



航空機の飛行経路最適化問題の解法

上野 誠也*

Numerical Methods for Trajectory Optimization of Aircraft

Seiya Ueno*

Key words: Optimal control, Aircraft, Trajectory optimization, Homotopy method

1. はじめに

航空宇宙工学における経路最適化は重要な意味を持ち、古くから実用化が研究されている。例えば、ロケットの打ち上げ軌道を与える誘導には、最終飛行高度と速度を指定した最小燃料軌道の必要条件を近似して求めた誘導則¹⁾を使用している。さらに、人工衛星の軌道は、加速時間が航行時間に対して無視できる近似を用いた最小燃料問題の解であるホーマン遷移軌道²⁾が多く用いられている。航空機の巡航飛行では、法的に規制された飛行経路の中から最小消費燃料を与える高度と速度を選んだ飛行を常に行っている。そのために、燃料消費に伴い高度を上げるステップアップ方式³⁾が採用されている。さらに、非線形最適制御問題として航空機のダイナミクスを扱い、最適経路の数値計算の研究は計算機の急激な発達が見られた1960年代から数多く報告⁴⁾されている。しかしながら、動的システムの最適入力を与える最適制御理論を近似せずにオンライン上で求めている例はほとんどない。

最適制御問題の計算手法の多くは、最初に解を仮定し、解の近傍で線形近似を行って、解を修正する手法を用いている。修正された解が最適性の条件を満たすまで、この修正が繰り返される。最初に仮定する解を本稿では初期仮定解と呼ぶ。最適入力をオンラインで求めることの問題点として以下の2点が挙げられる。第一の問題点は計算量である。収束までの計算量は解を得るまで不明であり、計算を開始する前に知ることは

不可能である。第二の問題点は、初期仮定解により収束する解が影響することにある。初期仮定解が最適解の近傍であれば、最適解に収束する。しかし、初期仮定解が最適解から離れていると、最適解に収束することなく、他の極値解に収束する。さらに、最悪な場合には収束する解が存在せず、解が得られない状態に最適化計算が陥ることがある。

航空機の緊急時における進入着陸では、十分な操縦性が得られない可能性がある。そのような場合には、操縦性を考慮した経路設計が重要な課題となる。当然のことながら、その経路設計に十分な時間を使用することができず、機上の計算機で自動的に求めることが要求される。これらの要求を満足するためには、先に示したオンラインによる最適制御問題の解法の問題点を解決しなければならない。これらの観点に立ち、ホモトピー法(連続変形法)^{5,6)}に着目した研究を本稿で紹介する。

ホモトピー法は非線形連立方程式を解く計算手法である。解が既知の非線形方程式から方程式を連続的に変化させることにより、解も連続的に変化する性質を利用している。解は定積分を行うことで求められるので、計算量は確定している。また、線形近似を用いていないために、解の収束範囲が広いなどの特徴がある。これらの特徴が航空機の飛行経路のオンライン最適化に適している。

本稿では2種類の解法を紹介する。まず、最適解の必要条件を満たす解を求める解法を第3章で紹介し、その数値例を第4章に示す。次に、評価関数の減少の限界から解を求める解法を第5章で紹介する。いずれの解法もホモトピー法を応用した解法である。

* 横浜国立大学
Yokohama National University

2. 航空機の経路最適化問題

航空機の運動は、6自由度の剛体運動で表現される。しかし、剛体の回転運動と重心位置の並進運動とは時定数が異なるために、分離させて扱うことが多い。回転運動は線形の微小擾乱運動方程式を用いて制御系を設計し、並進運動は次式の非線形運動方程式を用いて飛行経路を最適化する。

$$dV/dt = (T - D(V, h, \alpha) - mg \sin \gamma) / m \quad (1)$$

$$d\gamma/dt = (L(V, h, \alpha) \cdot \cos \phi - mg \cos \gamma) / (mV) \quad (2)$$

$$d\psi/dt = (L(V, h, \alpha) \cdot \sin \phi) / (mV \cos \gamma) \quad (3)$$

状態変数は速度 V とその方向を示す経路角 γ と方位角 ψ である。入力変数は、推力 T と姿勢を表す迎角 α とバンク角 ϕ である。近似されたモデルにおいても、空気の揚力 L と抗力 D は必ず状態変数と入力変数の非線形関数で表される。なお、飛行経路は直交座標系を用いて、次式の方程式で求められる。

$$d\xi/dt = V \cos \gamma \cos \psi \quad (4)$$

$$d\eta/dt = V \cos \gamma \sin \psi \quad (5)$$

$$dh/dt = V \sin \gamma \quad (6)$$

評価関数と境界条件を与えることにより、最適制御問題が設定される。状態変数や入力変数に制約条件が課されることもある。

代表的な評価関数としては、終端時間や消費燃料が挙げられる。最短時間迎撃問題⁷⁾や最短時間旋回問題⁸⁾など数多くの研究が過去に発表されている。一方、消費燃料は民間航空機に重要な課題であり、運航時間を評価関数に含めた問題も扱われている。一般の巡航状態は定常飛行を用いているが、定常状態の非最適性を証明し、非定常を仮定した最小燃料解も報告⁹⁾されている。

非線形最適制御としての飛行経路の最適化に用いられる数値解法に、かつては傾斜法を基礎とする二点境界値問題の解法が多く用いられていた。最近では状態方程式を差分方程式に置き換え、非線形計画法の解法を用いている例が多い。しかし、いずれの解法も初期仮定解に対して、線形近似の仮定で修正量を導く解法である。反復回数が初期仮定解に依存しており、解を得るまでの計算量を事前に知ることができない。そのために、時間を争うオンラインシステムへ搭載することが難しいという問題が残され、実用に至っていないのが現状である。

3. ホモトピー法による解法

3.1 最適制御問題の必要条件

有限時間内で最適解を得るためにホモトピー法を用いて最適制御問題を解く。まず、最適解の満たす必要条件を示す。 n 次元の状態変数 x で記述される系を、 m 次元の入力変数 u で制御する制御対象を考える。

$$dx/dt = \varphi(x, u) \quad x(0) = x_0, x(t_F) = x_F \quad (7)$$

簡単のため、終端時間 t_F と状態変数の境界条件は全て与えられ、他の拘束条件はないものとする。次式の評価関数を最小とする最適入力を求める問題として定義する。

$$J = \int_0^{t_F} L(x, u) dt \quad (8)$$

最適解の満たす必要条件は以下である。 n 次元の随伴変数 λ を導入して、ハミルトニアンを次式で定義する。

$$H = L + \lambda^T \varphi \quad (9)$$

これを用いて、次式の必要条件が得られる。

$$\partial H / \partial u = 0 \quad (10)$$

$$d\lambda^T / dt = -\partial H / \partial x \quad (11)$$

必要条件は二点境界値問題で与えられる。一般に解析的に解くことは不可能であるから、数値計算で解を求めている。本稿では、微分方程式を差分方程式に置き換え、非線形連立方程式として解を求める。制御区間を N 分割し、それぞれの時刻の変数 x, u, λ の値を未知数とすれば、 $(2n+m)(N+1)$ 次元の未知数となる。式(7)と式(11)の微分方程式は $2nN$ 次元の差分方程式で記述できる。式(7)の境界条件と式(10)の最適性の条件と合わせれば、 $(2n+m)(N+1)$ 次元の連立方程式を解くことになる。

3.2 ホモトピー法

前項で定義された未知数を ξ 、非線形連立方程式を $f(\xi) = 0$ として、ホモトピー法による解法を示す。解が既知である方程式 $g(\xi) = 0$ を導入し、その解を ξ_0 とする。方程式を連続的に g から f へ変化させることにより、解を ξ_0 から連続的に変化させて $f(\xi) = 0$ の解を得る手法である。まず、次式の関数を定義する。

$$F(\xi, \alpha) \equiv \alpha \cdot f(\xi) + (1 - \alpha) \cdot g(\xi) \quad (12)$$

パラメータの α を 0 から 1 へ変化させることで、方程式が連続的に変化することを利用する。式(12)の全微分から次式の定積分が導かれる。

$$\xi = \xi_0 - \int_0^1 (\partial F / \partial \xi)^{-1} (\partial F / \partial \alpha) d\alpha \quad (13)$$

積分可能であるには、被積分項に含まれる逆行列が存在することが必要である。

式(12)が示す関数 F には、目的として解きたい関数 f の他に、解が既知の関数 g やパラメータ α が含まれている。従って、式(13)が積分可能な条件は、関数 f 以外の影響を受けることになる。その点を除くために、解が既知の関数 g として、次式の関数を用いる。

$$g(\xi) = f(\xi) - f(\xi_0) \quad (14)$$

ただし、 ξ_0 は初期仮定解の変数ベクトルである。式(14)を用いれば、式(13)は次式となる。

$$\xi = \xi_0 - \int_0^1 (\partial f / \partial \xi)^{-1} f(\xi_0) d\alpha \quad (15)$$

被積分関数には解かれる連立方程式のヤコビ行列のみが含まれ、解が求められる条件は線形近似を用いた傾斜法など同様の条件となる。

3.3 随伴変数の推定

前章までに行った計算では初期仮定解に随伴変数 λ が含まれている。物理量である状態変数や入力変数の仮定は比較的簡単であるが、同時に解かなければならない随伴変数の仮定は難しい。そのために、二点境界値問題が変換された連立方程式 $f(\xi) = 0$ の誤差が最小となる随伴変数を初期の仮定に用いる。

式(9)が示すようにハミルトニアンに随伴変数は一次関数の形式で含まれている。二点境界値問題を定義する式も同様である。従って、解くべき連立方程式は、離散化された随伴変数によるベクトルを Λ 、状態変数と入力変数のベクトルを X と U とすれば、次式と記述できる。

$$P(X, U)\Lambda + q(X, U) = 0 \quad (16)$$

P は $(n+m)(N+1)$ 行 $n(N+1)$ 列の行列であるから、任意の X と U に対して、この式が成立する Λ は求められない。従って、ノルム最小となる Λ を求めれば、次式となる。

$$\hat{\Lambda} = -P^T(PP^T)^{-1}q \quad (17)$$

これにより、状態変数と入力変数が与えられれば、 λ の初期値が一意に求まることになる。

4. 数値計算例

水平面内を飛行する航空機の進入着陸問題を取り上げて、前章で示したホモトピー法を用いた解法による

最適経路設計の例を示す。故障が生じた航空機のように緊急時の着陸では、現時点から滑走路までの進入着陸経路を短時間で求め、それに追従する制御を行わなければならない。設計された経路は、追従制御に負担が少ない経路が望まれる。幾何学的に直線と円弧を用いて経路を設計することもあるが、個々の経路の接続点で航空機の姿勢が不連続となり好ましくない。姿勢が連続的に、かつ、穏やかに変化する経路が望ましい。水平釣合い旋回中の航空機のバンク角 ϕ と飛行経路の曲率 κ には次式の関係が成立する。

$$\kappa = (L/mV^2) \sin \phi \quad (18)$$

ただし、 L は揚力、 V は速度である。したがって、曲率の変化率を抑えることが追従する航空機にとって緩やかな姿勢変更で追従できることになる。

飛行経路は時間の要素が無くても表現できるので、独立変数を時間からダウンレンジ r に変更して、状態方程式を以下で与える。水平飛行の場合、ダウンレンジは飛行経路長と等しい。

$$d\kappa/dr = u_H \quad (19)$$

$$d\psi/dr = \kappa \quad (20)$$

$$d\xi/dr = \cos \psi \quad (21)$$

$$d\eta/dr = \sin \psi \quad (22)$$

式(19)右辺の u_H が曲率変化率であり、入力変数として扱う。飛行開始から着陸に至るまで、指定されたダウンレンジを飛行すると仮定する。初期のバンク角が 0 とすれば、境界条件は以下で与えられる。

$$\kappa(0) = 0, \psi(0) = \psi_0, \xi(0) = \xi_0, \eta(0) = \eta_0 \quad (23)$$

$$\kappa(r_F) = 0, \psi(r_F) = 0, \xi(r_F) = 0, \eta(r_F) = 0 \quad (24)$$

終端を原点としている。評価関数は、曲率変化率の二乗積分値を最小化するものとする。

$$J = \int_0^{r_F} \frac{1}{2} u_H^2 dr \quad (25)$$

以上で最適制御問題として、進入着陸問題が定義された。

最適解の満たす必要条件はハミルトニアンを定義することで導かれる。

$$H = u_H^2/2 + \lambda_1 u_H + \lambda_2 \kappa + \lambda_3 \cos \psi + \lambda_4 \sin \psi \quad (26)$$

式(10)に示す必要条件は以下となる。

$$\partial H / \partial u_H = u_H + \lambda_1 = 0 \quad (27)$$

式(27)から入力 u_H は λ_1 で置き換えることができる。したがって、状態変数と随伴変数の8変数による二点境界値問題を解くことで、最適軌道が求められる。

計算例を図1に示す。初期座標を $(\xi_0, \eta_0) = (-1.0, -0.5)$ 、初期方位角を $\psi_0 = 3\pi/4$ [rad]、終端ダウンレンジを $r_F = 2.0$ と設定した。初期仮定解は、全ての状態量をダウンレンジの1次関数で与えた。すなわち、図1に示すように直線の初期仮定解を用いている。軌道の分割数は $N = 100$ とし、パラメータ α の刻み幅は0.05、定積分は4次のRunge-Kutta法を用いている。初期仮定解が最適解から離れていても、解が連続的に変化している様子が示されている。

図2は同じ境界条件に対して、終端ダウンレンジを変更した最適解を示している。全て同じ初期仮定解を使用した結果である。分割数や積分手法は図1と同じである。得られた解による $f(\xi)$ のノルム、すなわち、計算誤差は 10^{-3} のオーダーである。

図3は初期方位角が $\psi_0 = 3\pi/4$ [rad] と $\psi_0 = -5\pi/4$ [rad] の2ケースを比較した図である。経路に関する初期仮定解は同じものを用い、方位角のみを異なる値と

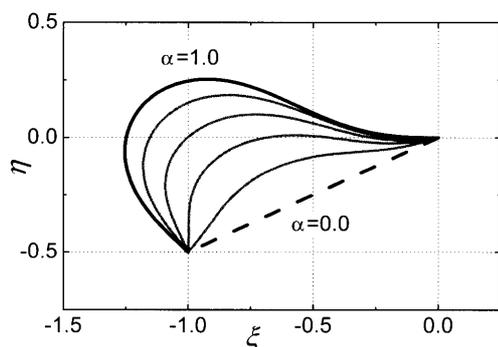


図1 初期仮定解から最適解へ至る経路の変化
 $\alpha = 0.0$: 初期仮定解 $\alpha = 1.0$: 最適解

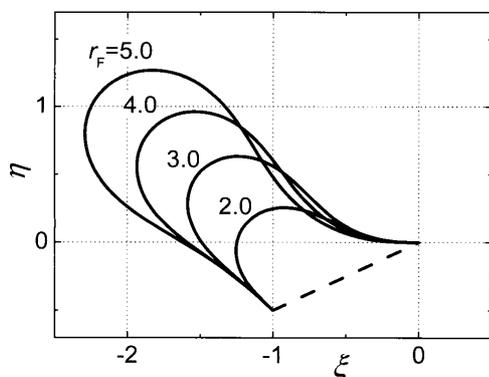


図2 異なるダウンレンジによる最適飛行経路
破線: 初期仮定解 実線: 最適解

した。物理的には同じ初期方位角であるが、右旋回進入と左旋回進入を比較していることになる。このような解をオンラインで求めれば、衝突回避などの判断が最適解を用いて可能となる。

本章では水平面内の飛行経路の最適化問題を例として、前章で提案した解法の例を示した。三次元の軌道に対しても、独立変数に飛行経路長を選ぶことで同様に定式化が可能であり、最適軌道を求めることができる¹⁰⁾。計算時間は制御区間の分割数 N に依存するが、十分な精度が得られる $N = 50$ としても、3.4GHz CPU の Windows OS で2.36秒であった。提案した解法は、短時間で確実に解が得られることから、搭載アルゴリズムに適している。

5. 直接法への展開

第3章で示した解法は、最適解の必要条件を満たす解を求めるもので、間接法の分類となる。もう一つの分類としては、評価関数の最小化から解を求める直接法がある。間接法は、評価関数の最小化の保証が無い、導関数の次数が高くなる、初期仮定解で随伴変数の仮定が必要になるなどの欠点がある。本章では、ホモトピー法を用いた直接法の解法を示す。

状態方程式や境界条件など与えられた拘束条件を満たしながら評価関数値を連続的に減少させれば、最適解に達したところで連続的な変化が不可能となる。この概念を用いた解法である。拘束条件を $\varphi_D(\eta) = 0$ とする。 η には状態変数と入力変数のみが含まれていて、随伴変数は含まれていない。これに、評価関数値を指定する新たな拘束条件を加える。評価関数を $J(\eta)$ とすれば、次式である。

$$f_D(\eta) \equiv \begin{pmatrix} \varphi_D(\eta) \\ J(\eta) - J_1 \end{pmatrix} = 0 \quad (28)$$

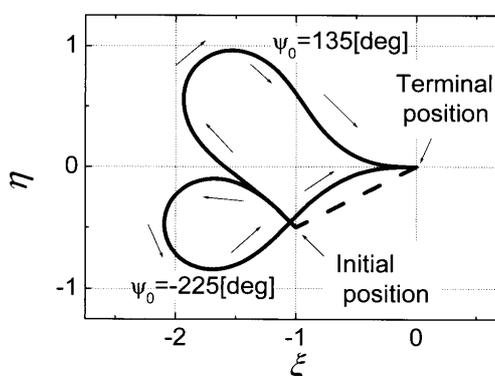


図3 初期方位角が異なる最小曲率変化率経路
ダウンレンジ: $r_F = 3.0$

J_1 の値を選ぶことにより、任意の評価関数値を満たす解が得られる。ただし、評価関数の最大化を行う場合、最適解である最大値以上の J_1 の値を選べば、式(28)を満たす解は存在しないことになる。ホモトピー法を適用するために、式(12)の $f(\xi)$ に $f_D(\eta)$ を、 $g(\xi)$ に $f_D(\eta) - f_D(\eta_0)$ を代入して導いた次式の関数を定義する。

$$F_D(\eta, \alpha) \equiv f_D(\eta) - (1 - \alpha) \cdot f_D(\eta_0) = 0 \quad (29)$$

η_0 は初期仮定解である。 F_D と η の次元数は必ずしも一致しないので、式(15)に相当する定積分は次式の微分方程式から導かれる。

$$\frac{d\eta}{d\alpha} = - \left(\frac{\partial f_D}{\partial \eta} \right)^T \left[\left(\frac{\partial f_D}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial f_D}{\partial \eta} \right)^T \right]^{-1} f_D(\eta_0) \quad (30)$$

拘束条件 $\varphi_D(\eta) = 0$ を満たす点を初期値として選び、式(30)を数値積分する。式(30)の逆行列が求められなくなった限界の点が、評価関数の最大値を与える点となり、最適解が求められる。初期値の $\varphi_D(\eta) = 0$ を満たす点も、ホモトピー法を用いて求めるとすれば、アルゴリズムは以下の2段階となる。評価関数の最大化問題で以下のアルゴリズムを記述している。

[STEP-1] 予想される評価関数値より小さい値に J_1 を選び、任意の初期値 η_0 から式(30)を $\alpha = 0$ から $\alpha = 1$ まで積分する。得られた解を η_1 とする。

[STEP-2] 予想される評価関数値より大きい値に J_1 を選び、初期値 η_1 から式(30)の積分を行う。逆行列が求められない点が最適解 η_{OPT} を与える。

アルゴリズムの概念を図4に示す。STEP-1において、 $\varphi_D(\eta) = 0$ を満たす解が得られているので、STEP-2の軌跡上では $\varphi_D(\eta) = 0$ が常に成立している。本解法は2段階のアルゴリズムとなる。

誘導則の導出に広く使われているロケットの打上げ

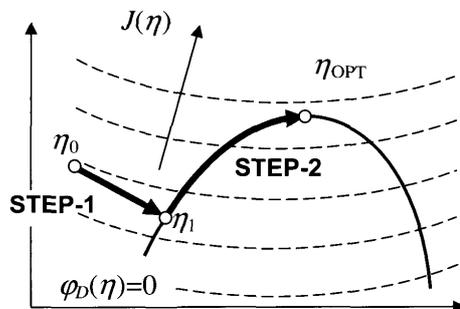


図4 ホモトピー法による直接法の概念図
実線：拘束条件 破線：評価関数の等高線

問題に適用した例を紹介する。ロケットの加速度を一定と仮定し、静止状態から打上げられ、指定された終端時刻に指定高度での水平速度を最大とする問題である。入力変数は加速度方向の角度とする。終端では、高度のみが指定されており、評価関数は終端水平速度とする。

予想される最大水平速度は0.94程度であるので、STEP-1では、式(28)の J_1 に相当する終端の水平速度を0.80に指定した。図5にSTEP-1の解の変化を示す。破線が初期仮定解であり、実線が指定された終端水平速度0.80を満たした解である。

STEP-1の結果を初期仮定解としてSTEP-2を実行する。終端の水平速度を1.00に指定した。 $\alpha = 0.0$ から刻み幅を0.02として積分を行い、 $\alpha = 0.68$ の時に次の積分で行列式が0近傍の値をとると判断した。図6には $\alpha = 0.686$ に外挿した結果が示されており、評価関数値は $J = 0.937$ を得た。STEP-1の終端に指定した評価関数値を変更して、この解法を実施した。式(30)に含まれる逆行列を求める行列の行列式を図7に示す。いずれの場合も、拘束条件を満たしているので、同じ軌跡となる。

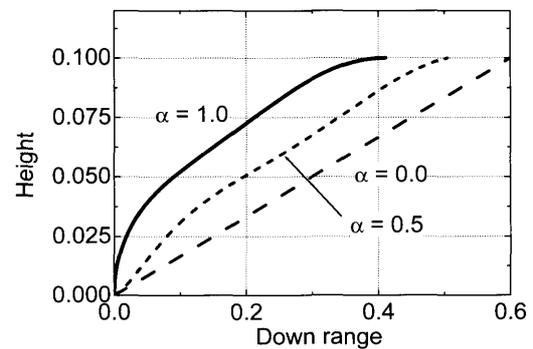


図5 最適打上げ問題におけるSTEP-1の軌道の変化($J_1 = 0.8$)
 $\alpha = 0.0$ ：初期仮定解 $\alpha = 1.0$ ：最適解

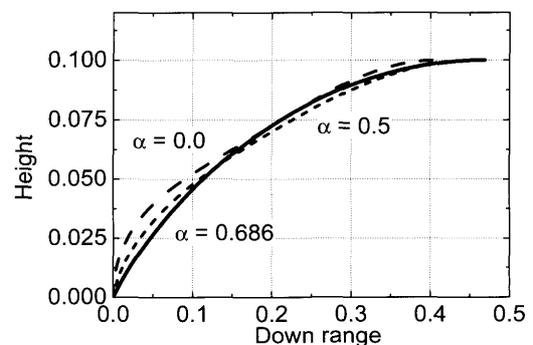


図6 最適打上げ問題におけるSTEP-2の軌道の変化($J_1 = 1.0$)
 $\alpha = 0.0$ ：初期仮定解 $\alpha = 0.686$ ：最適解

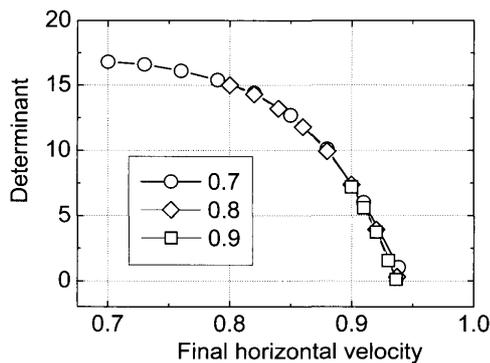


図7 被積分関数内の行列の行列式 (STEP-2)
STEP-1の終端評価関数値を変更

この図よりSTEP-1で仮定した評価関数値 J_1 が最適解の値に近いと精度が上がる事が分かる。 J_1 の選択という課題が新たに生じたが、間接法の欠点を取り除くことが可能となった。

6. むすびに

非線形最適制御問題をオンラインで解くために、ホモトピー法を適用した結果を示した。ホモトピー法は、定積分で解を得るため計算時間が有限で確定しており、線形近似を用いないために広範囲の初期仮定解から最適解が得られるなどの利点がある。短時間で最適解の求める要求を満たしており、航空機の経路最適問題に適用した例を示した。精度の向上や計算時間の短縮な

どを改良し、実システムへの応用へ結びつける方針である。

参考文献

- 1) 茂原正道：宇宙工学入門，168-174，培風館（1994）
- 2) Kaplan, M. H.: Modern Spacecraft Dynamics & Control, John-Wiley (1976)
- 3) 日本航空宇宙学会編：航空宇宙工学便覧－第3版－，773，丸善（2005）
- 4) Betts, J. T.: Survey of Numerical Methods for Trajectory Optimization, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, **21**-2, 193/207 (1998)
- 5) Richter, S. L. and DeCarlo, R. A.: Continuation Methods: Theory and Application, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-28**-6, 660/665 (1983)
- 6) Ohtsuka, T. and Fujii, H.: Stabilized Continuation Method for Solving Optimal Control Problems, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, **17**-5, 950/957 (1994)
- 7) Bryson, A. E., Desai, M. N., and Hoffman, W. C.: Energy-State Approximation in Performance Optimization of Supersonic Aircraft, Journal of Aircraft, **6**-6, 481/488 (1969)
- 8) Uehara, S., Stewart, H. J., and Wood, L. J.: Minimum-Time Loop Maneuver of Jet Aircraft, Journal of Aircraft, **15**-8, 449/455 (1978)
- 9) Speyer, J. L.: Periodic Optimal Flight, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, **19**-4, 745/755 (1996)
- 10) Ueno, S. and Watanabe R.: Optimal Emergency Guidance and Control Law of Future Space Transportation System, Proceedings of 2008 KSAS-JSASS Joint International Symposium on Aerospace Engineering, 500/503 (2008)