

SISO $\mathcal{H}_\infty$ ループ整形問題の準最適制御器の 精度保証付き計算†

管 野 政 明*

ABSTRACT This paper develops a guaranteed accuracy algorithm to compute a sub-optimal controller for the single-input-single-output (SISO) $\mathcal{H}_\infty$ loop-shaping synthesis problem. Given the transfer function, with coefficients in rationals, of a plant to be controlled, the algorithm computes, in a manner which guarantees accuracy, the optimal performance level and the coefficients of a particular sub-optimal controller. The method employs polynomial spectral factorization to avoid solving a Riccati equation directly. Also the algorithm makes use of special structures of the solution of a Lyapunov equation and the transfer function of the sub-optimal controller to be computed and thus reduces the computation cost. The algorithm is illustrated on numerical examples.

1. はじめに

近年, 科学や工学の分野において, 精度保証付き計算と呼ばれるものに対して注目が集まってきている. 制御工学の分野においても, 信頼できる数値計算アルゴリズムの構築の重要性がうたわれるようになり, 精度保証付き計算を応用した研究が見受けられるようになってきた^{1~4)}. しかしながら, 制御工学の分野では, 解析問題に対する結果が主であり, 設計問題に対する結果は少ない^{1,4)}. またあっても, 計算の過程で精度保証付き数値アルゴリズムを用いるが, 最終結果に対してはなんら保証を行なわないもの³⁾や, $\mathcal{H}_2$ 制御問題に関するもの²⁾であり, $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題に対しては精度保証付きアルゴリズムが原理的に構築可能であるかどうかも分かっていなかった.

そこで本稿では, $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題ではあるが古典制御理論の枠組みでの解釈も可能で, 実際の設計にも良く用いられる $\mathcal{H}_\infty$ ループ整形問題を取り上げ, 一入力一出力系に対して, 準最適制御器を精度保証付きで求めるアルゴリズムを構築することが原理的に可能であることを示す. さらに, 計算機上に実装されたアルゴリズムを数値例に対して適用する. 本稿の構成は以下の通りである. 第2章にて, $\mathcal{H}_\infty$ ループ整形問題の定式化と

その準最適解を与える定理を述べる. 第3章では, 最適性能値と準最適解を精度保証付きで求めるアルゴリズムを構築する. 数値例を第4章にて与え, 第5章でまとめる.

なお本稿では, 精度保証の定義として4)にて定義されたものを用いる.

定義1⁴⁾ 関数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は *well-defined* とする (必ずしも連続でなくて良い). また, A は実行可能な形式のアルゴリズムとし, *well-defined* な関数 $A: (\mathbb{F}^n, \mathbb{F}_{>0}) \rightarrow \mathbb{F}^2$ を定義するものとする. ここで, $\mathbb{F} \subset \mathbb{R}$ は計算機上で表現できる数の集合であり, $\mathbb{F}_{>0}$ は $\mathbb{F}$ に属する要素のうち, 厳密に正のものの集合である. $A(\mathbf{P}, \varepsilon) = (f_\ell, f_r)$ としたとき (ただし, $f_\ell \leq f_r$), もし任意の $\mathbf{P} \in \mathbb{F}^n$ と $\varepsilon \in \mathbb{F}_{>0}$ に対し, 真の $f(\mathbf{P})$ が閉区間 $[f_\ell, f_r]$ に属し, かつ $f_r - f_\ell \leq \varepsilon$ であるならば, A は $\mathbb{F}$ 上の精度保証付きアルゴリズムと呼ぶ.

本稿のアルゴリズムは計算機代数システム Maple 上で実装され, また, 上記の定義中の $\mathbb{F}$ は有理数の集合 $\mathbb{Q}$ とする.

なお本稿では以下の表記を用いる. システム $G(s)$ に対し, 共役システムを $G^-(s) := G^T(-s)$ と定義する. また, 多項式 $f(s)$ に対しても, 共役多項式を $f^-(s) := f(-s)$ と定義する. システムの $\mathcal{H}_\infty$ ノルム, ハンケル・ノルムはそれぞれ $\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_H$ と表わす.

2. $\mathcal{H}_\infty$ ループ整形問題とその準最適解

本稿で考える $\mathcal{H}_\infty$ ループ整形問題は $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題の

Guaranteed Accuracy Computation for SISO Sub-optimal $\mathcal{H}_\infty$ Loop-shaping Synthesis. By Masaaki Kanno (Japan Science and Technology Agency, CREST).

* (独) 科学技術振興機構 CREST

† 2006年2月21日受付 2006年5月11日再受付

一つではあるが、一般の $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題につきものの繰り返しによる解の計算が不要であるという特長をもつ。また制御の古典的手法の開ループ整形法と基本的な考えを同じくし、古典制御でよく用いられる感度関数・相補感度関数を含む4つの伝達関数からなる伝達関数行列の $\mathcal{H}_\infty$ ノルムを小さくすることを目的としている。さらには、以下で γ で表わされる達成された性能指標を用いて、達成されるゲイン余裕・位相余裕の下限値が計算できる⁵⁾など、古典制御と現代制御を良い形で融合したものである。

さて具体的には、 $\mathcal{H}_\infty$ ループ整形問題は以下のように定式化される。フィードバック系としては図1に示すものを考える。なお、 $P(s)$ は制御対象である連続時間線形プラントの伝達関数である。このとき準最適 $\mathcal{H}_\infty$ ループ整形問題は、閉ループを安定化し、かつ、 $[d_1 \ d_2]^T$ から $[y_1 \ y_2]^T$ までの伝達関数

$$H = \begin{bmatrix} P \\ I \end{bmatrix} (I - KP)^{-1} \begin{bmatrix} K & I \end{bmatrix}$$

の $\mathcal{H}_\infty$ ノルムを γ 以下にする、すなわち $\|H\|_\infty < \gamma$ を満足する、伝達関数が $K(s)$ で表わされる制御器を求めるというものである。ここで γ は

$$\gamma > \gamma_{\text{opt}} := \inf_{K \text{ stabilising}} \left\| \begin{bmatrix} P \\ I \end{bmatrix} (I - KP)^{-1} \begin{bmatrix} K & I \end{bmatrix} \right\|_\infty$$

を満たす(一定の)数である。これを満たす制御器は無限個存在するが、ここでは中心制御器または最小エントロピ制御器と呼ばれる制御器を求める。これは以下で表わされる閉ループ系のエントロピを最小化するものである。

$$I(H, \gamma) := -\frac{\gamma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln |\det(I - \gamma^{-2} H^*(j\omega) H(j\omega))| d\omega$$

ここで導出を容易にするため、 P は厳密にプロパーであると仮定する。一般に制御対象は無限大の周波数でゲインは0となるので、この仮定は実用上の制約とはならないと考えられる。このとき上記の問題に対する解は(数学的には)以下のようにして求められることが知られている。

定理1 ⁶⁾, Corollary 18.2 プラント P が以下の可制御・可観測状態空間実現で与えられているとする。

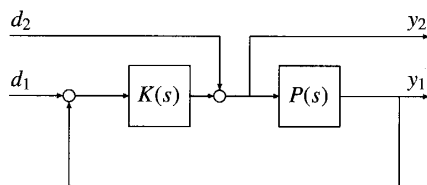


図1 Feedback configuration

$$P(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

また、 $Y > 0$ をリカッチ方程式

$$AY + YA^* - YC^*CY + BB^* = 0 \quad (1)$$

の(唯一の)安定化解とし、さらに、

$$[N \ \tilde{M}] = \begin{bmatrix} A - YC^*C & B - YC^* \\ C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (2)$$

とする。すると、 $P = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}$ は左正規化規約分解となり、 $\tilde{N}, \tilde{M}$ の各要素は $\mathcal{RH}_\infty$ に属し、さらに、 $\tilde{M}\tilde{M}^* + \tilde{N}\tilde{N}^* = I$ を満たす。また、

$$\gamma_{\text{opt}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda_{\max}(YQ)}} = (1 - \|[N \ \tilde{M}]\|_H^2)^{-1/2} \quad (3)$$

である。ここで、 Q は以下のリアプノフ方程式の(唯一の)解である。

$$Q(A - YC^*C) + (A - YC^*C)^*Q + C^*C = 0 \quad (4)$$

さらに、任意の $\gamma > \gamma_{\text{opt}}$ に対し、最小エントロピ制御器は以下のように与えられる。

$$K_{\text{sub}}(s) = \begin{bmatrix} A - BB^*X_\infty - YC^*C & YC^* \\ -B^*X_\infty & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

ただし、

$$X_\infty := \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} Q \left(I - \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} YQ \right)^{-1} \quad (6)$$

である。

(5)式より、準最適最小エントロピ制御器はプラントと同じ次数をもち、また厳密にプロパーであることが分かる。

3. 準最適制御器の精度保証付き計算アルゴリズム

定理1を用いることにより、通常の数値計算を用いた準最適制御器を求めるアルゴリズムを構築することは容易である。しかしながら、浮動小数点計算を用いてリカッチ方程式を解くアルゴリズムに関して、アルゴリズムの感度解析などは十分行なわれておらず⁷⁾、精度解析・精度保証を行なわせるのは一般に単純ではない。本章では、一入力一出力系に対する準最適制御器を計算する精度保証付きアルゴリズムを、定理1に基づき、さらに解の構造的特徴を利用しながら構築していく。なおここで構築されるアルゴリズムは、入力として、プラントの伝達関数の係数と許容誤差レベル ε (いずれも有理数として与えられる)を取り、出力として、達成可能な最適性能 γ_{opt} および準最適制御器 K_{sub} の伝達関数の係数を含む、幅が ε 以下の、両端が有理

数で表わされる区間を返すものである。なお、 γ_{opt} も精度保証付きで計算しようとするのは、 γ_{opt} の値が達成可能な制御性能を表わす重要な指標であるからである。この値を見ることによって、プラントの制御のしやすさ／しにくさが理解できるので⁸⁾、 γ_{opt} が精度保証付きで計算することが可能となることは応用上、意義があると考えられる。

定理1を用いる場合、もっとも問題となる部分は、リカッチ方程式(1)の解を求める部分である。本章で提案するアルゴリズムでは、精度保証付き多項式スペクトル分解アルゴリズム²⁾を用いて正規化規約分解を求め、その結果を用いて、 Y を $[\tilde{N} \ \tilde{M}]$ の可制御グラミアンとして計算する。まずプラントの分母・分子を分け、 $P(s) = P_N(s)/P_D(s)$ と表現する。ここで、 P_N と P_D は互いに素な多項式であり、また P_D はモニックとする。そして、 $M_D(s)$ を、先頭係数が正で以下の関係式を満たす安定な(すなわち、全ての根が左開半面にある)多項式とする。

$$M_D^* M_D = P_N^* P_N + P_D^* P_D \quad (7)$$

すると、 $[\tilde{N} \ \tilde{M}] = [P_N/M_D \ P_D/M_D]$ は P の正規化規約分解となる。ここで、 P が厳密にプロパーであるという仮定より、 M_D はモニックとなることに留意する。さらに、(1)式のリカッチ方程式が

$$(A - YC^*C)Y + Y(A - YC^*C)^* + [B \ -YC^*] \begin{bmatrix} B^* \\ -CY \end{bmatrix} = 0 \quad (8)$$

のように書き直せることに留意する。上式と(2)式より、 Y が $[\tilde{N} \ \tilde{M}]$ の可制御グラミアンとなっていることが分かる。また、可制御グラミアンの計算にはリアプノフ方程式を解く必要があるが、これは連立一次方程式を与えるので、リカッチ方程式と比較して解くのが容易である。

さて、 P の状態空間表現として可観測正準形を用いた場合、 Y の計算がさらに容易になり、その上、 Y の各要素が M_D の係数の多項式で書けることを示していく。本稿ではこれ以降、 P が n 次の一入力一出力プラントとし、その最小実現が可観測正準形で与えられているとする。すなわち、 P の伝達関数及び最小実現が

$$P(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_0}$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|c} a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 & b_{n-1} \\ a_{n-2} & 0 & 1 & \dots & 0 & b_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 0 & 0 & \dots & 1 & b_1 \\ a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right] =: \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right] \quad (9)$$

で与えられているものとする。

補題2 プラント P が n 次の一入力一出力系で、その状態空間実現が最小で可観測正準形で与えられているとする。このとき、(2)式で与えられる正規化規約分解もまた可観測正準形となる。

さらに、正規化規約分解の特性多項式 $M_D(s) = \det(sI - A + YC^*C)$ が与えられているとする。すると、(1)式のリカッチ方程式の安定化解 Y の要素は M_D の係数の多項式として表わすことができる。特に、 Y の各要素は特性多項式 M_D とリカッチ方程式の上三角部分(対角成分を除く)より求まる。

証明

P の状態空間表現が(9)式のように与えられているので、 YC^* は行列 Y の最初の列と同じであることが分かり、さらに YC^*C の最初の列は Y 行列の最初の列と同じで、残りの要素はすべて0であることが分かる。それゆえ、 $A - YC^*C$ は(9)式中の行列 A と同じ形をしていることが分かる。また、(2)式より、 P と $[\tilde{N} \ \tilde{M}]$ の C 行列は同じものである。よって、(2)式で与えられる正規化規約分解 $[\tilde{N} \ \tilde{M}]$ の状態空間が可観測正準形であることが分かる。

次に、 Y の第1行及び第1列が $M_D(s) = s^n + m_{n-1}s^{n-1} + m_{n-2}s^{n-2} + \dots + m_1s + m_0$ から求まることを示す。 M_D が与えられたとき、 $[\tilde{N} \ \tilde{M}] = [P_N/M_D \ P_D/M_D]$ と書け、これを用いることにより、 $[\tilde{N} \ \tilde{M}]$ の状態空間表現を可観測正準形で書き表すことができる。さらに、この状態空間表現は(2)式のそれと同一でなければならない。可観測正準形であるので、 $P_D/M_D - 1 = (P_D - M_D)/M_D$ の分子多項式の s のべき乗の係数より $-YC^*$ が求まる。また、 $-YC^*$ の各要素が m_i に関してアフィン線形となるのは明らかである。前述のとおり、 YC^* は行列 Y の最初の列と同じであるので、 Y の第1列が m_i に関するアフィン線形の形で表現できる。実際には、 Y は対称行列なので、第1列も同様に表現できる。

これより、 Y の他の要素が m_i に関する多項式で表わされることとその表現がリカッチ方程式の上三角部分より求まることを示す。まずリカッチ方程式は(8)式のように書け、また $[B \ -YC^*]$ の各要素が m_i に関するアフィン線形であることを思い出す。さらに、 $[\tilde{N} \ \tilde{M}]$ の状態空間表現が可観測正準形であることより、

$$A - YC^*C = \begin{bmatrix} -m_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -m_{n-2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m_1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -m_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

となることに留意する。(8)式の最初の2項を書き直すために、 $A - YC^*C$ と Y をそれぞれ以下のように分割する。

$$A - YC^*C = \begin{bmatrix} 1 & & n-1 \\ \alpha_1 & & I \\ & & \\ \alpha_2 & & 0 \end{bmatrix}^{n-1}, Y = \begin{bmatrix} 1 & & n-1 \\ y_1 & & y_2^* \\ & & \\ y_2 & & Y_0 \end{bmatrix}^1$$

また、 Y を

$$Y = \bar{Y} + \begin{bmatrix} 1 & & n-1 \\ 0 & & 0 \\ & & \\ 0 & & Y_0 \end{bmatrix}^1$$

のように分解する。ここで、 $\bar{Y}$ は Y 行列のうち既知の部分であり、 Y_0 は未知の部分である。また、 $\bar{Y}$ と Y_0 はいずれも対称行列である。すると、

$$(A - YC^*C)Y = (A - YC^*C)\bar{Y} = \begin{bmatrix} 1 & & n-1 \\ 0 & & Y_0 \\ & & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}^{n-1},$$

$$Y(A - YC^*C)^* = \bar{Y}(A - YC^*C)^* + \begin{bmatrix} n-1 & 1 \\ 0 & 0 \\ & \\ Y_0 & 0 \end{bmatrix}^1$$

となる。ここで、 $(A - YC^*C)\bar{Y}$ と $\bar{Y}(A - YC^*C)^*$ の各要素は m_i に関する多項式となることが分かる。その結果、リカッチ方程式は以下のように変形される。

$$\begin{bmatrix} 1 & & n-1 \\ 0 & & Y_0 \\ & & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}^{n-1} + \begin{bmatrix} n-1 & 1 \\ 0 & 0 \\ & \\ Y_0 & 0 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} \text{各要素が } m_i \text{ の} \\ \text{多項式の行列} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$Y = (y_{i,j})$ と書き、 Y_0 行列の全要素を含むベクトルを $y = [y_{2,2} \ y_{2,3} \ \dots \ y_{2,n} \ y_{3,3} \ y_{3,4} \ \dots \ y_{n,n}]^T$ と定義する。(11)式の上三角部分より、連立一次方程式 $Ry = m$ が得られる。ここで、 R は、対角成分が全て1で他の成分は0または1であるような上三角行列である。これを解くことにより、 y を求めることができる。これは、 Y_0 がリカッチ方程式の上三角部分より求まるということに他ならない。さらに、 y は m_i に関する多項式となるのは明らかであるので、結局 Y_0 の各要素は m_i に関する多項式となる。よってこの補題は示された。□

上記の補題より、 Y の各要素を M_D の係数を用いて陽に表現することが可能であることが分かる。 M_D の係数は精度保証付きで計算することが可能である、すな

わち真の値を含む任意に狭い幅の区間を得ることが可能であるので²⁾、 Y も精度保証付きで計算が可能である。 M_D の係数で表わされた Y の表現をそのまま以降の計算に用いることも可能である。また、 Y の各要素の厳密な値を含む区間を、 M_D の係数を挟む区間から計算し、その後の計算に使うことも可能である。その場合、計算は記号計算ではなく有理数の計算になるので、一般的に、計算速度は速くなるが、得られる区間は保守的になりやすい。

さて定理1を用いて準最適制御器を求める場合、次に行なうべきことはリアプノフ方程式(4)の解 Q を求めることである。リアプノフ方程式は、 Q の上半分の要素に関する連立一次方程式を与え、また、 $A - YC^*C$ は(10)式のように書けるので、 Q の要素は M_D の係数に関する有理関数として表現できる。以下の補題にて、 Q が特殊な形をしていて、リアプノフ方程式を Q の対角成分に関してのみ解けばよいことを示す。

補題3 プラント P の状態空間実現が最小で可観測正準形で与えられているとする。すると、リアプノフ方程式(4)の解 $Q = (q_{i,j})$ (対称行列)の要素は以下のような関係式を満たす。

$$q_{i,j} = \begin{cases} 0 & i+j \text{ が奇数のとき} \\ (-1)^{\frac{i-j}{2}} q_{\frac{i+j}{2}, \frac{i+j}{2}} & i+j \text{ が偶数のとき} \end{cases}$$

すなわち、 Q は以下のような形をしている。

$$\begin{bmatrix} q_{1,1} & 0 & -q_{2,2} & 0 & q_{3,3} & \dots \\ 0 & q_{2,2} & 0 & -q_{3,3} & 0 & \dots \\ -q_{2,2} & 0 & q_{3,3} & 0 & -q_{4,4} & \dots \\ 0 & -q_{3,3} & 0 & q_{4,4} & 0 & \dots \\ q_{3,3} & 0 & -q_{4,4} & 0 & q_{5,5} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

証明

$A - YC^*C$ は(10)式のような形をしているので、 $Q(A - YC^*C)$ の (i,j) 成分($i, j \geq 2$)は $q_{i,j-1}$ であり、 $(A - YC^*C)^*Q$ の (i,j) 成分($i, j \geq 2$)は $q_{i-1,j}$ である。 C^*C の $(1,1)$ 成分は1であり、それ以外の要素は全て0である。よって、 $Q(A - YC^*C) + (A - YC^*C)^*Q + C^*C = 0$ の (i,j) 成分($i, j \geq 2$)は

$$q_{i,j-1} + q_{i-1,j} = 0, \quad i, j \geq 2$$

となる。特に、 $i = j$ の場合は、

$$q_{i,j-1} + q_{i-1,i} = 2q_{i-1,i} = 0, \quad i \geq 2$$

となるので、 $q_{i-1,i} = 0$ ($i \geq 2$)である。よってこの補題は示された。□

補題3にて得られた Q の表現をリアプノフ方程式(4)に代入すると、第1行と第1列以外にある成分が全て0になることが分かる。よって、 Q の対角成分 $q_{i,i}$ はリアプノフ方程式の第1行(第1列)から求められる。 $q = [q_{1,1} \ q_{2,2} \ \dots \ q_{n,n}]^T$ と書くと、リアプノフ方程式の第1行は $Lq = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ と書ける。ここで、 L は、各要素が M_D の係数に関してアフィン線形の形で記述できる行列である。これを q に関して記号的に解くことにより、 $q_{i,i}$ を M_D の係数に関する有理式で表現し、 $q_{i,i}$ の真の値を含む区間を求めることもできる。また、 L を含む区間行列を求め、Hansenによる区間逆行列の計算法⁹⁾などを用いて、 $q_{i,i}$ の真の値を含む区間を求めることも可能である。 L を精度保証付きで求めることが可能であるので、 Q も精度保証付きで計算可能である¹⁰⁾。Theorem 2.8.

次に行なうべきことは、 γ_{opt} を見つけ、 $\gamma > \gamma_{\text{opt}}$ となる γ を選ぶことである。(3)式より分かるとおり、 γ_{opt} を精度保証付きで求める際に鍵となるのは、 $\lambda_{\text{max}}(YQ)$ を精度保証付きで求める部分である。 Y と Q がどちらも正定値行列であるので、 $\det(\lambda I - YQ)$ の n 個の根(重複度を含める)は全て(実数で)正となる。 Y と Q は精度保証付きで計算可能であるので、 $\det(\lambda I - YQ)$ の係数も精度保証付きで、すなわち任意に狭い幅の区間として求まる。すると問題は、真の多項式の係数を含む区間が与えられたとき、真の係数の値は分からないが任意に小さい幅の区間で近似できるという仮定のもと、真の多項式の根を精度保証付きで求められるかということになる。 $\det(\lambda I - YQ)$ の根が全て正の実数あり、かつ係数が精度保証付きで求められるという事実より、以下の定理を用いて、 $\lambda_{\text{max}}(YQ)$ を精度保証付きで求めることが可能である。

定理 4 ¹⁰⁾ Theorem 5.9 多項式

$$p(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + c_1\lambda + c_0, c_i \in \mathbb{R}$$

の根が(重複度を含めて) n 個で、全て(実数で)正であるとする。係数 c_i を挟む区間

$$c_i \in [c_i^-, c_i^+], i = 0, 1, \dots, n-1$$

が与えられているとし、

$$p^+(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}^+\lambda^{n-1} + c_{n-2}^+\lambda^{n-2} + \dots + c_1^+\lambda + c_0^+,$$

$$p^-(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}^-\lambda^{n-1} + c_{n-2}^-\lambda^{n-2} + \dots + c_1^-\lambda + c_0^-$$

とする。 $(p^+(\lambda), p^-(\lambda))$ の根に関しては制約はない。)。

このとき $p^-(\lambda)$ は正の根を常にもつ。また、 $p(\lambda), p^+(\lambda), \frac{d}{d\lambda} p^+(\lambda), p^-(\lambda)$ の最大の実根をそれぞれ、 $\lambda_1, \lambda_1^+, \lambda_1^-$ と書く。 $(p^+(\lambda), \frac{d}{d\lambda} p^+(\lambda))$ が正の実根を持たない場

合、 $\lambda_1^+ = 0, \lambda_1^- = 0$ とする。)すると、

$$\lambda_1 \in [\max(\lambda_1^+, \lambda_1^-), \lambda_1^-] \quad (12)$$

である。さらに、 c_i を挟む区間の幅を任意に狭くすることが可能であるとする、(12)式の区間も任意に小さくすることができる。

注釈 1 多項式の根は、次数が高いとき、また(重根の場合も含めて)複数の根が近接している場合、係数の変動に対して、一般に感度が高くなることが知られている。また、その感度の(保守的な)評価式も存在する¹¹⁾。高次のシステムに対して、上記の定理を用いる場合、 c_i の幅を非常に狭くしなくてはならない可能性がある。しかしながらそのような場合でも、精度保証付き多項式スペクトル分解アルゴリズム²⁾を用いることにより m_i の幅を任意に小さくすることが可能であるので、 c_i の幅も任意に小さくでき、その結果、 $\lambda_{\text{max}}(YQ)$ を精度保証付きで求めることが可能である。ここで重要なことは、 $\lambda_{\text{max}}(YQ)$ の上限・下限が求まるので、どの程度の精度で求まっているのかが分かり、必要に応じて m_i を精度良く求め、要求の精度で $\lambda_{\text{max}}(YQ)$ (より正確には γ_{opt}) を求められるということである。◇

γ_{opt} が求まったならば、次は γ を選ぶのであるが、その際には、 γ が必ず真の γ_{opt} よりも大きくなるように、 γ_{opt} の上界よりも大きくする必要があることに留意する。さて、 Y と Q を計算し、 γ を選択したならば、 X_∞ と K_{sub} はそれぞれ(6)式と(5)式より計算できる。(6)式より、 X_∞ を含む区間行列が区間行列の積と区間逆行列の計算で求まる。 K_{sub} は(5)式より求めることも可能であるが、多項式を要素とする行列の逆行列の計算が必要となるため、計算時間が長くなる。ここでは、解の特徴を利用することにより、 K_{sub} を計算する簡単な方法を提案する。

リカッチ方程式 $XA + A^*X - XBB^*X + C^*C = 0$ の安定化解を X とし、

$$U_{\text{sub}}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A - BB^*X_\infty & -(X - X_\infty)^{-1}X_\infty YC^* \\ \hline B^*(X - X_\infty) & 0 \end{array} \right],$$

$$V_{\text{sub}}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A - BB^*X_\infty & (X - X_\infty)^{-1}XB \\ \hline B^*(X - X_\infty) & I \end{array} \right]$$

とすると、 $U_{\text{sub}}(s), V_{\text{sub}}(s)$ は $\mathcal{RH}_\infty$ に属し、かつ $K_{\text{sub}} = U_{\text{sub}}/V_{\text{sub}}$ とベズー恒等式 $\tilde{M}V_{\text{sub}} - \tilde{N}U_{\text{sub}} = 1$ を満たす。上の表現で U_{sub} と V_{sub} の分母がどちらも $\det(sI - A + BB^*X_\infty)$ であることに留意する。この事実より、 U_{sub} と V_{sub} が

$$U_{\text{sub}} = \frac{U_{sN}}{U_{sD}}, V_{\text{sub}} = \frac{V_{sN}}{U_{sD}}$$

と書けることが分かる。ここで、 $U_{sD}(s) = \det(sI - A + BB^*X_\infty)$ であり、 $U_{sN}(s), V_{sN}(s)$ は s の多項式である。これより、ベズー恒等式は

$$\tilde{M}V_{\text{sub}} - \tilde{N}U_{\text{sub}} = \frac{P_D}{M_D} \frac{V_{sN}}{U_{sD}} - \frac{P_N}{M_D} \frac{U_{sN}}{U_{sD}} = 1$$

すなわち、

$$P_D V_{sN} - P_N U_{sN} = M_D U_{sD} \quad (13)$$

となる。ここで、 P_D, M_D, V_{sN}, U_{sD} の次数は n で、 U_{sN} のそれは最大 $n-1$ であることに留意する。すると、以下の定理が導ける。

定理5 s に関する多項式 $\bar{U}_N, \bar{V}_N$ の次数がそれぞれ $n-1$ 以下、 n 以下であるという制約のもとで、 $\bar{U}_N, \bar{V}_N$ に関する方程式

$$P_D \bar{V}_N - P_N \bar{U}_N = M_D U_{sD} \quad (14)$$

は唯一の解 $\bar{U}_N = U_{sN}, \bar{V}_N = V_{sN}$ をもち、またそれらは $\mathcal{H}_\infty$ ループ整形問題の準最適制御器 $K_{\text{sub}} = U_{sN}/V_{sN}$ を与える。

証明

与えられた次数の条件のもと、

$$P_D \bar{V}_N - P_N \bar{U}_N = 0 \quad (15)$$

を満たす $\bar{U}_N, \bar{V}_N$ は、 P_N, P_D が互いに素であるので、 $\bar{U}_N = \bar{V}_N \equiv 0$ のみであることが示せる。また、(15)式の s のべき乗の係数は $\bar{U}_N, \bar{V}_N$ の係数に関する連立一次方程式となり、それは $Sv=0$ という形で書ける。ただし、 S は P_N, P_D の係数よりなる行列、 v は $\bar{U}_N, \bar{V}_N$ の係数を縦に並べたベクトルである。 $\bar{U}_N = \bar{V}_N \equiv 0$ のみが解であるという事実より、 S が可逆な行列であることが分かる。

次に、(14)式を満たす $\bar{U}_N, \bar{V}_N$ について考える。上と同様に、 s のべき乗の係数を比較することにより、

$$Sv = c \quad (16)$$

と書ける連立一次方程式が得られる。ここで、 S, v は上と同じで、 c は $M_D U_{sD}$ の係数より決まる。行列 S が可逆であることより、(14)式を満たす $\bar{U}_N, \bar{V}_N$ が唯一決まることが分かる。

U_{sN}, V_{sN} は(13)式を満たし、かつ次数の制約も満たす、すなわち、 $\bar{U}_N = U_{sN}, \bar{V}_N = V_{sN}$ であることは明らかである。よって、準最適制御器 $K_{\text{sub}} = U_{sN}/V_{sN}$ が方程式(14)を解くことにより得られることが示せた。□

U_{sN}, V_{sN} をそれぞれ、

$$U_{sN}(s) = u_{n-1} s^{n-1} + u_{n-2} s^{n-2} + \cdots + u_0, \quad (17)$$

$$V_{sN}(s) = v_n s^n + v_{n-1} s^{n-1} + \cdots + v_0 \quad (18)$$

と書き、(13)式の s のべき乗の係数を比較することにより、証明中にある $Sv=c$ という方程式が得られる。これを v に関して解くことにより、 U_{sN}, V_{sN} の係数 u_i, v_j が求まる、すなわち準最適解が求まる。ここで、実際には、 P_D, M_D, U_{sD} がすべてモニックであるため、 V_{sN} もモニックとなることに留意する。

プラント P の係数が有理数として与えられた場合、(16)式中の行列 S の要素は全て有理数であり、 S^{-1} を $\mathbb{Q}^{(2n+1) \times (2n+1)}$ の中で厳密に求めることが可能である。また、 U_{sD} の係数は X_∞ の要素に関する多項式である。よって、 U_{sN}, V_{sN} の係数は、 M_D の係数と X_∞ の要素に関する多項式であることが分かる。 M_D と X_∞ はそれぞれ精度保証付きで計算することが可能であるので、 U_{sN} と V_{sN} も精度保証付き計算が可能である。すなわち、 $\mathcal{H}_\infty$ ループ整形問題の準最適制御器に関して、その係数を精度保証付きで計算することが可能である。

ここで、上記で構築した精度保証付き $\mathcal{H}_\infty$ ループ整形問題の準最適制御器の計算方法を以下のアルゴリズムの形にまとめる。

1. プラント P の分母 P_D 、分子 P_N を、 P_D がモニックになるように正規化する。精度保証付き多項式スベクトル分解アルゴリズム²⁾を用いて、(7)式中の M_D を求める。
2. 補題2で示された方法で、リカッチ方程式(1)の安定化解 Y を求める。具体的には、 $[\tilde{N} \tilde{M}] = [P_N/M_D, P_D/M_D]$ を可制御正準形で記述し、まずは行列 Y の第1行/列を $[\tilde{N} \tilde{M}]$ の状態空間表現から求め、 Y の残りの部分をリカッチ方程式の上三角部分から求める。その結果、 Y の各要素を M_D の係数に関する多項式で表わす。ここで、真の Y を含む区間行列を求め、以降の計算を進める。
3. リアプノフ方程式(4)の解 Q を含む区間行列を求める。具体的には、まず、 Q を補題3で示された形で表わし、リアプノフ方程式の第1行から得られる連立一次方程式を解く。
4. 真の γ_{opt} を含む区間を、 $\det(\lambda I - YQ)$ と定理4を用いて計算する。 $\gamma > \gamma_{\text{opt}}$ となる γ を選ぶ。ここで、必ず $\gamma > \gamma_{\text{opt}}$ となるように、 γ_{opt} を含む区間の上界より大きな γ を選ぶ。
5. (6)式と区間行列演算を用いて、真の X_∞ を含む区間行列を求める。

6. $U_{sd}(s) := \det(sI - A + BB^*X_\infty)$ を計算し, U_{sd} の係数を X_∞ の要素に関する多項式で表現する.
7. P の次数にしたがって, U_{sN}, V_{sN} を (17)-(18) 式のように表わす. ベズー恒等式 (より具体的には (13) 式) より (16) 式の連立一次方程式を求める. それを解くことにより, U_{sN}, V_{sN} の係数を M_D の係数と X_∞ の要素に関する多項式の形で求める. M_D, X_∞ を含む区間から区間演算を用いて, U_{sN}, V_{sN} の係数を含む区間を求める. それが $\mathcal{H}_\infty$ ループ整形問題の準最適制御器 $K_{\text{sub}} = U_{sN}/V_{sN}$ の真の係数を含む区間である.

もし所望の精度の結果が得られなかったならば, M_D の係数をより狭い幅の区間として求め, 再計算を行う.

4. 数値例

本章ではまず, 以下のプラントを用いて, 提案されたアルゴリズムがどの様に $\mathcal{H}_\infty$ ループ整形問題の準最適制御器を求めるのかを例示する.

$$P(s) = \frac{1}{s^2} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

このプラントに対しては, 厳密解を求めることが可能である. まず, $\gamma_{\text{opt}} = \sqrt{4+2\sqrt{2}} \approx 2.613125930$ であり, $\gamma=3$ とすると準最適制御器は

$$\begin{aligned} K_{\text{sub}}(s) &= -\frac{\frac{144\sqrt{2}}{17}s + \frac{81}{17}}{s^2 + \frac{80\sqrt{2}}{17}s + \frac{224}{17}} \\ &\approx -\frac{11.97922076s + 4.764705882}{s^2 + 6.655122646s + 13.17647059} \end{aligned}$$

と求まる.

前章の最後に示したアルゴリズムのステップに従い計算し, 最終的に γ_{opt} の値と準最適制御器が所望の精度で得られていることを確認する. ここで要求精度は $\varepsilon = 10^{-5}$ とする.

1. 正規化規約分解の分母 M_D の計算

精度保証付き多項式スペクトル分解アルゴリズム²⁾を用いることにより, M_D の係数は以下のように求まる.

$$\begin{aligned} M_D(s) &= s^2 + m_1 s + m_0, \\ m_1 &\in [1.414213560, 1.414213565], \\ m_0 &\in [0.9999999989, 1.000000002] \end{aligned}$$

2. Y の計算

正規化規約分解を, 上記の M_D の係数を用いて以下のような可観測正準系で表わす.

$$\begin{aligned} [N \ M] &= \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{s^2 + m_1 s + m_0} & \frac{s^2}{s^2 + m_1 s + m_0} \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cc|cc} -m_1 & 1 & 0 & -m_1 \\ -m_0 & 0 & 1 & -m_0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

これより Y の第 1 行/列が得られ, Y は以下のように書き表せる.

$$Y = \begin{bmatrix} m_1 & m_0 \\ m_0 & y_{2,2} \end{bmatrix}$$

ここで $y_{2,2}$ は次に求められるべきものである. (8) 式より,

$$\left[\begin{array}{cc} 2m_0 - m_1^2 & -m_0 m_1 + y_{2,2} \\ -m_0 m_1 + y_{2,2} & -m_0^2 + 1 \end{array} \right] = 0$$

が得られ, 上三角部分 (この場合は, (1, 2) 要素のみ) より,

$$y_{2,2} = m_0 m_1$$

という関係式が得られる. $y_{2,2}$ が m_0, m_1 に関する多項式であることに留意する. 以上より,

$$Y = \begin{bmatrix} m_1 & m_0 \\ m_0 & m_0 m_1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

である. (19) 式のように Y を表現したまま, 以下アルゴリズムを続けることも可能であるが, 本アルゴリズムでは以下の, Y を含む区間行列を求め, 以降のステップを行っていく.

$Y \in$

$$\left[\begin{array}{cc} [1.414213560, 1.414213565] & [0.9999999989, 1.000000002] \\ [0.9999999989, 1.000000002] & [1.414213559, 1.414213567] \end{array} \right]$$

3. Q の計算

補題 3 より, Q は以下の形の 2×2 の対称行列となることが分かる.

$$Q = \begin{bmatrix} q_{1,1} & 0 \\ 0 & q_{2,2} \end{bmatrix}$$

これをリアプノフ方程式 (4) に代入すると

$$\left[\begin{array}{cc} -2m_1 q_{1,1} + 1 & q_{1,1} - m_0 q_{2,2} \\ q_{1,1} - m_0 q_{2,2} & 0 \end{array} \right] = 0$$

となる. 第 1 行より,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2m_1 & 0 \\ 1 & -m_0 \end{bmatrix}}_L \begin{bmatrix} q_{1,1} \\ q_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

が得られる. L を区間行列として求め, 区間逆行列の計算を行なうと, 真の $q_{1,1}, q_{2,2}$ を含む区間が得られる.

$$\begin{bmatrix} q_{1,1} \\ q_{2,2} \end{bmatrix} \in \left[\begin{array}{cc} [0.3535533900, 0.3535533911] \\ [0.3535533896, 0.3535533915] \end{array} \right]$$

4. γ_{opt} の計算

ここで鍵となる部分は $\lambda_{\text{max}}(YQ)$ を求めるところである。ステップ2, 3にて既に求めた, 行列 Y, Q を含む区間行列に対し, 区間行列の掛け算と逆行列の計算を行なうことにより真の $YQ = (yq_{i,j})$ を含む区間行列を求めることができる。

$$YQ \in \begin{bmatrix} [0.4999999986, 0.5000000014] & [0.3535533892, 0.3535533918] \\ [0.3535533896, 0.3535533914] & [0.4999999975, 0.5000000025] \end{bmatrix}$$

行列 YQ の特性多項式は以下のようになる。

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\lambda I - YQ) \\ &= \lambda^2 - (yq_{1,1} + yq_{2,2})\lambda + yq_{1,1}yq_{2,2} - yq_{1,2}yq_{2,1} \end{aligned}$$

真の係数を含む区間を計算し, 定理4を用いることにより,

$$\lambda_{\text{max}}(YQ) \in [0.8535533820, 0.8535533990]$$

であることが求まる。よって,

$$\gamma_{\text{opt}} \in [2.613125853, 2.613126005] \quad (20)$$

であることが分かる。本章の冒頭に述べた真の γ_{opt} の値が確かにこの区間の間にあること, またこの区間の幅が要求された精度よりも小さいことに留意する。ここで, $\gamma = 3$ と選ぶ。この値は(20)式に与えられた上界よりも大きい。

5. X_{∞} の計算

(6)式および区間行列演算より, 以下が求まる。

$$\begin{aligned} X_{\infty} &= (x_{\infty; i, j}) \\ &\in \begin{bmatrix} [5.240908651, 5.240909493] & [4.764705441, 4.764706300] \\ [4.764705441, 4.764706300] & [5.240908632, 5.240909513] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

6. U_{sD} の計算

単純な計算により以下が導かれる。

$$U_{sD}(s) := \det(sI - A + BB^*X_{\infty}) = s^2 + x_{\infty; 2, 2}s + x_{\infty; 1, 2}$$

7. U_{sN}, V_{sN} の計算

U_{sN}, V_{sN} をそれぞれ,

$$\begin{aligned} U_{sN}(s) &= u_1 s + u_0, \\ V_{sN}(s) &= v_2 s^2 + v_1 s + v_0 \end{aligned}$$

と書き表す。ベズー恒等式と等価の(13)式の係数を比較することにより

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_1 \\ v_0 \\ u_1 \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ m_1 + x_{\infty; 2, 2} \\ m_0 + m_1 x_{\infty; 2, 2} + x_{\infty; 1, 2} \\ m_0 x_{\infty; 2, 2} + m_1 x_{\infty; 1, 2} \\ m_0 x_{\infty; 1, 2} \end{bmatrix}$$

が得られる。その(厳密)解とそれを含む区間は以下のように求まる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_1 \\ v_0 \\ u_1 \\ u_0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ m_1 + x_{\infty; 2, 2} \\ m_0 + m_1 x_{\infty; 2, 2} + x_{\infty; 1, 2} \\ -m_0 x_{\infty; 2, 2} - m_1 x_{\infty; 1, 2} \\ -m_0 x_{\infty; 1, 2} \end{bmatrix} \\ &\in \begin{bmatrix} [1, 1] \\ [6.655122192, 6.655123077] \\ [13.17646949, 13.17647163] \\ [-11.97922180, -11.97921967] \\ [-4.764706304, -4.764705436] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

以上より, $\mathcal{H}_{\infty}$ ループ整形問題の準最適制御器

$$\begin{aligned} K_{\text{sub}}(s) &= \frac{u_1 s + u_0}{v_2 s^2 + v_1 s + v_0} \\ &= -\frac{(m_0 x_{\infty; 2, 2} + m_1 x_{\infty; 1, 2})s + m_0 x_{\infty; 1, 2}}{s^2 + (m_1 + x_{\infty; 2, 2})s + m_0 + m_1 x_{\infty; 2, 2} + x_{\infty; 1, 2}} \end{aligned}$$

が求まった。なお, u_i, v_i を含む区間は上に与えたとおりである。本章の冒頭に述べた真の準最適制御器の係数がこれらの区間の間にあり, またこれらの区間の幅が全て要求された精度よりも小さいことに留意する。

なおこの数値例では, アルゴリズムの例示を目的としたので, $\varepsilon = 10^{-5}$ とし, やや幅の広い区間を求めた。実際には, より小さい $\varepsilon = 10^{-10}$ を指定することも可能で, その場合, アルゴリズムは, 1.2GHz の Pentium M プロセッサを積んだPC(メモリ 1GB)上で, 1.1 秒程度で真の解を含む, 幅 ε 以下の区間を計算した。

次の数値例では, 注釈1で述べた, 本アルゴリズムの計算結果では厳密な誤差評価が陽に与えられ, 必要に応じて再計算を行ない精度保証ができることを例示する。以下のプラントを考える。

$$P(s) = \frac{s - \frac{1}{4}}{s^6}$$

制御の分野で用いられる数値計算ツールである MATLAB の `ncfsyn` というコマンドはこのプラントに対し, 特に悪条件であるとの警告も発せず, $\gamma_{\text{opt}} = 9637.57165$ という値を計算する。本稿で提案されたアルゴリズムは上述のPC上で約11秒かけて, 真の γ_{opt} の値が間違いなく, 幅が0.001以下である区間

$$[10124.29488, 10124.29535]$$

に含まれているとの計算を行なった。これより, MATLABの計算結果は真の値から5%弱ずれていることが分かる。なお, 本稿で提案した精度保証付きアルゴリズムを用いて上記の精度で求めるためには, m_i を約 10^{-28} 程度の幅の精度で求める必要があったが, その

結果として、実用上十分でかつ厳密な精度評価を伴った数値結果が得られた。(上の値を見ると、 m_i の γ_{opt} に対する感度が非常に高いと思えるかもしれないが、区間演算が多く行なわれているために保守的になっているためであり、実際の感度ははるかに低いと考えられる。)

5. おわりに

本稿では、一入力一出力系に対する $\mathcal{H}_\infty$ ループ整形問題の準最適解を精度保証付きで計算するアルゴリズムを構築した。制御対象の伝達関数の係数が有理数で与えられたとき、本アルゴリズムを用いることによって達成可能な最適性能値と準最適制御器の伝達関数の係数を、精度保証付きで計算することができる。本アルゴリズムでは、多項式スペクトル分解を用いることにより、リカッチ方程式を直接解かずに済ませ、また、リアプノフ方程式を解く際にも解の構造を利用し、解かれるべき変数の数を大幅に減らしている。さらに、準最適制御器を導出する部分で、係数が有理数の連立一次方程式を解けばよいことを示し、複雑な行列計算が避けられ、アルゴリズムの効率化が図られた。現段階では、7次のシステム程度までは実用的な計算時間で実行されるが、今後アルゴリズムのさまざまな部分の高速化を行なわれ、より高次の現実的なシステムに対しても精度保証付き計算が行なえるように改良されることが期待される。その他の課題としては、本アルゴリズムの計算量の理論的解析、及び、多入力多出力

への拡張が挙げられる。

参考文献

- 1) L. Jaulin, M. Kieffer, O. Didrit, and É. Walter: Applied Interval Analysis, Springer-Verlag (2001)
- 2) M. Kanno and M. C. Smith: Guaranteed accuracy computations in systems and control, Proceedings of the European Control Conference ECC 2003, Cambridge, U.K. (2003)
- 3) 古賀雅伸, 廣木聡憲: 精度保証付き数値計算に基づく制御系設計, 第5回計測自動制御学会制御部門大会予稿集, 707/710 (2005)
- 4) M. Kanno and M. C. Smith: Validated numerical computation of the $\mathcal{L}_\infty$ -norm for linear dynamical systems, Journal of Symbolic Computation, **41**-6, 697/707 (2006)
- 5) G. Vinnicombe: Uncertainty and Feedback – $\mathcal{H}_\infty$ loop-shaping and the v -gap metric, Imperial College Press (2001)
- 6) K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover (劉康志, 羅正華訳): ロバスト最適制御, コロナ社 (1997)
- 7) N. J. Higham, M. Konstantinov, V. Mehrmann, and P. Petkov: The sensitivity of computational control problems, IEEE Control Systems Magazine, **24**-1, 28/43 (2004)
- 8) 大西政彦, 管野政明, 原辰次: $\mathcal{H}_\infty$ ループ整形設計法を用いた制御しやすさの特徴づけ, 第6回計測自動制御学会制御部門大会予稿集, 239/242 (2006)
- 9) E. Hansen: Interval arithmetic in matrix computations, part I, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics: Series B, Numerical Analysis, **2**-2, 308/320 (1965)
- 10) M. Kanno: Guaranteed Accuracy Computations in Systems and Control, PhD dissertation, University of Cambridge (2003)
- 11) A. M. Ostrowski: Solution of Equations in Euclidean and Banach Spaces, 3rd edition, Academic Press (1973)