

ロバスト制御とロバスト最適化： 非線形の不確かさを扱うための解法

大 石 泰 章*

ABSTRACT A robust method for control and optimization is discussed in this paper. First, control of a crane is considered as an example to show importance of robustness. The problem is formulated as a robust semidefinite programming problem, which is an optimization problem nonlinearly dependent on uncertain parameters. Since this problem is difficult to solve directly, an approximate method is considered. In particular, a recent method called a matrix-dilation method is explained in detail with its properties. Finally, robust optimization is applied to nonlinear optimization and nonlinear control.

1. なぜロバスト性か

本稿ではロバスト性について議論する。本稿で考えるロバスト性とはどのようなものであり、どのように大切であるかをみるために具体的な例から始めたい。

高層建築物の建設などに使われるクレーンでは、作業の影響や風の影響によるロープやブーム(腕木)の振動が問題となっている。高木・西村¹⁷⁾は、ブームを支えるロープに加える力をタイミングよく調節することによって振動を抑制することを考えた。図1に彼らのモデルを単純化したものを示す。ただし、 L, W はブームの長さおよび質量、 ℓ はロープの長さ、 w は吊り荷の質量、 v はブームの角度、 ϕ はロープの角度、 h はブームに加える力を表す。このモデルのダイナミクスは非線形の微分方程式で表現できるが、例えばロープの長

さ ℓ を1m, 基準のブーム角度 v_0 を45度と決めてやれば¹⁾, 平衡点の周りで線形化することにより最適化の方法を使って制御則を求めることができる。

求めた制御則を使った場合のシステムの挙動を図2に示す。ここでは、ロープの角度 ϕ を時刻0において1度とした場合、それ以降の時刻でどのように変化するかを示している。この例では安定化だけを目標にして制御則を設計しているので振動的ではあるが、 ϕ は零に収束していて安定に制御できていることがわかる。しかし実はこれは見せかけにすぎない。

クレーンを使う場合には、ロープの長さ ℓ を短くして使う場合もあるし長くして使う場合もある。また、基準ブーム角度 v_0 を小さくして使う場合もあるし大きくして使う場合もある。こうした場合にも同じ制御則

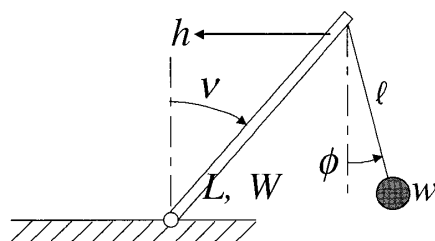


図1 クレーンのモデル

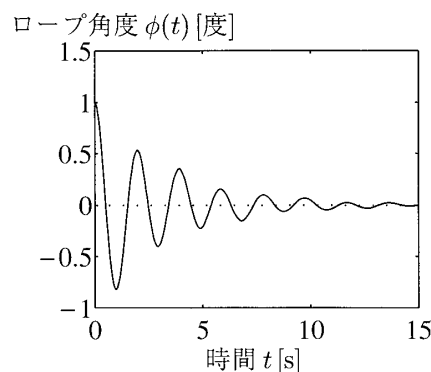


図2 ロバストでない制御：標準的なパラメータ値の場合

Robust Control and Robust Optimization: A Method for Problems with Nonlinear Uncertainty. By Yasuaki Oishi (Department of Information Systems and Mathematical Sciences, Nanzan University).

* 南山大学数理情報学部

1 ロープの長さが短いのは、実験室用モデルを考えているからである。

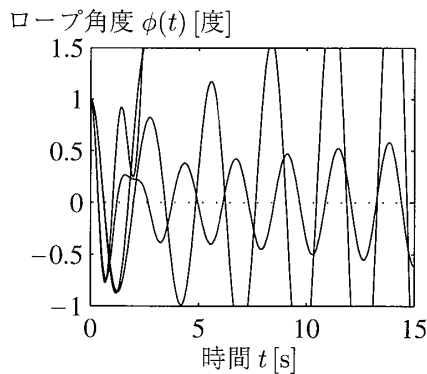


図3 ロバストでない制御：変化したパラメータ値の場合

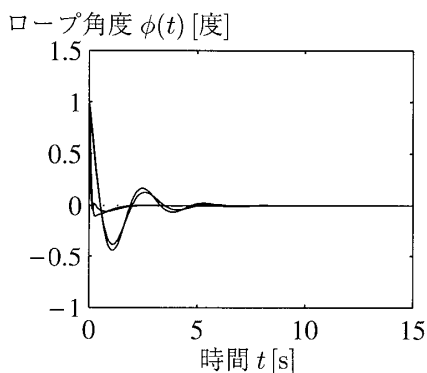


図4 ロバストな制御

を使って振動抑制ができることが望ましい。図3に、 ℓ と v_0 を異なる値にした場合の挙動を示す。 ℓ の値として0.5mと1.5m、 v_0 の値として40度と50度を使った合計4通りの場合を実験しているが、いずれもロープの角度 ϕ が発散してしまって不安定になっている。つまり先の制御則はロバスト(頑健)でない。一方、図4にロバストな制御則を使った場合の結果を示す。4通りの場合いずれについても零に収束しており、こちらの方が良い制御則だと考えられる²。

以上の状況を図5にまとめる。

クレーンの制御のような現実世界の問題を解くために、微分方程式のような数理の言葉を使って問題を表現し、最適化のような数理的方法を使って解を求めるということは、工学において広く行なわれている。しかし、パラメータの変化のような不確かさのために現実の問題とその数理的表現とが整合しなくなると、せっかく求めた数理的な解が現実世界では役に立たないということになりかねない。これは困ったことであ

2 この設計例では安定化だけを目標にしているのので、零に収束する速さが改善しているのは偶然である。

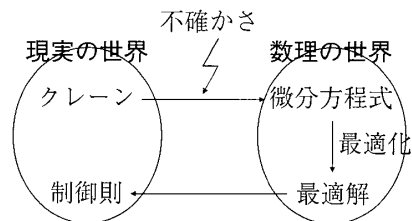


図5 数理的方法による問題解決

る。なぜならこのような「不確かさ」は、パラメータの変化以外にも、数理的表現を得る際のモデル化誤差や、現実の対象の経年変化や環境変化などさまざまな原因で生じうるからである。したがって、現実世界の問題解決に役立つような数理的方法とは、多少の不確かさがあっても機能するようなロバストなものでなくてはならない。

制御理論の分野ではロバストな制御の方法論が1980年代以来整備されてきていて、**ロバスト制御**と呼ばれている^{1,19)}。また、この方法論を**ロバスト最適化**として解釈し、より広い範囲の問題に使おうという試みが1990年代後半から行われている^{2,3)}。本稿ではロバスト制御とロバスト最適化について、特に非線形の不確かさを扱う方法に焦点をあてて説明する。

2. 最適化とロバスト最適化

本節では、前節で考えたクレーンの振動抑制制御を例にして、制御則の設計問題が最適化問題に定式化されること、さらにロバストな制御則の設計問題がロバスト最適化問題に定式化されることを説明する。

前節で述べたように図1のシステムのダイナミクスは非線形の微分方程式で表現されるが、基準ブーム角度 v_0 を定め、 $v=v_0$ 、 $\phi=0$ が平衡点となるような力 h を h_0 と書くと、平衡点の周りで線形化したダイナミクス

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t) + bu(t)$$

を得る。ただし、 $\dot{\xi}(t)$ は $\xi(t)$ の時間 t に関する導関数を表し、 $\xi(t)$ は時刻 t における状態変数 $[v(t)-v_0 \ \phi(t) \ \dot{v}(t) \ \dot{\phi}(t)]^T$ 、 $u(t)$ は時刻 t における入力 $h(t)-h_0$ を表す。また行列 A 、ベクトル b は、重力加速度 g および $a = W/3 + w \sin^2 v_0$ を使って

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{g(W/2+w)}{aL \cos v_0} & \frac{gw \cos v_0}{aL} & 0 & 0 \\ -\frac{g(W/2+w)}{a\ell} & -\frac{g(W/3+w)}{a\ell} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\cos v_0}{aL} & \frac{\cos^2 v_0}{a\ell} \end{bmatrix}^T \quad (2)$$

と表される．入力 $u(t)$ の定め方を制御則というが，最も基本的な制御則はある定数ベクトル k^T を使って

$$u(t) = k^T \xi(t)$$

とすることであり，これを状態フィードバックという．これを使う場合，われわれがすべき制御則の設計とは，制御系，すなわち制御則を適用したシステム全体が良い性質を持つようにベクトル k^T を定めることである．

ベクトル k^T を定める方法は種々あるが，ここでは1990年代以降発達した最適化に基づくアプローチを考える^{1),5)}．ベクトル z^T ，対称行列 Y ，スカラー r の1次関数で対称行列を値とするもの

$$F(z^T, Y, r) = \begin{bmatrix} rI - AY - bz^T & O & O \\ -YA^T - zb^T & O & O \\ O & rI + Y & O \\ O & O & I - Y \end{bmatrix}$$

に関して，最適化問題

C_0 : 最小化 r

条件 $F(z^T, Y, r) \succeq O$

を考える．ただし条件の不等式は，対称行列 $F(z^T, Y, r)$ が半正定値，すなわちすべての固有値が非負であることを意味する．この条件が成り立つとき $k^T := z^T Y^{-1}$ によってベクトル k^T を定めると，制御系は r で表される性能を持ち，特に $r < 0$ ならば安定となる．

最適化問題 C_0 は半正定値計画問題という問題の一種であり，内点法によって効率的に解ける．最小化によって r が負になれば，対応する $k^T = z^T Y^{-1}$ は制御系を安定にするので制御則の設計ができることになる．最適化に基づくこのようなアプローチは，ここで考えたような安定化だけでなく， H^∞ 制御や H^2 制御のようなさらに進んだ制御の問題にも適用することができる．安定化の場合には， $r < 0$ になりさえすればよいので r を最小化することの意味は少ないが， H^∞ 制御や H^2 制御の場合，目的関数を最小化することが制御性能を最適化することになる．

しかし前節でみたようにパラメータ ℓ や v_0 が不確かなときは，以上のアプローチでは不十分である．不確かなパラメータをまとめて $\theta = [\ell \ v_0]^T$ と書くことにする．式(1),(2)に見るように，行列 A とベクトル b はパラメータ θ に依存しており，したがって関数 F もこれらに依存しているので $F(z^T, Y, r; \theta)$ と書くことにする．特定の θ の値，例えば $\ell = 1[\text{m}]$ ， $v_0 = 45[\text{度}]$

に関して，ある (z^T, Y, r) が $F(z^T, Y, r; \theta) \succeq O$ を満たしたとしても，別の θ の値に関して満たすとは限らない．すなわち，ある $k^T = z^T Y^{-1}$ が特定の θ の値に関して制御系を安定化したとしても，別の θ の値に関して安定化するとは限らない．これが図3で見た不安定現象の原因である．

こうした場合の対処法の一つは，最適化問題 C_0 の代わりに

C : 最小化 r

条件 $F(z^T, Y, r; \theta) \succeq O \ (\forall \theta \in \Theta)$

を考えることである．ただし Θ はパラメータ θ がとりうる値の集合で，例えば $\Theta := \{\theta = [\ell \ v_0]^T \mid 0.5[\text{m}] \leq \ell \leq 1.5[\text{m}], 40[\text{度}] \leq v_0 \leq 50[\text{度}]\}$ とする．最適化問題 C の条件は，ベクトル $k^T = z^T Y^{-1}$ を使えば制御系はすべての $\theta \in \Theta$ に関して性能 r を持つことを意味する．特に最小化の結果 $r < 0$ となれば，すべての $\theta \in \Theta$ に関して安定であり，ロバストな制御ができることになる．上の C のような最適化問題をロバスト最適化問題，特にロバスト半正定値計画問題という．

不確かなパラメータに対してロバストな制御則を求める問題は，ロバスト最適化問題に定式化された．しかしまだ問題は解決していない．ロバスト最適化問題 C は無限本の不等式を条件に持つのでこれを解くのは難しい．しかも関数 $F(z^T, Y, r; \theta)$ のパラメータ θ に対する依存性は，式(1),(2)にみるように著しく非線形である．制御の分野では，非線形構造を無視して線形の不確かさを持つロバスト最適化問題に帰着させて解くことが多かった．このようにすると解を保守的に求めることになり，本当はすべての $\theta \in \Theta$ に対してロバストに安定化する k^T が存在するのに，そのような k^T はないという答えが出てしまうことがしばしばであった．

次節では，ロバスト最適化問題の非線形構造を陽に考え，保守的にならずに解く方法を紹介する．

3. 非線形構造を考えたロバスト最適化

3.1 問題設定と解法

前節では，クレーンの振動抑制制御を例にしてロバスト最適化問題を導入したが，本節ではより一般的な問題設定のもとで議論する．

クレーンの振動抑制制御の場合，最適化の変数は z^T ， Y ， r のうちの独立な要素であった．これを以下では n 次元ベクトル $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ で表す．また目的関数は x の線形関数 $c^T x$ とする．クレーンの振動抑制制御の場合，条件の不等式の両辺に $a \cos v_0 > 0$ をかけ， $1/\ell$ と $\cos v_0$ をあらためてパラメータ θ だと考えれば，条件

の不等式はパラメータの多項式になる．そこで以下では，ロバスト最適化問題の条件を $F(x, \theta) \succeq O$ と書き， F は対称行列を値とする関数で， x に関して1次関数， θ に関して多項式であるものとする．ただし $\theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_p]^T$ は p 次元のパラメータで，そのとりうる値の集合 Θ は $\mathbb{R}^p$ 中の凸多面体であるとする．以上の設定のもとで，考えるべき問題は

P : 最小化 $c^T x$

条件 $F(x, \theta) \succeq O \ (\forall \theta \in \Theta)$

となる．

ロバスト最適化問題 P を解く上で難しいのは無限本の不等式 $F(x, \theta) \succeq O \ (\forall \theta \in \Theta)$ が条件になっているところである．そこでこの条件の十分条件であって有限本の不等式で表せるものを見つけ，これを条件として $c^T x$ を最小化するという**近似問題**を考えることにする．近似問題は通常の半正定値計画問題であるから効率的に解くことができる．近似問題の実行可能領域はもとの問題 P の実行可能領域の部分集合なので，一般に近似問題の最小値はもとの問題 P の最小値よりも大きい．しかしなんらかの方法で十分条件をより必要条件に近いタイトな条件にできれば，2つの最小値の差，すなわち**近似誤差**は零に収束するはずである．このような解法を**漸近的に厳密**であるという．

漸近的に厳密なロバスト半正定値計画問題の解法として，Kalman-Yakubovich-Popov補題に基づくもの^{4, 11)} Pólyaの定理に基づくもの¹⁵⁾，2乗和多項式に基づくもの¹⁶⁾が提案されている．これらの解法では，近似問題で使う「十分条件」として特別な性質を持つある次数の多項式の存在性を使っており，仮定する多項式の次数を増やすと近似問題が改良されて近似誤差が零に収束する．しかし，これらの既存のアプローチでは定性的な収束性しかわかっておらず，どのくらい次数を増やすとどのくらい近似誤差が小さくなるかという定量的性質はわかっていない．また多項式の次数を増やすときに，必要な項だけを適応的に導入する方法があると計算量の増加を抑えることができるが，そのような方法はわかっていない．

以下本節では，最近提案された漸近的に厳密な解法である**行列拡大法**を紹介し，これについては近似誤差の定量的性質がわかっていること，近似問題の適応的な改良によって計算量の増加の抑制ができることを説明する．

3.2 行列拡大法

文献6)で提案され，文献12)でその漸近的厳密性や近似誤差の上界が示された行列拡大法について説明す

る．これは制御に関係した特別なロバスト半正定値計画問題のために開発された文献10), 18)の方法や文献9)の方法の一般化である．

行列拡大法において，条件 $F(x, \theta) \succeq O \ (\forall \theta \in \Theta)$ の十分条件で有限本の不等式で表せるものをどのように構成するかを説明する．

まず関数 $F(x, \theta)$ が θ の多項式であることに注意して $F(x, \theta) = \sum_{\alpha} F_{\alpha}(x) \theta^{\alpha}$ と書く．ただし α は非負整数を成分とする p 次元のベクトルで， $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_p]^T$ ， $\theta^{\alpha} = [\theta_1^{\alpha_1} \ \theta_2^{\alpha_2} \ \dots \ \theta_p^{\alpha_p}]^T$ に対して θ^{α} は積 $\theta_1^{\alpha_1} \theta_2^{\alpha_2} \dots \theta_p^{\alpha_p}$ を表すものとする．また α に関する和は， $0 \leq \alpha_i \leq d_i \ (i = 1, 2, \dots, p)$ なるすべての α についてとるものとする．ただし $d_i \ (i = 1, 2, \dots, p)$ は多項式 $F(x, \theta)$ の θ_i に関する次数である．和をとる α は全部で $D := \prod_{i=1}^p (d_i + 1)$ 個あるが，これらを適当に番号づけして $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(D)}$ と書く．ただし $\alpha^{(1)} = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ と約束する．

次に $F_{*}(x) := [F_{\alpha^{(2)}}(x) \ F_{\alpha^{(3)}}(x) \ \dots \ F_{\alpha^{(D)}}(x)]$ として，

$$G(x) := \begin{bmatrix} 2F_{\alpha^{(1)}}(x) & F_{*}(x) \\ F_{*}(x)^T & O \end{bmatrix}, \quad M(\theta) := \begin{bmatrix} \theta^{\alpha^{(1)}} I \\ \theta^{\alpha^{(2)}} I \\ \vdots \\ \theta^{\alpha^{(D)}} I \end{bmatrix}$$

を定める．ただし I は $F(x, \theta)$ と同じサイズの単位行列である． $2F(x, \theta) = M(\theta)^T G(x) M(\theta)$ であることに注意する．

最後にすべての $\theta \in \mathbb{R}^p$ に対して， $M(\theta)^T H(\theta) = O$ となり，かつ行列 $[M(\theta) \ H(\theta)]$ が正方正則になるような行列 $H(\theta)$ を考える．このような $H(\theta)$ を，行列 $M(\theta)$ の orthogonal complement というが，特に θ の1次関数になるように $H(\theta)$ を選ぶことができる．例えば $p = 2$ ， $d_1 = d_2 = 1$ のときは

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} I \\ \theta_1 I \\ \theta_2 I \\ \theta_1 \theta_2 I \end{bmatrix}, \quad H(\theta) = \begin{bmatrix} -\theta_1 I - \theta_2 I & O & O \\ I & O & -\theta_2 I \\ O & I & O \\ O & O & I \end{bmatrix}$$

とすればよい．一般の場合の $H(\theta)$ の構成法は文献12)にあるが，上の例を見て考えればほぼ明らかである．

以上の準備のもとで次の命題が成り立つ．

命題. x を $\mathbb{R}^n$ 中の任意のベクトル， $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(Q)}$ を $\mathbb{R}^p$ 中の任意の Q 本のベクトルとする．このとき，

$$G(x) + H(\theta^{(q)}) W^T + W H(\theta^{(q)})^T \succeq O \quad (q = 1, 2, \dots, Q) \quad (3)$$

を満たす行列 W が存在するならば, $\{\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(Q)}\}$ の凸包中の任意の θ に関して $F(x, \theta) \geq 0$ である。

□

証明. ベクトル θ を $\{\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(Q)}\}$ の凸包中に任意に選ぶと, これは $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(Q)}$ の凸結合で書くことができる. 同じ係数を使って不等式 (3) の凸結合を作ると, 行列 W が共通で $H(\theta)$ が θ の 1 次関数であることから, θ に関する同じ形の不等式が得られる. この不等式の右側から $M(\theta)$ を, 左側から $M(\theta)^T$ をかけると $F(x, \theta) \geq 0$ を得る。

□

この命題の $\{\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(Q)}\}$ として凸多面体 Θ の頂点の集合 $\text{ver } \Theta$ を選べば, 有限本の不等式で表せる $F(x, \theta) \geq 0 \ (\forall \theta \in \Theta)$ の十分条件が得られる. これを条件として $c^T x$ を最小化する近似問題を考えるのが, 行列拡大法の基本である. 図 4 は, ロバスト半正定値計画問題 C に対して上のような近似問題を構成し, その最適解から得られたものである.

先の十分条件がなぜ必要条件にならないかを調べると, 行列 W を共通に選ぶことが主な原因であることがわかる. したがって, より必要条件に近いタイトな十分条件を得るには次のようにすればよい. パラメータ集合 Θ を J 個の凸多面体に分割し, これを $\Delta = \{\Theta^{[1]}, \Theta^{[2]}, \dots, \Theta^{[J]}\}$ と書く. 行列 W は各部分領域ごとに選ぶことにして, それぞれ $W^{[1]}, W^{[2]}, \dots, W^{[J]}$ と書く. これにより次の近似問題を得る:

$P(\Delta)$: 最小化 $c^T x$

条件 $G(x) + H(\theta) (W^{[j]})^T + W^{[j]} H(\theta)^T \geq 0$
 $(\forall \theta \in \text{ver } \Theta^{[j]}, \forall j = 1, 2, \dots, J).$

パラメータ集合 Θ を細かく分割して Δ を作ると, 行列 W の自由度が増えて近似誤差が小さくなると考えられる. 実は, 分割 Δ を細かくすると近似誤差が零に収束することがわかり, この意味で行列拡大法は漸近的に厳密である. これを次節で述べる. なお, 特にサイズが小さい問題の場合, 行列拡大法の収束は速く, 比較的粗い分割でもほとんど厳密な値が得られることが多い.

3.3 行列拡大法の性質

パラメータ集合 Θ の分割 $\Delta = \{\Theta^{[1]}, \Theta^{[2]}, \dots, \Theta^{[J]}\}$ に対して, 分割の最大半径 $\overline{\text{rad}} \Delta$ を次のように定める. まず, 各部分領域 $\Theta^{[j]}$ に関してその半径 $\text{rad} \Theta^{[j]}$ を $\min_{\theta \in \Theta^{[j]}} \max_{\theta' \in \Theta^{[j]}} \max_{i=1,2,\dots,p} |\theta'_i - \theta_i|$ で定める. そしてすべての部分領域 $\Theta^{[j]} \ (j = 1, 2, \dots, J)$ に関する半径の最大値を分割 Δ の最大半径と呼び, $\overline{\text{rad}} \Delta$ と書く.

このとき次が成り立つ.

定理. 最適化問題 P に関する適当な仮定のもとで, 分割 Δ によらない正の定数 C と C' が存在して, 不等式

$$|(P(\Delta) \text{ の最小値}) - (P \text{ の最小値})| \leq C \overline{\text{rad}} \Delta$$

が $\overline{\text{rad}} \Delta \leq C'$ なる任意の分割 Δ について成り立つ.

□

この定理により, 分割の最大半径を小さくすると近似誤差が零に収束することがわかる. すなわち行列拡大法は漸近的に厳密である. また, 収束の速が遅くとも最大半径に比例する程度であることもわかる. このような収束性に関する**定量的な性質**は, 既存の漸近的に厳密な解法については証明されていない. その意味で行列拡大法は安心して使える性質のよい解法だといえる. なお, 保守的になることが多いが, 定数 C と C' を具体的に計算することもできる.

パラメータ集合 Θ を細かく分割すれば近似誤差が小さくなることがわかった. しかしあまりに細かく分割すると, 部分領域の数が増えて近似問題 $P(\Delta)$ の不等式や変数の数が増え, 解くのが大変になる. そこでできるだけ部分領域の数が増えないようにするために**適応的な分割**を考える. すなわち, 初めは粗い分割を使って近似問題を構成し, その最適解を求める. 得られた最適解に関して有効な制約となる不等式(不等号を厳密にすると得られた最適解が満たさなくなってしまう不等式)をみつけ, それが属する部分領域を大切な部分領域とみなして複数の領域に分割する. 得られた分割を使って新しい近似問題を構成し, その最適解を求める. 以上を繰り返す. この方法により, 部分領域の数が増えないようにしつつ近似誤差を小さくできることが, 実験によって確認されている¹²⁾. このような近似問題の適応的な改良法は, 次数を増やす既存の解法では考えられていない. なお, 上記の定理は最大半径を小さくすることを要求しているので適応的な分割とは整合しないが, 適応的な分割の考え方を支持するように定理を改良することも可能である¹²⁾.

以上, 行列拡大法の長所について見てきた. 一方で行列拡大法の短所は, 行列 $G(x), H(\theta), W$ のサイズがしばしば大きくなりすぎることである. これを防ぐために, $F(x, \theta)$ を θ の多項式とみたときに非零の係数を持つ項はわずかであるという一種の疎性を仮定して行列を小さくする方法が開発されている^{7, 13)}. この方法は rectilinear Steiner arborescence という特殊なグラフの

応用として定式化される.

4. まとめと展望

本稿では, ロバスト性を考えることが工学上重要であることを制御の問題を中心に述べ, ロバスト最適化問題を導入した. さらに, 非線形の不確かさを考えることが大切であることを述べ, 非線形の不確かさを扱えるロバスト最適化問題の解法である行列拡大法を紹介した.

非線形の不確かさが扱えるようになると, 基本的にロバスト性の実現とは独立の問題である非線形最適化や非線形制御に応用することもできる^{8, 14)}. 例えば多項式 $f(\theta)$ を領域 $\theta \in \Theta$ で最大化する問題を考えよう. この問題は,

最小化 x

条件 $x - f(\theta) \geq 0 \quad (\forall \theta \in \Theta)$

というロバスト最適化問題に定式化できる. また, 非線形システムの安定性を示すには Lyapunov 関数という関数を見つければよい. Lyapunov 関数とは, ある不等式をある領域でロバストに満足するような関数であり, これを見つめる問題はロバスト最適化問題の形に書ける. このようにロバスト最適化はロバスト性の実現にとどまらない広い応用を持ち, このこともこの種の研究の魅力の一つである.

参考文献

- 1) 浅井, 井村, 申: リレー解説: ロバスト制御の基礎から最先端まで, 計測と制御, **42**-7/12 (2003), **43**-1/7 (2004)
- 2) A. Ben-Tal and A. Nemirovski: *Lectures on Modern Convex Optimization: Analysis, Algorithms, and Engineering Applications*, Philadelphia, USA: SIAM (2001)
- 3) A. Ben-Tal and A. Nemirovski: Robust optimization: methodology and applications, *Mathematical Programming*, **92**-3, 453/480 (2002)
- 4) P.-A. Bliman: On robust semidefinite programming, in *Proceedings of the 16th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS2004)*, Leuven, Belgium (July 2004)
- 5) S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan: *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Philadelphia, USA: SIAM (1994)
- 6) 江本, 大石: 有理式で表される不確かさを持つ制御系の解析・設計法, 計測自動制御学会論文集, **41**-4, 314/321 (2005)
- 7) 猪阪, 大石: 疎性の利用によるロバスト半正定値計画法の効率化, 計測自動制御学会論文集, **43**-2, 93/101 (2007)
- 8) J. B. Lasserre: Global optimization with polynomials and the problem of moments, *SIAM Journal on Optimization*, **11**-3, 796/817 (2001)
- 9) 増淵, 示村: ゲインスケジューリング系の設計におけるディスクリプタ形式の利用について, システム制御情報学会誌, **12**-7, 390/394 (1999)
- 10) A. T. Neto: Parameter dependent Lyapunov functions for a class of uncertain linear systems: an LMI approach, in *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, Phoenix, USA, 2341/2346 (December 1999)
- 11) A. Ohara and Y. Sasaki: On solvability and numerical solutions of parameter-dependent differential matrix inequality, in *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, Orlando, USA, 3593/3594 (December 2001)
- 12) Y. Oishi: A region-dividing approach to robust semidefinite programming and its error bound, in *Proceedings of the 2006 American Control Conference*, Minneapolis, USA, 123/129 (June 2006)
- 13) Y. Oishi and Y. Isaka: Exploiting sparsity in the matrix-dilation approach to robust semidefinite programming, to be presented at the *2007 American Control Conference*, New York, USA (July 2007)
- 14) P. A. Parrilo and S. Lall: Semidefinite programming relaxations and algebraic optimization in control, *European Journal of Control*, **9**-2/3, 307/321 (2003)
- 15) C. W. Scherer: Relaxations for robust linear matrix inequality problems with verifications for exactness, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **27**-2, 365/395 (2005)
- 16) C. W. Scherer and C. W. J. Hol: Matrix sum-of-squares relaxations for robust semi-definite programs, *Mathematical Programming*, **107**-1/2, 189/211 (2006)
- 17) 高木, 西村: タワークレーンの吊り荷ローブ長変動を考慮したゲインスケジュールド制御, 日本機械学会論文集 C 編, **64**-626, 3805/3812 (1998)
- 18) A. Trofino and C. E. de Souza: Biquadratic stability of uncertain linear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **46**-8, 1303/1307 (2001)
- 19) K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover: *Robust and Optimal Control*, Upper Saddle River, USA: Prentice-Hall (1996)