シミュレーションの世界

制御理論研究とシミュレーション

福島 直人*

ABSTRACT Newly developed optimal control theory based on energy equation was introduced. The point of this theory is to utilize the self solving mechanism which is included in closed loop systems as a general characteristic. For this purpose, the energy equation of controlled system is focused on. In this method, the functional consists of total energy of controlled system, performance function and energy function. This energy function is described by energy flow which is transmitted from controller to controlled system. Being shown as a first-order expression concerning control variables, the functional is able to induce the optimal system equation from the condition which minimizes the functional. Then optimal control is realized by putting the optimal equation into closed loop system without solving the equation. This method is useful for nonlinear mechanical control systems because real time control can be realized by this method. In this research, computer simulation plays important roles, especially in proving the theoretical assumptions, understanding the meaning of the mathematical equations exactly and so on. Looking over these works, the importance of simulation was presented.

1. まえがき

自動車の運動制御関係のエンジニアを長いことやっていて制御システムの研究開発に携わることが多かったため多少の制御理論の知識はあったが，実際に使ったのは古典的な比例制御の範疇を出なかった．ところが数年前から，難解そうで近寄りがたく脇から眺めていただけであった最適制御理論がなんとも魅力あるものに感じられるようになり，3年半前に会社を辞めたのを契機に最適制御理論の研究にチャレンジすることにした．神田の古書街でポントリャーギンの有名な“最適過程の数学的理論”の日本語訳[1)]を偶然見つけ，一週間ベタで気合をいれて読んでみたが，最大原理の証明については半分も理解できなかったことを憶えている．その時，変分法を勉強しないことには話しにならないということを骨身にしみて学んだ．その後，自宅の本棚の片隅に積んであった(なぜこんな本が買ってあったのか記憶もないが！)エルスゴルツ著“科学者・技術者のための変分法”[2)]を引っ張り出しホコリを叩いて勉強を始めた．こんなにわか勉強をやりながら，ずうずうしくも，最適制御と名のつく論文を5編ほど論文誌に掲載させていただいた．これも，シミュレーションが好きで長い間車両運動のシミュレーションなどをやってきた経験があったため，一種の“思考支援ツール”としてシミュレーションを活用できたからだと思う．理論仮説を立てそれを実証するためシミュレーションを活用するあるいは数式のもつ意味を正確に把握するためシミュレーションで感触を掴んだりなど高等な数学を学んだことのない一介のエンジニアが理論的な研究を行なう時にシミュレーションの果たす役割は計り知れない．その辺の事情を文献3)の論文作成時を振りかえって紹介してみたい．

Simulation for Development of Control Theory. By *Naoto Fukushima* (Dept. of Mechanical Sciences and Engineering, Graduate School of Science and Engineering, Tokyo Institute of Technology).
*東京工業大学大学院理工学研究科

2. 新しい最適制御理論の試み

2.1 最適制御理論の概要

最適制御則を求める手順の概要を述べれば，最小化すべき評価関数の被積分関数に付帯条件として制御対象の状態方程式の右辺と随伴変数の積を加えてこれをハミルトニアン H とし，この H を制御変数 u で偏微分したものをゼロと置いたときこれを満たす u が最適制御則になるということになろうか．ここで求まる制御則には随伴変数が含まれているため，結局随伴変数についての微分方程式を解かねばならず，最適制御則を解析的に導くことは容易ではない．

この状況はポントリャーギンが最大原理を見出して50年を経た現在でも変わらず，そのため様々な数値探索的方法や推論的手法が工夫されてはいるが，依然として見通しの良い解析的手法が望まれているのも事実

である．そこで次節のような微分方程式を解かなくても解析解が求まる最適制御理論を考案した．

2.2 エネルギ収支に着目した最適制御理論

一般的に最適制御では制御則 u を計算するのに制御対象の出力を用いるため**図1**のような閉ループ系を構成する．ここに紹介する理論はこのような閉ループ系が持つ“自分で微分方程式を解く性質”を積極的に活用するものである．そのために汎関数をパワー収支をベースに構成するところが特徴である．まず制御入力に関する評価関数を制御装置から制御対象に伝達されるエネルギとし，これに制御性能を表現する関数を加えて全体の評価関数とする．さらに付帯条件として制御対象の完全なエネルギ収支の式を加えて汎関数とする．こうするとこの汎関数を最小化する条件から新しく u を入力とし q を出力とする方程式が導かれ，これを閉ループに組み込むことで微分方程式を解かずに最適制御が実現できる．この手法は制御対象が線形・非線形を問わず適用できしかも実時間制御が可能であるため，主として機械力学系システムの比較的広範囲の最適制御問題に適用できる．

3. なぜ微分方程式を解かなくてよいのか

上記をもう少し具体的に説明する．制御対象のパワー収支式は，式(1)に示すようにシステムの各自由度毎の運動方程式をベクトル表示しこれに速度ベクトルを乗じたものである．これを積分すればエネルギ収支式が得られる．

$$u^T\dot{q} + v^T\dot{q} - \ddot{q}^T M(q)\,\dot{q} - d^T(q,\dot{q})\,\dot{q} - e^T(q,z)\,\dot{q} = 0 \tag{1}$$

ここで，$d, e, q, u, v, z \in R^n, M \in R^{n\times n}$ は慣性マトリクス，n は制御対象の自由度，q は一般化座標，u は制御入力である．v は力入力の外乱，z は変位入力の外乱である．d はコリオリ力や遠心力やダンピング力など，e はポテンシャル力である．

上記のシステムに対し，次の評価関数を考える．

$$J = \int \{g(q,\dot{q},\ddot{q}) + ru^T\dot{q}\}\,dt \tag{2}$$

ここで g は制御性能の評価を与えるスカラー関数であり，$u^T\dot{q}$ は制御装置のアクチュエータが制御対象に加えるパワー，r は重み係数で正定値である．また本理論は実時間制御を対象としており，有限評価区間を前提としている．式(2)が最小値をもつことは制御対象が受動的であることを利用して容易に証明することができる．

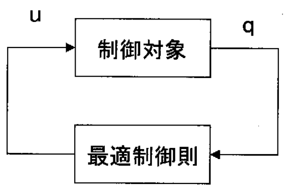

図1　最適制御系のブロック線図

最適制御の必要条件を求めるため次のスカラー関数 L を定義する．

$$L = \kappa\{u^T\dot{q} + v^T\dot{q} - \ddot{q}^T M(q)\,\dot{q} - d^T(q,\dot{q})\,\dot{q} - e^T(q,z)\,\dot{q}\} + g(q,\dot{q},\ddot{q}) + ru^T\dot{q} \tag{3}$$

ここで，κ は定数である．右辺の{ }内は，式(1)の左辺と同じで制御対象の全パワー収支であるからエネルギ保存則を満たし常にゼロである．従って式(3)で表される L の積分を最小化する条件は，式(2)も最小化する．L の積分を最小化するための必要条件は次のオイラー・ポアソンの方程式から得られる．L は u に関して1次式であるから，$\partial L/\partial u$ は意味がなく次式に制御に関するすべての情報が集約される．

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right) = 0 \tag{4}$$

式(4)を積分し積分定数をゼロとすると次式になる．

$$\int \frac{\partial L}{\partial q}\,dt - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right) = 0 \tag{5}$$

式(3)を式(5)に代入し左辺第1～3項の順に記すと次のようになる．

$$\begin{aligned}&\kappa\int \frac{\partial}{\partial q}\left(-\ddot{q}^T M\dot{q} - d^T\dot{q} - e^T\dot{q}\right)dt + \int \frac{\partial g}{\partial q}\,dt\\ &- \kappa\left\{u^T + v^T - \ddot{q}^T M - \frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(d^T\dot{q}\right) - e^T\right\}\\ &- \frac{\partial g}{\partial \dot{q}} - ru^T + \frac{d}{dt}\left(-\kappa\dot{q}^T M + \frac{\partial g}{\partial \ddot{q}}\right) = 0\end{aligned} \tag{6}$$

式(6)の u を左辺に他を右辺に持ってくれば次式のように制御則らしきものが得られ，実際にこれで制御するとかなりうまくいくことがわかってきた．

$$\begin{aligned}u^T = \frac{1}{\kappa + r}\Bigg[&-\kappa\left\{v^T + \dot{q}^T\frac{d}{dt}M + \int \frac{\partial}{\partial q}\left(\ddot{q}^T M\dot{q}\right)dt\right\}\\ &+ \kappa\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(d^T\dot{q}\right) - \int \frac{\partial}{\partial q}\left(d^T\dot{q}\right)dt\right\}\\ &+ \kappa\left(e^T - \int \frac{\partial}{\partial q}\left(e^T\dot{q}\right)dt\right)\\ &+ \int \frac{\partial g}{\partial q}\,dt - \frac{\partial g}{\partial \dot{q}} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial \ddot{q}}\right)\Bigg]\end{aligned} \tag{7}$$

ところがよく考えてみると，式(5)は L を状態量で偏微分したものであるため，式(6)の意味は L の積分を最小化するために状態量がどう振舞うべきかを記述した運動方程式であって，決して制御則ではない．別の見方をすれば，L の積分を最小化するための仮想的

なあるいは理想的なシステムの運動方程式を記述したものともいえる．一方，式(7)はこの理想的なシステムの入出力を逆にしたもので形の上では制御則ではある．これが最適制御則ということになれば，もとの式(6)の運動方程式はどのような複雑で非線形なシステムであろうと簡単な操作でほぼ自動的に求まるため適用分野も広く極めて有益な手法となりうる．

では一般論として理想的な特性の逆特性を制御則として用いると最適制御則になるのであろうか，実はここに閉ループ系の重要な性質が隠されているのである．隠されているというのは少し大袈裟で当たり前すぎて誰も注目しなかったという方が正しいかもしれない．この理論を完成させるためには，この閉ループ系の性質の活用が必須の事項であったが，このあたりについて自分自身で得心のいく見解が持てるようになるためにシミュレーションが大変役に立った．一言でいえば閉ループ系には方程式を解く性質があるのでこれを前面に出した手法にすればよいということである．以下**図2, 3**により具体的に説明する．

図2(a)の上段のブロックはuを入力とする制御対象Aの微分方程式(式(1)を速度ベクトルで除したものに相当)を表し，下段のブロックは同じuを入力とする理想特性B(式(6)に相当)を表している．制御入力uによって制御対象をあたかも理想特性であるかのように振舞わせたい訳であるから，uがJを最小化する最適制御であれば，制御対象と理想特性にuを入力した場合に双方の出力q_1, q_2が同じになるはずでありこれが最適制御であるための必要条件となる．

このようなuを求めるためには，図2(b)のように制御対象と理想特性の方程式を連立させてuを消去した微分方程式を解いてqを求め，このqを理想特性の逆特性(式(7)に相当)に入力して求めることになる．

しかし，ここで，図2(c)のように理想特性の逆特性を用いて閉ループを構成すると，閉ループ系の性質により結果的に前記連立方程式を解いたことになり，微分方程式を解かずに最適なuを求めることができる．この点をもう少し説明する．閉ループ系であるためBの逆特性出力とA特性入力，A特性出力とBの逆特性入力は同一波形である．このことから閉ループ系ではシステムAとシステムBの順特性とはuに対する応答が同一になっていなければならないといえる．ということはシステムAとシステムBの順特性の連立微分方程式の解qが得られたということであり，別の見方をすれば理想システム特性の逆特性を制御則として用いると制御対象が理想システムのように振舞うということもできる．

さらにイメージを明確にするため，システムA, Bを簡単な特性で置き換えて上記内容をシミュレーションにより確認した結果を見てみよう．図3に示すように，A特性を次式のような線形2次遅れ系に速度と変位の相乗項を加えた非線形特性とし，

$$\ddot{q} + 2\dot{q} + 3q - 10\dot{q}q = u \tag{8}$$

これを次のような線形1次遅れ系(B特性)に変換した

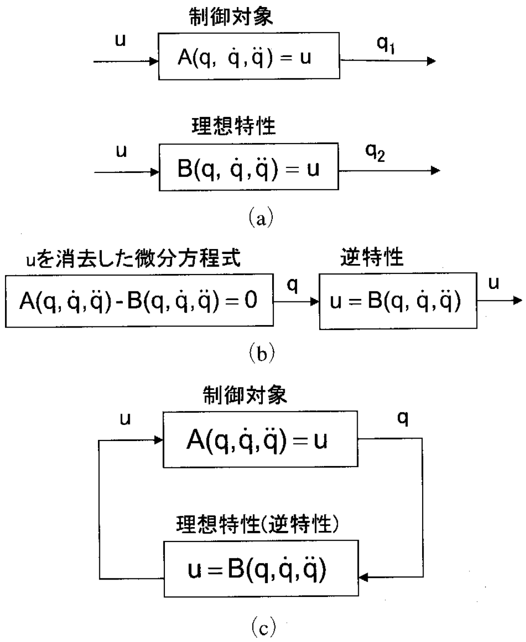

図2　制御対象と理想特性

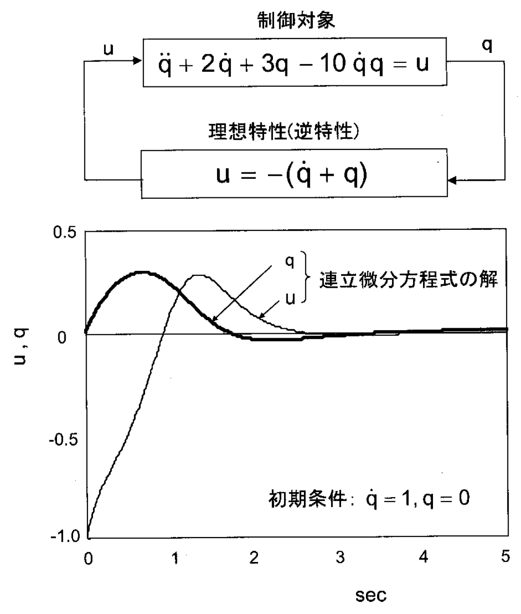

図3　閉ループ系の微分方程式を解く機能

いとする．

$$-(\dot{q}+q)=u \tag{9}$$

図3の q, u の波形は閉ループシミュレーションの結果であるが，これらは同時に式(8),(9)の連立微分方程式の解でもある．従ってこの u の時刻歴データを取り出して式(8),(9)のA, B単独特性に入力すれば同一の出力が得られる．この例のようにAとBの特性が大きく異なっても入出力が一致するところが面白いというか不思議議でもある．Bを簡単な特性としたが，式(6)のような複雑で非線形かつ積分要素を含んでいてもあるいは u についての微分や積分を含んでいても成り立つことは明らかである．

このように，閉ループ系の特性を利用して“制御対象を理想特性に変換するという発想をベースにした制御理論”はおそらく初めてであろうと思う．しかもシステム特性を変換するだけであるから微分方程式を解く必要はなく，制御システムの中で制御対象であるハードウエアの実際の運動とコンピュータ内の理想運動方程式が協調して実時間で連立方程式を解いていることになる．式(7)の制御則には未実行の微積分項が含まれているが，全ての外力と状態量の検出あるいは推定が可能とすればこれらの実時間での実行は容易である．

とここまで書いてくると読者から，“一般にフィードバック制御では開ループ系を $H(s)$ としフィードバック制御を $G(s)$ とすると閉ループ系は，$H(s)/(1+H(s)G(s))$ であって単純にフィードバック制御の逆特性にはならないのでは？”という疑問が出されるかもしれないが，この疑問は古典制御でいうところのフィードバック補償と図1のような閉ループ系の相違を理解すれば解消されよう．

4.　最大原理をシミュレーションで確認する

従来理論では $\partial L/\partial u=0$ から直接制御則を導けば最大原理により最適性は保証される．本理論では最大原理とは異なる手法で制御側を導いているが，得られる制御則は結果的に最大原理を満たしているはずである．**図4**に示すようなアクティブサスペンションの振動とエネルギ回生の問題を取り上げて，シミュレーションによりこれを確認する．こんな簡単な問題でも，評価関数が2次形式にならないため従来の最適レギュレータ理論では解析解を求めることはできない．

まず評価関数を次のように記述する．

$$J=\int\left\{r_1\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+ru\left(\dot{q}_2-\dot{q}_1\right)\right\}dt \tag{10}$$

ここで，r_1, r は重み係数である．上式の被積分第3項はアクチュエータが車両に加えるパワーであり2次形式になっていない．

図4のモデルから式(3)の L を求め式(5)に代入すると次の制御則が得られる．

$$u_{opt}=\frac{1}{r+\kappa}\left\{\rho_1\kappa K_1 q_0+2\left(\rho_1 r_1-2\kappa C_2\right)\dot{q}_1 +2\left(-\rho_1+2\kappa C_2\right)\dot{q}_2\right\} \tag{11}$$

ここで，$\rho_1=2M_1/(M_1+r_1M_2)$，$\rho_2=2r_1M_2/(M_1+r_1M_2)$ である．

MATLAB/SIMULINKによるランダム路面入力シミュレーションにより制御性能を評価した．以下に概要を示す．制御性能比較のため u_{opt} 以外にパッシブダンパ制御とスカイフックダンパ制御を選び，制御則をそれぞれ $u=-1200(\dot{q}_2-\dot{q}_1)$，$u=-9300\dot{q}_2$ とした．パッシブダンパ制御は図4のパッシブダンパ C_2 と同等の機能を制御で出すものである．スカイフックダンパ制御ははばね下振動を押さえる機能がないためダンパが必要であり $C_2=1200\mathrm{Nsec/m}$ とし，他はすべて $C_2=0$ とした．評価関数 J を振動に関する部分 J_1 と制御入力(回生エネルギ)に関する部分 J_2 に分離すると次のようになる．

$$J_1=\int_0^2\left\{r_1\dot{q}_1^2(t)+\dot{q}_2^2(t)\right\}dt \tag{12}$$

$$J_2=\int_0^2 ru(t)\left\{\dot{q}_2(t)-\dot{q}_1(t)\right\}dt \tag{13}$$

図5は各制御について J_1, J_2 の比較を行ったものである．本制御は，パッシブダンパ制御のエネルギ回生と同等でありながらスカイフックダンパ制御より振動を低減させており良好な性能を有していることがわかる．

本理論により良好な制御則が得られることは分かった．次に最大原理をシミュレーションにより確認する．まず図4のモデルを次の状態方程式で表し，

$$\dot{x}=Ax+Bu \tag{14}$$

ハミルトニアン H を次のように置く．

$$H(x,y,\lambda)=R_1x_3^2+x_4^2+Ru\left(x_4-x_3\right)+\lambda^T(Ax+Bu) \tag{15}$$

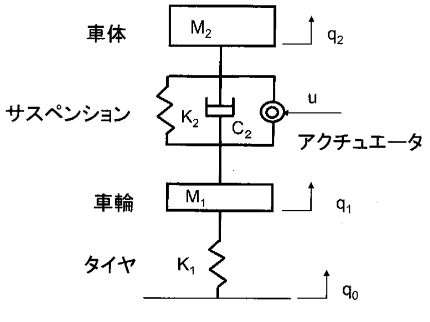

図4　アクティブサスペンションモデル

ここで λ は未定乗数ベクトルである.

制御が最適であるなら次の式(16),(17)を満たすことになる.

$$\frac{\partial H}{\partial u}=0 \tag{16}$$

$$\dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial x} \tag{17}$$

式(15),(17)より, 次式が得られる.

$$\dot{\lambda}_1=-a_{31}\lambda_3-a_{41}\lambda_4 \tag{18}$$

$$\dot{\lambda}_2=-a_{32}\lambda_3-a_{42}\lambda_4 \tag{19}$$

$$\dot{\lambda}_3=-2R_1x_3+Ru-\lambda_1-a_{33}\lambda_3-a_{43}\lambda_4 \tag{20}$$

$$\dot{\lambda}_4=-2x_4-Ru-\lambda_2-a_{34}\lambda_3-a_{44}\lambda_4 \tag{21}$$

本手法の制御則が最適制御に近いことを示すには, 次の2段階のステップを踏めばよい.

①本手法の制御則 u_{opt} を用いたシミュレーションにより得られる x_3, x_4 の各時刻歴データを用いて, 微分方程式(18)～(21)より λ_1 ～ λ_4 を計算する.

②次に,上記で得られた λ_3, λ_4 を用いて次式を計算する.

$$\frac{\partial H}{\partial u}=R\left(x_4-x_3\right)+b_3\lambda_3+b_4\lambda_4 \tag{22}$$

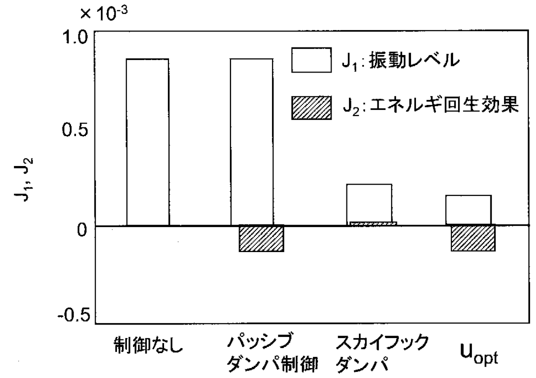

図5　各種制御則比較

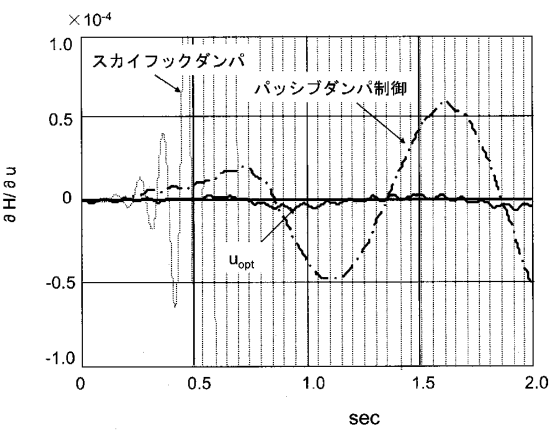

図6　最大原理のシミュレーションによる確認

この値がゼロになっていれば, 結果的に本手法の制御則は最適制御になっているとみなすことができる. あるいはゼロにならなくても, 同様にして求めたスカイフックダンパ制御とパッシブダンパ制御の場合の $\partial L/\partial u$ の値と比べてゼロに近ければ, u_{opt} は最適制御とみなすことができる.

結果を**図6**に示す. スカイフックダンパ制御とパッシブダンパ制御の場合の $\partial L/\partial u$ の値は急激に発散していくのに対して, 本制御則 u_{opt} は発散の傾向はわずかであり, 他の2つに比べ微小値を維持していることがわかる.

以上のシミュレーション結果は式(11)が最適であるための“状況証拠”に過ぎないが, それでも工学的立場からみれば立派な有効性の確認であり, この結果が得られたことで論文誌に自信を持って投稿することができた.

5.　シミュレーション雑感

理論仮説をシミュレーションで確認するステップを繰り返しながら最適制御の研究をしてきた. 最適制御にこだわったのは, 文献4)の中の“最適制御の面白さは常識では予想できない制御則が求まる可能性があること”という主旨の記述に共感したためであったが, 実際に研究をやってみてやはりその通りだと実感する. 今回は紙面の都合で紹介できなかったが, 本制御理論の適用により機械の運動制御の分野で“常識では予想できない制御則”がいくつか生まれている.

CAEの有力なツールとして各種シミュレーションソフトが商品化され開発の現場で使われている. CAEソフトウエアに蓄積された技術ノウハウを若いエンジニアが縦横無尽に活用してスピーディな商品開発が行なわれれば大変結構なことであるが, ともすると便利さゆえに“思考の省力化”に陥りがちなところが危惧される. 自分自身の能力向上ための“思考支援ツール”あるいは“思考力を鍛えるためのツール”としての役割もシミュレーションにはあるのではないかと考え拙い体験を紹介してみた.

参　考　文　献

1) ポントリャーギン他, 関根智明訳：最適過程の数学的理論, 文一総合出版 (1967)

2) L.E.エルスゴルツ, 瀬川富士訳：科学者・技術者のための変分法, ブレイン図書出版 (1972)

3) 福島直人：制御対象のエネルギ収支に着目した機械力学系の最適制御, 日本機械学会論文集(C編), **72**-722 (2006)

4) 加藤寛一郎：工学的最適制御, 東京大学出版会 (1988)