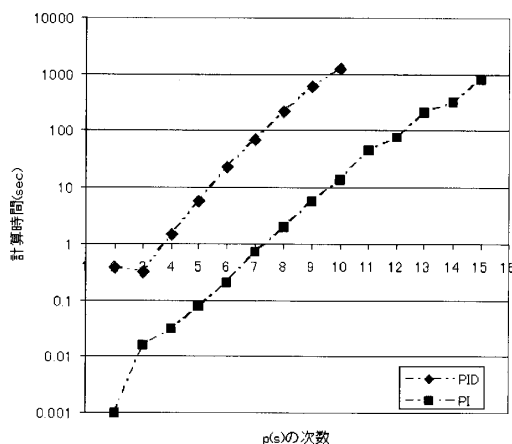


図4 PI及びPID制御系の感度解析における Sturm-Habicht 列の計算時間

である．ここで， $\zeta = 0.02$ ， $\omega_1 = 0.2$ ， $\omega_2 = 0.5$ ， $\omega_3 = 2$ ， $\omega_4 = 10$ である．この $P(s)$ に対し上記と同様のPI制御系で同じ制約 $\|T(s)\|_{[20, +\infty]} < -10$ についての計算結果は， $f_i(z)$ は直ちに得られ，Sturm-Habicht 列の計算については，267.7secで得られた．

以上，1時間程度の計算時間内で，パラメータが2つの場合（PI制御系）では15次，パラメータが3つの場合（PID制御系）では10次，パラメータが4個以上の場合，一般多項式の結果を用いて，7次のプラントに対し実際に計算できることが計算機実験の結果からわかる．これより，Sturm-Habicht 列によるQEに基づく設計法は固定構造の補償器（特に比較的低次）の場合に有効であると言える．

可能な符号の列の判定 効率よく有効な符号の列 $\{p_j\}$ を求めるには，すべて組み合わせについて符号の変化の数を数えて判定する前に，不必要な符号の列を効果的に削除する必要がある．その判定条件として以下がある²⁸⁾：

- Sturm-Habicht 列の代数的な性質から起こり得ない符号（例：0が2つ続くことはない）の列がわかっている．
- 実際の設計という観点からすると，実行可能領域の境界上の解は使わないので， $p_j \in \{<, >\}$ としてもよい．

例えば，4次の一般多項式 F_4 の場合，全部での符号列は $3^8 = 6561$ 個あるが，上記判定基準で不必要なものを取り除くと561個となりさらに，この例の場合に固有の性質から取り除くと477個の可能な符号列を得る．実際の制御の問題等の場合には，この数はさらに小さくなる傾向にある．実際，ハードディスクの設計へ応用した例³⁾では4次の多項式のSDCが最終的には1つの符号列のみが実行可能であった．

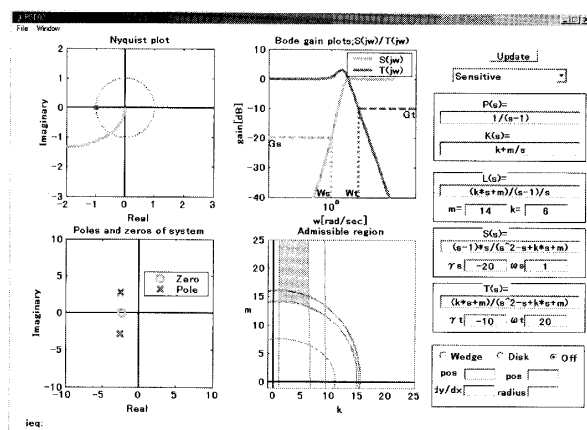


図5 メインウィンドウ

6. QEによるロバスト制御系設計ツールボックス

我々は、§3で述べたSDCとQEによるロバスト制御系設計手法をパラメータ空間アプローチによるロバスト制御系設計用ツールボックスとしてMATLAB上に実装した²⁵⁾。このMATLABツールボックスでは、すべての設計・解析をGUIによって実行でき、周波数領域の特性の数値シミュレーション機能も備えている(図3を参照)。

周波数領域の特性のシミュレーションの数値計算はすべてMATLABによって行い、パラメータを含むモデルを扱ったり設計仕様をSDCに帰着させる部分はMATLABの“Extended Symbolic Math Toolbox”を用いている。SDCをSturm-Habicht列を用いたQEアルゴリズムを用いて解く部分は、maple上で開発しているQEパッケージであるSyNRAC²⁾を用いる。Extended Symbolic Math Toolboxは実体はmapleでありmaple上に実装されたツールやコマンドは容易にMATLABから利用可能である。

設計対象であるシステムは、図1のようなフィードバックシステムでプラントとコントローラは入力用のGUI(図4、図3の右上)から有理多項式として入力できる。コントローラとしては、固定構造をもつもの(有理多項式)であれば何でもよい。図4では、 $P(s) = \frac{1}{s-1}$ 、 $K(s) = k + \frac{m}{s}$ となっている。

現在は、このツールボックスは、SDCに帰着できる周波数領域における設計仕様のうち(周波数限定) H_∞ ノルム制約、特に、混合感度問題についての機能が実装されているが、他の仕様についても同様の考え方で扱

うことができる。また、Hurwitz安定性を満たすパラメータの領域もLiénerd-Chipart criterionに基づいて直ぐに求められコントローラのパラメータ空間に重ね合わせて表示される。

設計仕様 $\|S(s)\|_{[0, \omega_s]} < \gamma_s$ 、 $\|T(s)\|_{[\omega_t, \infty]} < \gamma_t$ は、図5(図3の右中)のダイアログボックスより数値を直接入力するか、図6(図3の真中上)のBode線図上の点線をマウスでドラッグして動かすことで入力できる。仕様の入力後、図3中右上の「Update」を押すと変数の役割設定用のダイアログ(図9)が現れる。ここで s が主変数で $k-m$ 空間で実行可能領域を示すように指定する。そして、「Apply」を押すと新たに $k-m$ の実行可能領域がパラメータ空間に描画される(図10)。

このとき k, m の値を、パラメータ空間上でマウスのクリックにより指定するとそのときのBode線図、Nyquist plot、極配置図が新たに表示される。この機能により、混合感度の仕様を満たすパラメータの可能領域上でマウスを動かすことで、他の性能の変化を観察することも可能となり、よりロバストなあるいは最適なパラメータの選択が容易に行える⁶⁾。

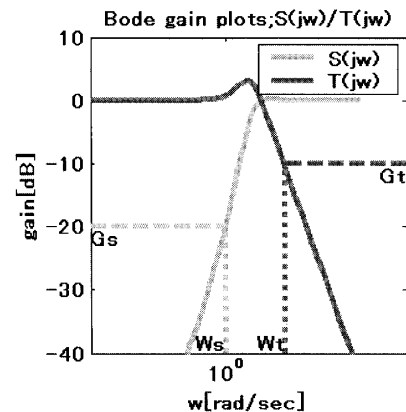


図8 ボーデ線図

$P(s)=$	$\frac{1}{(s-1)}$
$K(s)=$	$k + \frac{m}{s}$

図6 プラント、コントローラ設定用GUI

$S(s)=$	$\frac{(s-1)*s}{(s^2-s+k*s+m)}$
γ_s	-20
ω_s	1
$T(s)=$	$\frac{(k*s+m)}{(s^2-s+k*s+m)}$
γ_t	-10
ω_t	20

図7 $S(s)$ と $T(s)$ のノルム制約仕様の設定GUI

図9 変数の役割設定

6 パラメータが3つ以上あるコントローラの場合にも全く同様のQEに基づく設計手法が適用できる。しかし、パラメータの可能領域の表示については今後の課題である。

例題 5. プラント: $P(s) = \frac{1}{s^2 + 0.5s - 0.7}$, PI コントローラ: $K(s) = k + \frac{m}{s}$

設計仕様: $\|S(s)\|_{[0, \omega_s]} < \gamma_s$, $\|T(s)\|_{[\omega_l, \infty]} < \gamma_l$
 $\omega_s = 0.05$ [rad/sec], $\gamma_s = -30$ [dB],
 $\omega_l = 10$ [rad/sec], $\gamma_l = -10$ [dB].

この場合の結果は、図 11 で、Xeon 3.2 GHz CPU で直ちに結果を得られた。

例題 6. プラント: a 2nd-order system with time delay

$$P(s) = \frac{\omega_n^2 K e^{-Ls}}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\approx \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1 - \frac{1}{2}Ls}{1 + \frac{1}{2}Ls}$$

ここで $K=1$, $\zeta=0.1$, $\omega_n=30$ [kHz], $L=0.02$ [msec].

PI コントローラ: $K(s) = k + \frac{m}{s}$

設計仕様: $\|S(s)\|_{[0, \omega_s]} < \gamma_s$, $\|T(s)\|_{[\omega_l, \infty]} < \gamma_l$
 $\omega_s = 0.05$ [rad/sec], $\gamma_s = -20$ [dB],
 $\omega_l = 100$ [rad/sec], $\gamma_l = -10$ [dB].

この場合の結果は、図 12 で、Xeon 3.2 GHz CPU で 30sec 以下で結果を得られた。

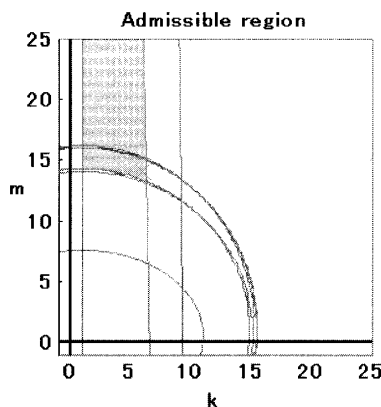


図 10 パラメータ空間と可能領域

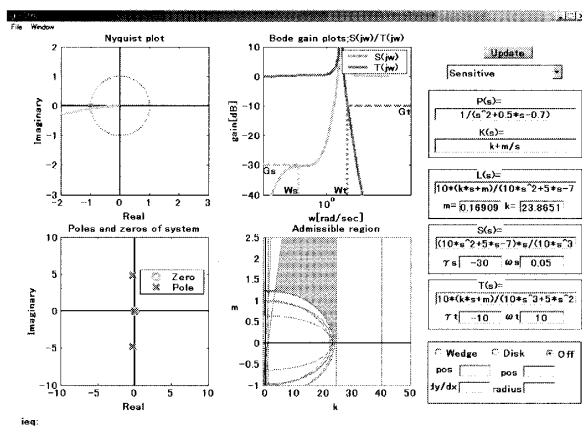


図 11 例題 5

7. まとめ

本稿では、QEに基づくパラメータ空間法によるロバスト制御系設計、特に、低次元の固定構造を持つコントローラを用いた複数仕様を同時に満足するような設計問題に対する新しい効率的方法を提案し、実際に MATLAB 上にロバスト制御系設計ツールとして実装を行った。

QEに基づくパラメータ空間法は、この種の問題について非常に有効であるが単純にQEを用いては、実用的時間で解ける問題の規模は非常に小さい。そこで、ロバスト制御理論においてしばしば用いられる重要な多くの設計仕様が、ある特別なクラスの一階述語論理式に帰着できることに着目して、その特別なクラスの入力式に対して、より効率的な特化したQEのアルゴリズムを適用することで、実用的な時間で実用的な規模の設計問題を解くことを実現した。そのような良いクラスの例として、SDCに着目しこれらの式が周波数領域における非常に広範な範囲の設計問題をカバーすることを指摘し、実際の制御問題について適用実験を行い、低次元の固定構造を持つコントローラ設計においては実用的な問題を実用的な時間で解くことができた。

広範な制御の問題が簡単な計算によって帰着され、かつ、効率的なQEアルゴリズムが存在するSDCのような式を利用する設計の枠組みは、QEを用いた設計法のさらなる拡張に向けて、有望な方向性を与えている。また、この枠組みにおいて扱うことのできる設計問題は他にも多く存在すると期待できる。

謝 辞

本研究の一部は、(独)科学技術振興機構 CREST と

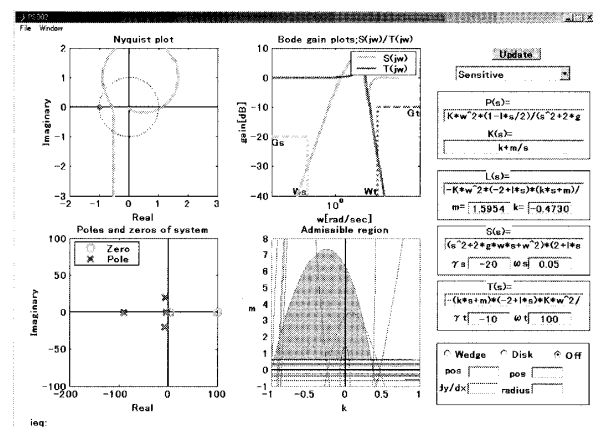


図 12 例題 6

21世紀COEプログラム「情報科学技術戦略コア」超ロバスト計算原理プロジェクトの支援を受けて行った。また、ツールボックスの作成に協力いただいた坂部啓氏に感謝します。

参考文献

- 1) J. Ackermann: *Robust Control - Systems with Uncertain Physical Parameters*, Springer-Verlag (1993)
- 2) H. Anai: On solving semidefinite programming by quantifier elimination. In *Proc. of American Control Conference, Philadelphia*, 2814/2818 (1998)
- 3) H. Anai and S. Hara: Fixed-structure robust controller synthesis based on sign definite condition by a special quantifier elimination. In *Proceedings of American Control Conference 2000*, 1312/1316 (2000)
- 4) H. Anai and S. Hara: Linear programming approach to robust controller design by a quantifier elimination. In *Proceedings of SICE Annual Conference 2002 (Osaka, Japan)*, 863/869 (2002)
- 5) H. Anai and S. Hara: A parameter space approach for fixed-order robust controller synthesis by symbolic computation. In *Proceedings of IFAC World Congress on Automatic Control b'02 (2002)*
- 6) H. Anai and H. Yanami: SyNRAC: A maple-package for solving real algebraic constraints. In *Proceedings of International Workshop on Computer Algebra Systems and their Applications (CASA) 2003 (Saint Petersburg, Russian Federation)*, P.M.A. Soot et al. (Eds.): ICCS 2003, LNCS 2657, 828/837, Springer (2003)
- 7) H. Anai and H. Yanami: Development of SyNRAC –formula description and new functions. In *Proceedings of International Workshop on Computer Algebra Systems and their Applications (CASA) 2004 : ICCS 2004, LNCS 3039, 286/294*, Springer (2004)
- 8) T. Becker and V. Weispfenning: *Gröbner Bases*, GTM. Springer-Verlag (1993)
- 9) B. Caviness and J. Johnson, editors: *Quantifier Elimination and Cylindrical Algebraic Decomposition*, Texts and monographs in symbolic computation, Springer-Verlag (1998)
- 10) G. E. Collins: *Quantifier Elimination for Real Closed Fields by Cylindrical Algebraic Decomposition*, LNCS 32, Springer Verlag (1975)
- 11) G. E. Collins and H. Hong: Partial cylindrical algebraic decomposition for quantifier elimination, *Journal of Symbolic Computation*, **12**-3, 299/328, Sept. (1991)
- 12) J. H. Davenport and J. Heintz: Real quantifier elimination is doubly exponential, *Journal of Symbolic Computation*, **5**-1,-2, 29/35, Feb.-Apr. (1988)
- 13) A. Dolzmann and T. Sturm: REDLOG computer algebra meets computer logic, Technical Report MIP-9603, Universität Passau, Fakultät Für Mathematik und Informatik, Feb. (1996)
- 14) A. Dolzmann and T. Sturm: Simplification of quantifier-free formulae over ordered fields, *Journal of Symbolic Computation*, **24**-2, 209/231, Aug. (1997)
- 15) P. Dorato, W. Yang, and C. Abdallah: Robust multiobjective feedback design by quantifier elimination, *J. Symb. Comp.*, **24**, 153/159 (1997)
- 16) J. Doyle, B.A. Francis, and A.R. Tannenbaum: *Feedback control theory*, Macmillan Publishing Company (1992)
- 17) L. González-Vega: A combinatorial algorithm solving some quantifier elimination problems. In B. Caviness and J. Johnson, editors, *Quantifier Elimination and Cylindrical Algebraic Decomposition*, Texts and monographs in symbolic computation, 365/375, Springer-Verlag (1998)
- 18) L. González-Vega, H. Lombardi, T. Recio, and M. -F. Roy: Sturm-habicht sequence. In *Proceedings of ISSAC'89*, 136/146, Portland, ACM Press (1989)
- 19) S. Hara, T. Kimura, and R. Kondo: H_∞ control system design by a parameter space approach. In *Proceedings of MTNS-91*, 287/292, Kobe, Japan (1991)
- 20) M. Jirstrand: *Constructive Methods for Inequality Constraints in Control*, PhD thesis, Linköping University, Sweden (1998)
- 21) T. Kimura and S. Hara: A robust control system design by a parameter space approach based on sign definition condition. In *Proceedings of KACC-91*, 1533/1538, Seoul, Korea (1991)
- 22) R. Kondo, S. Hara, and T. Kaneko: Parameter space design for H_1 control (in Japanese), *Trans. of SICE*, **27**-6, 714/716 (1991)
- 23) R. Loos and V. Weispfenning: Applying linear quantifier elimination, *The Computer Journal*, **36**-5, 450/462, Oct. (1993)
- 24) A. Neubacher: *Parametric Robust Stability by Quantifier Elimination*, PhD thesis, Risc-Linz, Oct. (1997)
- 25) S. Sakabe, Y. Hitoshi, H. Anai, H. Yanami, and S. Hara: A matlab toolbox for robust control synthesis by symbolic computation. In *Proceedings of SICE Annual Conference 2004 (Sapporo, Japan)*, 1968/1973 (2004)
- 26) W. Sienel, J. Ackermann, and T. Bunte: Design and analysis of robust control systems in PARADISE. In *Proc. IFAC Symposium on Robust Control Design*, Hungary (1997)
- 27) D. D. Šiljak: New algebraic criterion for positive realness, *Journal of the Franklin Institute*, **291**, 109/120 (1971)
- 28) 穴井, 原: 新しい数式処理アルゴリズム QE を用いたロバスト制御系設計, システム / 制御 / 情報, **44**-6, 307/311 (2000)