



電磁界解析のアプローチと特徴

五十嵐 一*

Electromagnetic Field Analysis –Approach and Characteristics–

Hajime Igarashi*

Key words: Electromagnetic field analysis, Finite element method, FDTD, Moment method

1. はじめに

電子電気機器・デバイスの設計を行う上で、電磁界解析による物理パラメータ同定や性能予測、設計最適化は、設計期間短縮や性能向上のために重要な役割を果たすようになってきた。特にモータや電磁石、MRI（磁気共鳴画像）装置、アンテナのように装置内の電磁界分布が基本性能に直接影響する場合には、電磁界解析は設計上不可欠となっている。また、各種機器が発生する電磁波の人体への吸収や装置間の電磁干渉の問題が懸念され、いわゆる電磁環境の解析が重要になってきている。さらに装置の安全性を向上させるための電磁流探傷技術や、脳磁界を始めとする生体磁界の解析などの新しい分野への応用が注目されている。

このように電磁界解析の重要性は増しているが、設計者が解析ソフトを気軽に利用しにくい側面もある。その理由として、つぎのことが考えられる。(a)電磁界が空間や材料中に分布している様子を直感的に理解しにくい。(b)電磁界解析においては、マクスウェル方程式を解くためにポテンシャルを未知変数とすることが多い。ポテンシャルは定数や勾配場の不定性を持っているため、直感的理解を妨げることがある。さらにこのような不定性によりシステム行列が特異となることがある。(c)電磁界を表す量には $\mathbf{E}$ と $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{H}$ と $\mathbf{B}$ のような量があるが、その違いがわかりにくい。(d)電磁界の定式化は、変数の選び方や周波数による電磁界の形態の変化(静電界・磁界、準定常電磁界、高周波電磁界)、

微分方程式や積分方程式など方程式の形式などにより様々に考えられうる。電磁界解析手法も時間領域・周波数領域、閉領域・開放(無限)領域、線形・非線形系などにより得意とする解法が異なる。

本論では電磁界解析で広く用いられている有限要素法、FDTD(Finite Difference Time Domain)法、積分方程式法の定式化と特徴について概説する。また上記(a)～(d)のような電磁界解析の普及を妨げていると思われる事項を意識して、できるだけわかりやすく述べる。

2. 電磁界の特徴と分類

2.1 マクスウェル方程式

電磁界はつぎのマクスウェル方程式により記述される。

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1a) \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1b)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho \quad (1c) \quad \text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (1d)$$

ここで $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{D}$ はそれぞれ磁界強度、磁束密度、電界強度、電束密度を表し、 $\mathbf{J}$ 、 ρ は伝導電流、真電荷密度を表す。(1a)はアンペアの法則であり、右辺第2項がマクスウェルにより導入された変位電流を表す。(1b)は電磁誘導を表すファラデーの法則であり、(1c)は電荷からの電束密度の発散を表し、(1d)は磁束密度には湧き出しや吸い込みがないことを表している。(1a)の発散を取り、(1c)を用いると、電荷保存則

$$\text{div } \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

が得られる。(1a)～(1d)のままでも物理的意味の考察は可能であるが、これらを積分してつぎのような積分則に変換した方が、よりわかりやすい形となる。

* 北海道大学大学院情報科学研究科
Graduate School of Information Science and Technology,
Hokkaido University

$$\oint_{\partial S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \quad (3a)$$

$$\oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (3b)$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q \quad (3c)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (3d)$$

(3a)は開曲面 S を通過する電流および電束の時間変化により S の境界(閉路) ∂S に磁界 $\mathbf{H}$ が発生することを示している. 同様に(3b)は開曲面 S を通過する磁束の時間変化を打ち消すように ∂S に電界が生じる電磁誘導の法則を表す. 一方, (3c)は閉曲面 S 内の電荷 Q により S を通過する正味の電束ができること, (3d)は閉曲面を通過する正味の磁束はゼロであることを表している.

2.2 電磁界変数の関係—構成関係式

マクスウェル方程式(1a)~(1d)もしくは(3a)~(3d)においては, 電界を表す量として $\mathbf{E}$ と $\mathbf{D}$, 磁界を表す量としては $\mathbf{H}$ と $\mathbf{B}$ がある. 真空においては, これらは $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ のような比例関係を持つが, 誘電体中および磁性体中でそれぞれ

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (4a)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (4b)$$

のような関係となる. ここで $\mathbf{P}$, $\mathbf{M}$ はそれぞれ分極ベクトル, 磁化ベクトル, ϵ_0 , μ_0 は真空の誘電率, 透磁率を表す. これらは外部からの電界・磁界に応答して生じ, 強誘電体や強磁性体では外部電磁界を切った後も残留する. (たとえば $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ でも $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$ となる). このような場合には(4a), (4b)のままで扱う必要がある. 一方, 上記のようなヒステリシス性を無視できる場合には, 感受率 χ_e , χ_m を用いて $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$, $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$ と書けるため, これらを(4)に代入すると $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ が得られる. ここで $\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e)$, $\mu = \mu_0 (1 + \chi_m)$ は電磁界と空間の関数でありうる.

以上のような構成関係式の他にオームの法則

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (5)$$

を用いることがある. ここでは σ 導電率を表す.

2.3 静電界・磁界, 準定常場, フルウェーブ

マクスウェル方程式(1a)~(1d)において, 時間変化がない場合($\partial/\partial t = 0$)は, 電界, 磁界の結合が切れ, 独立に存在するようになることがわかる. このとき電界については(1b)より回転成分がなく, $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$ のよ

うに静電ポテンシャル φ により表現できる. これと構成関係式 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ を用いると, 静電界の支配方程式

$$\text{div} (\epsilon \text{grad } \varphi) = -\rho \quad (6)$$

が得られる. 一方, 静磁界においては(1a)のように回転成分が存在しなければならない. その代わりに(1d)のように $\mathbf{B}$ の発散成分は常に存在しないから, ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ を用いて $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ と表現することができる. これと構成関係式 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ を(1a)に代入すると, 静磁界の支配方程式

$$\text{rot} (\nu \text{rot } \mathbf{A}) = \mathbf{J} \quad (7)$$

を得る. ここで $\nu = 1/\mu$. (7)は(6)と異なりベクトル方程式である. また φ には定数分の不定性しかないが, $\text{rot} (\mathbf{A} + \text{grad } \chi) = \text{rot } \mathbf{A}$ より $\mathbf{A}$ には $\text{grad } \chi$ 分の不定性があるため, 3.3節で述べるような注意が必要である.

つぎに時間変化がある場合を考える. 場に時間調和性 $e^{j\omega t}$ (j は虚数単位, ω は角周波数)を仮定してオームの法則を用いると, (1a)の右辺は $\sigma (1 + j\omega\epsilon/\sigma) \mathbf{E}$ と書ける. ϵ/σ は電荷が緩和する時間を表しているが¹⁾, ここで $\omega\epsilon/\sigma \ll 1$ であれば変位電流の項を無視することができ, いわゆる準定常電磁界近似が有効になる. このときに導体に誘導される電流を渦電流と呼ぶ. 準定常電磁界においては, $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ を(1b)に代入して得られる

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi \quad (8)$$

を, 変位電流を落とした(1a)に代入した

$$\text{rot} (\nu \text{rot } \mathbf{A}) + \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \sigma \text{grad } \varphi = \mathbf{J} \quad (9)$$

が支配方程式となる. また電荷保存則の第1項目と2項目の比は $\omega\epsilon/\sigma$ であるから, この近似の下で(2)は

$$\text{div } \mathbf{J} = 0 \quad (2)'$$

となる. さて(9)のみではポテンシャル φ を決めることができないので, (9)の発散を取って(2)'を考慮した

$$\text{div} \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \sigma \text{grad } \varphi \right) = 0 \quad (10)$$

が(9)と連立して解かれる. ただし(9)と(10)は独立ではないため, 4.2節で述べるように行列は特異となる.

一方, 磁界の拡散時間 $d^2 \mu \sigma / 4$ (d は系の特徴長さ)が電荷の緩和時間 ϵ/σ よりも十分短く, 後者の時間スケールで解析する場合には(1b)の右辺を無視できる. この場合を準定常電界近似と呼び, 誘電体中の動電界を解析する際に仮定される²⁾. このとき(1b)の右辺を $\mathbf{0}$

とすることができ、考えるべき方程式を

$$\operatorname{div}\left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) = 0 \quad (11a) \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad (11b)$$

と簡単化できる。(11b)から結論されるポテンシャルを(11a)に導入して構成関係式を用いると、支配方程式

$$\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} \varphi) + \operatorname{div}\left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \varphi\right) = 0 \quad (12)$$

が得られる。

上のような近似ができない場合にはマクスウェル方程式(1), (2)をそのまま解く必要がある。このとき(1), (2)より電磁波を表す波動方程式

$$\operatorname{rot} \nabla \operatorname{rot} \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\mu \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \quad (13)$$

が得られる(磁界についても同様)。このようにマクスウェル方程式をすべて考慮した解析をフルウェーブ解析と呼ぶことがある。

2.4 境界条件

マクスウェル方程式(3a)～(3b)より、媒質界面で下記のような境界条件が要請されることがわかる。

$$\mathbf{D}_{1n} = \mathbf{D}_{2n}, \quad \mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_{2t} \quad (14a)$$

$$\mathbf{B}_{1n} = \mathbf{B}_{2n}, \quad \mathbf{H}_{1t} = \mathbf{H}_{2t} \quad (14b)$$

ただし n は法線成分, t は接線成分を表す(ここでは簡単のため面電流や面電荷が界面に存在しないとする)。

一方、ポテンシャルについては(14)より

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \mathbf{A}_{1t} = \mathbf{A}_{2t} \quad (15)$$

が要請される。(14)や(15)のように、 $\mathbf{A}, \mathbf{E}, \mathbf{H}$ は接線成分、 $\mathbf{B}, \mathbf{D}$ の法線成分が界面で連続であるため、それぞれの変数の連続性に合わせた有限要素が必要となる。たとえば、有限要素法やFDTD法では接線成分が連続な変数を辺に配置する(3.1節参照)。

2.5 電磁界変数の分類

ここでは電磁界量を性質ごとに分類することを考える。(3)のように $\mathbf{E}$ や $\mathbf{B}$ はそれぞれ辺、面で積分することにより測定可能な物理量である電圧や磁束に対応する。したがって、これらは辺や面に付随した量であると考えることができる。一方、 $\mathbf{H}$ や $\mathbf{D}$ も辺、面で積分するとそれぞれ測定可能な物理量である電流、電束になるが、 $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ を考慮すると、 $\mathbf{H}$ を積分する辺は $\mathbf{B}$ を積分する面に対応し、 $\mathbf{D}$ を積分する面は $\mathbf{E}$ を積分する辺に対応することがわかる。図1にこの関係を示す。他方、 $\mathbf{A}$ は辺で積分して磁束となり、電荷密度 ρ は体で積分して電荷となる。スカラーポテンシャルは点で積分すると考える。このように考えると、電

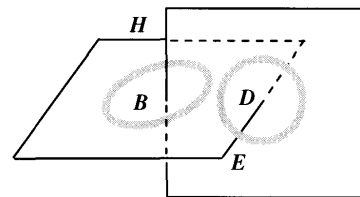


図1 電磁解の空間配置

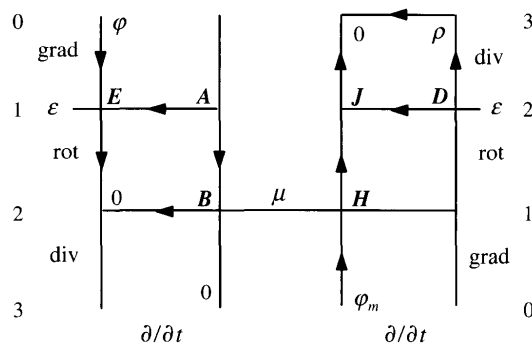


図2 Tonti図

磁界の量を図2のようないわゆるTonti図³⁾上に配置して表すことができる。図の上下は空間的な微分、横方向は時間的な微分を介して互いに関係している。このように電磁量には階層的な構造があるが、電磁量を微分形式として定義し直すことにより、この構造を自然に組み込むことができる。図2の左右の数字は対応する微分形式の次数を表している。図の左側の量は直線状の微分形式、右側はねじれた微分形式に対応しており、FDTD法解析ではそれぞれ主セル、副セルに配置される(有限要素法のメッシュは主セルに対応し、仮想的な双対メッシュが副セルに対応する³⁾)。

3. 電磁界解析のための有限要素法

3, 4節では有限要素法解析について述べる。本論では特に断らない限りは4面体有限要素を考える。また有限要素の面数を F 、辺数 E 、節点数 N と記す。

3.1 辺有限要素法

電磁界を有限要素法で解析する際、前節で述べたような連続性や積分図形などの電磁界量の特性に合わせた要素を選ばなくてはならない。三次元電磁界解析でよく用いられるベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ を考えると、通常の節点要素による表現

$$\mathbf{A} = \sum_{i \in \text{nodes}} \mathbf{A}_i N_i(\mathbf{x}) \quad (16)$$

がまず考えられる。ここで N_i は節点要素の補間関数であり、直交性 $N_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}$ を満足している。しかし(16)

では要素界面で $\mathbf{A}$ の全成分が連続となってしまい. また点における $\mathbf{A}$ は物理的意味が不明である. そこで, 辺に未知数 a_i をおいた表現

$$\mathbf{A} = \sum_{i \in \text{edges}} a_i \mathbf{N}_i(\mathbf{x}) \quad (17)$$

を用いる. ここで $\mathbf{N}_i$ は辺 e_i のベクトル補間関数を表す. 4 面体では, 辺 e_i が節点 m から出て節点 n に入っているとすると

$$\mathbf{N}_i = \lambda_m \text{grad } \lambda_n - \lambda_n \text{grad } \lambda_m \quad (18)$$

と定義される. λ は体積座標を表す. $\mathbf{N}_i$ は直交性

$$\int_{e_j} \mathbf{N}_i \cdot d\mathbf{s} = \delta_{ij} \quad (19)$$

を満足している ((18) の幾何学的意味については文献3) 5 章を参照). (19) の性質より, (17) の未知係数 a_i は $\mathbf{A}$ の線積分, すなわち起磁力

$$a_i = \int_{e_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \quad (20)$$

であることがわかる. このように, 未知量が物理的意味を持つような離散化は自然なものと考えられる. 図1 に示すように, スカラーポテンシャル ϕ などのように点で積分されるものは節点, $\mathbf{E}$ や $\mathbf{H}$ のように辺で積分される量は辺, $\mathbf{B}$ や $\mathbf{J}$ のように面で積分される量は面に未知数が配置され, それぞれに対応する補間関数で近似表現される.

3.2 有限要素行列の性質

以下では電磁界解析特有の辺要素が必要となる静磁界の有限要素解析について考える. ここで透磁率は簡単のため磁界に依存しないと仮定する (線形近似). 静磁界の支配方程式 (7) に $\mathbf{N}_i$ を用いたガレルキン法を適用すると, E 元の連立方程式

$$[\mathbf{K}] \mathbf{a} = \mathbf{j} \quad (21)$$

が得られる. ここで左辺の有限要素行列と右辺ベクトルの成分は

$$k_{ij} = \int_V \nu \text{rot } \mathbf{N}_i \cdot \text{rot } \mathbf{N}_j dV \quad (22a)$$

$$j_i = \int_V \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{J} dV \quad (22b)$$

で与えられる ($i, j = 1, 2, \dots, E$). さて辺要素の基底関数は以下の性質を有することが知られている.

$$\text{rot } \mathbf{N}_i = \sum_{n \in \text{faces}} R_{ni} \mathbf{M}_n \quad (23)$$

ここで $\mathbf{M}_n$ は面 f_n に対応する面要素の基底関数, R_{ni} は面 f_n と辺 e_i の関係を表した係数で, f_n の向きと e_i の向きが同じなら +1, 逆なら -1, e_i が f_n に含まれなければ

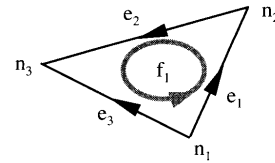


図3 面, 辺, 節点

0 を取る. たとえば図3のような三角形を考えると, $R_{11} = R_{12} = -R_{13} = 1$ となる.

関連する係数として辺 e_i と節点 n_m の関係を表す G_{im} があり, e_i が n_m に入っていれば +1, n_m から出ていけば -1, e_i が n_m を通らなければ 0 を取る. 図3の三角形の辺 e_1 では $G_{11} = -G_{12} = -1$ となる. これらを成分とする行列 $[\mathbf{R}]$, $[\mathbf{G}]$ はそれぞれ rot, grad 演算子の離散形式と考えることができ, $\text{rot grad} = 0$ に対応する関係

$$[\mathbf{R}][\mathbf{G}] = [\mathbf{0}] \quad (24)$$

を満足する (幾何的には領域の境界の境界は存在しないという意味を持つ).

(23) を (22a) に代入すると, 有限要素行列は

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{R}]^t [\mathbf{v}] [\mathbf{R}] \quad (25)$$

のように分解できることがわかる. ここで $[\mathbf{v}]$ は

$$v_{ij} = \int_V \nu \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{M}_j dV \quad (26)$$

で定義される $F \times F$ 正定値行列である. (25) より, $[\mathbf{K}]$ のランクは $[\mathbf{R}]$ と同様に $E - N + 1$ であることが示される⁴⁾. すなわち $[\mathbf{K}]$ は $N - 1$ 分だけランクが落ちた特異行列である. 特異行列をシステム行列とする方程式 (21) が解を持つように, 電流ベクトルポテンシャル法や2ポテンシャル法などが用いられる³⁾.

3.3 ゲージ固定について

有限要素行列 $[\mathbf{K}]$ は特異であるため, $[\mathbf{K}]$ が写す像に含まれない誤差成分が (21) の右辺にある場合には, ICCG (Incomplete Cholesky Factorization Conjugate Gradient) 法などの反復解法が収束しない. しかし $[\mathbf{K}]$ が正則であればこのような心配はいらなくなる. そこで $[\mathbf{K}]$ を正則化することが考えられた⁵⁾. そもそも $[\mathbf{K}]$ が特異なのは $\mathbf{A}$ の grad χ 分の不定性からきている. すなわち, 閉曲線 C と鎖交する磁束は $\mathbf{A}$ の周回積分で表現できるが, C を有限個の辺に分割して離散表現すると

$$\Phi = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \Rightarrow \Phi = \sum_{i \in \text{edges on } C} a_i \quad (27)$$

ここで a_i は (20) で定義される辺 e_i の起磁力を表す. ここで物理的に計測できる磁束の値は確定しているが, a_i

の値には不定性がある.たとえばある辺の a_i を Φ として, 他を零としてもよい. このように定めることにすると不定性をなくすることができる. 系統立ててこの操作を行うためには, グラフ理論を用いて有限要素の辺を木と補木に分解し, 補木の上に未知量 a_i を割り振り, 木で $a_i = 0$ とすればよい. これを木-補木ゲージとよぶ. これにより未知数を E から補木数 $E - N + 1$ に減らせる. また $[K]$ のランク落ちの分を消去でき, より次元の小さな正則行列を得ることができる.

しかし, このような冗長な未知数消去を行うと, 行列の条件数が悪化する傾向にあることが指摘された⁴⁾. すなわち消去前の $[K]$ の固有値 λ と消去後の固有値 λ' には固有値の分離性

$$\lambda_1 \leq \lambda'_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda'_2 \leq \dots \leq \lambda'_{E-1} \leq \lambda_E \quad (28)$$

が成立するが, 非零の最小固有値を $\min$ で表すと

$$0 \leq \lambda'_{\min} \leq \lambda_{\min} \quad (29)$$

となり, 未知数削除後の最小固有値は減少する傾向にある. 一方, 最大固有値については通常, 高い空間周波数に対応する固有値が密に分布しているため, 未知数を消去してもほとんど変化がない. したがって, 自由度消去により

$$\kappa = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \quad (30)$$

で定義される実効条件数が大きくなる傾向がある. これは多くの数値実験でも確認されており, 近年では上記のようなゲージ固定はされないことが多い.

4. 有限要素法による電磁界解析の実際

3節では有限要素法の基礎事項について述べたが, 本節では実際の電磁界解析で必要となる事項のうち, 重要なものに焦点を当てて述べる.

4.1 非線形問題

前節で考えた静磁界では, 透磁率が磁界に依存しないと仮定した. しかし, 鉄や電磁鋼板などの強磁性体材料中においては, 透磁率は磁界の関数として変化する. 特にモータや変圧器など電気機器の解析においては, 飽和領域の磁界を用いるためこのような透磁率の磁界依存性を考慮することが必須である. この場合には, (21)の行列 $[K]$ の成分が磁界 $\mathbf{H}$ (または $\mathbf{A}$) の関数となるため, (21)は非線形方程式となる. このような非線形方程式の解法にはニュートン・ラフソン法を用いることが多い. すなわち, (21)の右辺と左辺の差(残差)を $r_i(\mathbf{a})$ とおき, 微小変位に対する残差 $r_i(\mathbf{a} + \delta\mathbf{a})$ を

テーラー展開して2次以上の項を無視すると, 連立方程式

$$\sum_j^E \frac{\partial r_i}{\partial a_j} \delta a_j = -r_i(\mathbf{a}) \quad (31)$$

を得る ($i = 1, 2, \dots, E$). (31)のヤコビ行列の成分は

$$\frac{\partial r_i}{\partial a_j} = 2 \sum_m^E \sum_n^E a_m a_n \int_v \frac{\partial v}{\partial B^2} (\text{rot } \mathbf{N}_i \cdot \text{rot } \mathbf{N}_m) (\text{rot } \mathbf{N}_j \cdot \text{rot } \mathbf{N}_n) dv \quad (32)$$

で与えられる. ここで $\partial v / \partial B^2$ は磁気特性(BH曲線)から読み取り, a_m, a_n は1ステップ前の値を使って評価する. ニュートン・ラフソン法ではまず初期の $\mathbf{a}^1$ を与え, (32)によりヤコビ行列を計算して連立方程式(31)を $\delta\mathbf{a}^1$ について解く. 連立方程式の解法にはICCG法がよく使用される. つぎに $\mathbf{a}^2 = \mathbf{a}^1 + \delta\mathbf{a}^1$ として(31)を解き直す. この過程を $\mathbf{a}$ が変化しなくなるまで続ける.

4.2 準定常電磁界

つぎに(9), (10)により記述される準定常電磁界の有限要素解析を考える. (9), (10)について $\mathbf{A}$ は(18)の N_i , φ は節点要素の補間関数 $N_i = \lambda_i$ により近似表現する. これらをベースとしたガレルキン法を用い, 時間微分については陰的オイラー法を用いると

$$(\Delta t [R]^t [v] [R] + [\sigma]) \mathbf{a}^n + \Delta t [\sigma] [G] \varphi^n = [\sigma] \mathbf{a}^{n-1} + \Delta t \mathbf{j}^n \quad (33a)$$

$$[G]^t [\sigma] \mathbf{a}^n + \Delta t [G]^t [\sigma] [G] \varphi^n = [G]^t [\sigma] \mathbf{a}^{n-1} \quad (33b)$$

を得る. ここで $[\sigma]$ は

$$\sigma_{ij} = \int_v \sigma \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{N}_j dv \quad (34)$$

で定義される $E \times E$ 正定値行列である. (33)の導出において, (23)と類似の関係

$$\text{grad } N_i = \sum_{n \in \text{edges}}^E G_{ni} N_n \quad (35)$$

を用いた. さて, (33a)の左から $[G]^t$ を乗じ, (24), (2)' に注意すると, (33b)が得られる. したがって, 連続系の方程式(9), (10)の従属性が, 離散系でも保持されていることがわかる. (33)を解く方法を $\mathbf{A}$ - φ 法(または $\mathbf{A}$ - $\mathbf{V}$ 法)と呼ぶ. $\mathbf{A}$ - φ 法には上記のような冗長性があるため, これを削除することにより方程式の次元を下げるのが考えられる. 実際, (35)は節点要素の補間関数の勾配場が, 辺要素の補間関数の線形結合で表現できることを示唆している. すなわち

$$\text{Image}(\text{grad } N) \subset \text{Image } N \quad (36)$$

したがって, (8)の $\text{grad } \varphi$ の自由度は辺要素により表現できるので, $\mathbf{E} = \sum e_j \mathbf{N}_j$ と書ける. このとき, 有限

要素方程式は

$$(\Delta t [C]^T [v] [C] + [\sigma]) \mathbf{a}^n = [\sigma] \mathbf{a}^{n-1} + \Delta t \mathbf{j}^n \quad (37)$$

のように簡単化できる。(37)を解く方法をA法と呼ぶ。A法とA-φ法を比べると、確かにA法の方が、未知数が少なく、行列も小さい。しかしICCG法などにより方程式を解いた場合、A-φ法はA法より計算時間が短いことが知られている。これはA法の有限要素行列は、 Δt が大きくなると静磁界の行列成分が支配的になり、行列が特異に近づくため条件数が増加するからである。一方、A-φ法では前処理によりこのような不安定性が除去されることが示されている⁴⁾。また、A-φ法の効果は回転場と勾配場についてそれぞれ反復計算を行うHiptimarのハイブリッドスモースーと関連があることが指摘されている⁶⁾。

4.3 電磁波問題

電磁波解析においては、マクスウェル方程式をフルセットで解く必要がある。まず時間領域の解法を考える。アンペアの法則(1a)とファラデーの法則(1b)において、電界を辺要素により $\mathbf{E} = \sum_j^E e_j \mathbf{N}_j$ と補間し、磁束密度を面要素により $\mathbf{B} = \sum_j^F b_j \mathbf{M}_j$ と補間する。さらに N_i を用いたガレルキン法を(1a)、(1b)に適用すると

$$\sum_j^F b_j \int_v \mathbf{v} \mathbf{M}_j \cdot \text{rot } \mathbf{N}_i dv = \sum_j^E e_j \int_v \varepsilon \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{N}_j dv + \int_v \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{J} dv \quad (38)$$

$$\sum_j^E e_j \int_v \mathbf{N}_i \cdot \text{rot } \mathbf{N}_j dv = - \sum_j^F \dot{b}_j \int_v \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{M}_j dv \quad (39)$$

を得る($i = 1, 2, \dots, E$)。ここで領域 v の境界で電気壁条件 $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ もしくは磁気壁条件 $\mathbf{H} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ が成立しているとした。(38)、(39)に(23)、(26)を適用し、電界・磁界をそれぞれ整数時間、半整数時間で定義した中心差分により時間離散化を行うと、マクスウェル方程式(1a)、(1b)の離散形式

$$[R]^T [v] \mathbf{b}^{n+1/2} = [\varepsilon] \frac{\mathbf{e}^{n+1} - \mathbf{e}^n}{\Delta t} + \mathbf{j}^{n+1/2} \quad (40)$$

$$[R] \mathbf{e}^n = - \frac{\mathbf{b}^{n+1/2} - \mathbf{b}^{n-1/2}}{\Delta t} \quad (41)$$

を得る。ここに

$$\varepsilon_{ij} = \int_v \varepsilon \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{N}_j dv \quad (42)$$

(40)、(41)は次節で述べるFDTD法の方程式と本質的に同じ構造を有する。しかし、(41)により $\mathbf{b}^{n+1/2}$ を求めて、つぎに(40)により $\mathbf{e}^{n+1}$ を求めようとすると、 $[\varepsilon]$ の逆をとる必要がでてくる。ここで $[\varepsilon]$ は対角行列では

ないため、このままではFDTD法のような効率的な計算が実現できない。このような困難を解決するために、質量集中による $[\varepsilon]$ の対角化⁷⁾を用いた定式化が提案されている。有限要素法はFDTD法に比べて4面体など各種要素を使えるため、形状の表現能力が優れているが、一方、陽解法の安定限界を与えるクーラン条件が最も小さな有限要素により定まることに注意を払う必要がある。

つぎに周波数領域の解法を考える。波動方程式(13)において時間調和解を仮定し、辺要素を用いたガレルキン法を適用すると

$$\sum_j^E e_j \int_v (\mathbf{v} \text{rot } \mathbf{N}_i \cdot \text{rot } \mathbf{N}_j - \omega^2 \varepsilon \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{N}_j) dv = -j\omega \int_v \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{J} dv + \int_{\partial v} \mathbf{v} (\mathbf{N}_i \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (43)$$

を得る。 v が無限領域の場合には ∂v 上の境界項の処理が必要となる。このために吸収境界条件⁸⁾や積分方程式で境界項を評価するハイブリッド有限要素法⁹⁾が提案されている。境界において電気壁または磁気壁条件を課すことができれば、境界項を落とすことができる。この場合、(43)は下記のような形式となる。

$$([R]^T [v] [R] - \omega^2 [\varepsilon]) \mathbf{e} = -j\omega \mathbf{j} \quad (44)$$

(44)のような形式は導波路解析や共振器解析で用いられる。節点要素を用いた際に生じる非物理解(スプリアス解)の問題は、上記のような辺要素の使用により解消することができる。なお、(44)は準定常場のA法と同じ理由でICCG法等の反復計算の収束性がかならずしも良好ではない。一方、A-φ法による定式化を用いると収束性を改善することができる¹⁰⁾。

4.4 有限要素法の特徴

有限要素法の第一の特徴は、4面体や6面体、プリズム、ピラミッドなどの多様な要素を活用できるため、形状表現能力が高いことにある。また有限要素行列は疎行列であり、運動媒質や異方性媒質がある場合など特殊な状況を除いて対称であるため、記憶効率がよく、またICCG法などにより連立方程式を効率的に解くことが可能である。さらに、不均質媒質や材料の非線形性があっても、使用可能であり、汎用性が極めて高い。このため、静磁界解析や渦電流解析に広く用いられている。

電磁波問題については、有限領域中の周波数解析には極めて有効である。一方、無限領域を取り扱うためには、吸収境界条件や積分方程式との連成が必要になる。また時間領域解析では、対角化を行わない限りは効率的とは言えない。

5. FDTD 法と FIT

FDTD 法は電磁波の時間的変化の解析によく使用される差分法である¹¹⁾。またマクスウェル方程式の積分形式を用いた解法に FIT (Finite Integration Technique) がある。FDTD 法と FIT で用いる離散方程式は本質的に同じである。ここでは辺有限要素法と共通の未知数を用いる FIT について述べる⁴⁾。マクスウェル方程式(1), (3)において、簡単のため電流、電荷が存在しないとする。FIT では、FDTD 法と同様に解析領域を直方体の主セルに分割する。さらに各主セルにスタッガード状に副セルを考える。主セルと副セルの面はそれぞれ図1の $\mathbf{B}$ と $\mathbf{D}$ が定義されている面に対応する。さらに主セルと副セルの辺にそれぞれ

$$e = \int_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}, \quad h = \int_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} \quad (45)$$

を未知数として配置する。(45)を用い、時間方向に中心差分を用いると、(3a), (3b)の離散化形式は

$$[\mathbf{R}]^t \mathbf{h}^{n+1/2} = [\varepsilon] \frac{e^{n+1} - e^n}{\Delta t} \quad (46a)$$

$$[\mathbf{R}] e^n = -[\mu] \frac{h^{n+1/2} - h^{n-1/2}}{\Delta t} \quad (46b)$$

の形になる。ここで $[\varepsilon]$ と $[\mu]$ は誘電率、透磁率の対角行列である。また $[\mathbf{R}]$ は辺有限要素法で述べた行列と同じである。FIT では、(46b)から $\mathbf{h}^{n+1/2}$ を求め、次に(46a)から e^{n+1} を求める。さらに再び(46b)より $\mathbf{h}^{n+3/2}$ を求め、同様の過程を繰り返して、電磁界の時間発展を陽解法にて求める。このように FIT では空間と同様、時間に対しても整数・半整数ステップのような双対な離散化を行う。FDTD 法では電界、磁界の接線成分を未知数とするが FIT では(45)のような積分量を未知数とする。このように、差分法である FDTD 法・FIT と辺有限要素法は、一見異なったものに見えるが、離散化の思想自体は同じものであり、違いは $[\varepsilon]$ などの構成関係式の近似の違いにあると言える³⁾。

FDTD 法・FIT の特徴としては、まず連立方程式を解く必要がない陽解法であるため、記憶容量と計算効率の面で優れており、大規模電磁波解析に非常に適していることが挙げられる。一方、本法では直方体の6面体セルを用いるため、曲面を階段状に近似しなければならない。またセルの粗密をつける場合には、サブグリッド⁴⁾などの工夫が必要となる。

6. 積分方程式法

本節では基本解(自由空間グリーン関数)をベースと

して積分方程式により電磁界を表し、積分方程式を離散化して解析する方法について述べる。ここでは電流・電荷など電磁界のソース(源)を未知量とする方法と電界・磁界を未知量とする方法に大別して述べることにする。

6.1 場のソースを未知変数とする方法

まず簡単のため、ポアソン方程式(6)で記述される静電界を考える。誘電率 ε が一様な無限領域を考えると、(6)の解は

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon} \int_V \rho(\mathbf{r}') g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \quad (47)$$

で与えられる。ただし $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \equiv 1/(4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ はラプラス方程式の基本解であり、

$$\nabla^2 g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = 0 \quad (48)$$

を満足する。さて、いま導体面で静電ポテンシャルが既知であり、導体に分布する面電荷密度 σ が未知であるとする((47)において $\rho \rightarrow \sigma$ として面積分を考える)。このとき、有限個の点 $i (i = 1, 2, \dots, n)$ を選び、それらの点における σ_i を未知数として連立方程式をつくることができる。このような手続きにより電荷密度を求める方法は表面電荷法と呼ばれ、静電界計算に用いられる¹²⁾。この他に、 σ を面積座標などの既知関数で展開してガレルキン法で解くことも考えられる¹³⁾。

同様な方法を電磁波解析に用いることができる。すなわち、まず周波数領域のマクスウェル方程式を考え、電磁界をベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ とスカラーポテンシャル φ を用いて表し、ローレンツゲージ

$$\text{div } \mathbf{A} + j\omega\varepsilon\mu\varphi = 0 \quad (49)$$

を課すと、

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (50a)$$

$$\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (50b)$$

を得る。ただし $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ 。一様な ε, μ を持つ無限領域を考えると、(50)の解はヘルムホルツ方程式の基本解 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \equiv \exp(-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)/(4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ を用いて

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \quad (51a)$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon} \int_V \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \quad (51b)$$

と書ける。ここに $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ は

$$(\nabla^2 + k^2) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = 0 \quad (52)$$

を満足する。さて、いま図4のような線状のダイポー

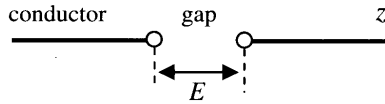


図4 線上アンテナ

ルアンテナを考える。このときアンテナ導体上の電界は、ファラデーの法則(1b)から得られる(8)に線積分版の(51)を代入して、電荷保存則(2)を用いるとポックリントン方程式

$$E_z(\mathbf{r}) = -j \frac{Z}{k} \int_{\Gamma} \bar{G}_{zz}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') I_z(\mathbf{r}') dz' \quad (53)$$

を得る。ここに $\bar{G}_{zz} = (k^2 + \partial^2/\partial z^2) G$, $Z = \sqrt{\mu/\epsilon}$ 。(53)においてアンテナギャップにおける給電電界を既知とし、導体上の $\mathbf{E}$ の接線成分を零とする。さらに未知電流を適切な関数により展開して、重み関数とのモーメントを取り、ガレルキン法などを用いることにより連立方程式をつくる。この方程式を解くことにより、アンテナに沿う電流が求められる。このような方法はモーメント法と呼ばれ、電磁波解析でよく使われる¹⁴⁾。

6.2 電磁界を未知変数とする方法

静電界を考える。閉領域 v において簡単のため $\rho = 0$ で ϵ は一様とする。ラプラス方程式の基本解 $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ を式に乘以、グリーンの定理を用いると境界積分方程式

$$C\varphi(\mathbf{r}) = \int_{\partial v} \varphi(\mathbf{r}') \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} dS' - \int_{\partial v} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}')}{\partial n'} dS' \quad (54)$$

を得る。ここで C は境界 ∂v の局所的な形状により決まる係数であり、滑らかな境界点では $C = 1/2$ となる。境界 ∂V_D 上で静電ポテンシャル φ が既知、 ∂V_N でフラックス $\partial\varphi/\partial n$ が既知であるとき、(54)を離散化して連立方程式をつくり、さらにそれを解くことにより、 ∂V_N 上の φ および ∂V_D 上の $\partial\varphi/\partial n$ を求めることができる。これらの量が定まれば、領域内の任意点での φ または電界 $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$ を求められる。このようなグリーンの定理に基づく境界型解法が境界要素法である。閉領域 v を無限領域とすると、無限境界上の積分は消えるため、(54)と同様な積分方程式をつくることができる。この場合、 ∂v は電極などの有限領域の境界とする。このように境界要素法では擬似無限境界での人為的操作無しに、無限領域を自然に取り扱える利点がある。一方、媒質が不均一である場合や非線形性を有する場合には、境界要素法の適用が必ずしも効果的ではなくなる。境界要素法はベクトルまたはダイアディックグリーンの定理を基礎とすることにより、渦電流問題⁴⁾や電磁波問

題⁹⁾にも適用することができる。

6.3 積分方程式法の特徴

積分方程式法の第一の利点は、無限領域を人為的な無限境界を設定せずに扱えることである。静磁界や渦電流場の場合には、領域を解析対象の周りに十分大きくとれば、有限要素法などの領域形解法でも良好な精度を得ることができる。しかし、電磁波問題においては、領域境界からの反射波が存在するため、吸収境界などの処方が必要となる。しかし、吸収境界を用いても境界からの反射を完全に防ぐことが難しい場合があり、このような場合に積分方程式法が重宝となる。また、積分方程式法では境界の分割のみでよいから、空間メッシュを切る手間が省けるという利点がある。

一方、媒質が不均質な場合や、誘電体・磁性体が在る場合には、それらの効果を考慮したグリーン関数を構成しなければならず、簡単な取り扱いができなくなる。また、積分方程式法において用いられる行列は、空間的に離れた要素間であっても、グリーン関数で記述される要素間の非零の関係が存在するため、密行列となる。したがって、疎行列を用いる有限要素法に比べて大きな記憶容量が必要になる。このような問題点を解決するために、高速多重極展開法などが提案されている¹⁵⁾。

7. まとめ

本論では、電磁界解析手法の定式化と特徴について概略を述べた。今後の課題としては、磁性材料の数値モデルの構築^{15, 16)}、積層銅板を含む系の効率的解析手法、電子回路など複雑構造を有する系からの放射電磁界の解析法、高い並列化効率を有する電磁界並列計算手法、電磁界解析を用いた3次元最適化手法の開発などが挙げられる。

参考文献

- 1) J.A. Stratton: Electromagnetic Theory, McGraw-Hill (1941)
- 2) K. Preis, O. Biro, P. Supancic, I. Titar: FEM Simulation of Thermistors Including Dielectric Effects, IEEE Trans. Magn., **39**, 1733/1736 (2003)
- 3) 五十嵐, 亀有, 加川, 西口, ボサビ: 新しい計算電磁気学, 培風館 (2003)
- 4) 本間, 五十嵐, 川口: 数値電磁力学, 森北出版 (2002)
- 5) R. Albanese, G. Rubinacci: Magnetostatic Field Computations in terms of Two-Component Vector Potentials, Int. J. Num. Methods in Eng., **29**, 515/532 (1990)
- 6) T. Iwashita, T. Mifune, M. Shimasaki: Similarities between Implicit Correction Multigrid Method and A-phi Formulation in Electromagnetic Field Analysis, IEEE Trans. Magn., **44**,

- 946/949 (2008)
- 7) A. Bossavit, L. Kettunen: Yee-like Schemes on a Tetrahedral Mesh, with Diagonal Lumping, *Int. J. Numerical Mod.: Electronic Networks, Devices and Fields*, **12**, 129/142 (1999)
 - 8) J. Jin: *The Finite Element Method in Electromagnetics*, 2nd ed., Wiley-Interscience (2002)
 - 9) J. L. Volakis, T. Ozdemir, J. Gong: Hybrid Finite-Element Methodologies for Antennas and Scattering, *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, **45**, 493/507 (1997)
 - 10) H. Igarashi, T. Honma: Convergence of Preconditioned Conjugate Gradient Method Applied to Driven Microwave Problems, *IEEE Trans. Magn.*, **39**, 1705/1708 (2003)
 - 11) A. Taflov: *Computational Electrodynamics*, Archtech House (1995)
 - 12) 河野, 宅間: 数値電界計算法, コロナ社 (1980)
 - 13) J. D. Kraus, R. J. Marhefka: *Antennas for All Applications*, 3rd ed., McGraw-Hill (2003)
 - 14) J. J-H. Wang, *Generalized Moment Methods in Electromagnetics*, Wiley-Interscience (1991)
 - 15) たとえば, 電気学会技術報告 1043 号 (2006)
 - 16) 高橋: 三次元有限要素法, 電気学会 (2006)
-