状態依存型リッカチ方程式を利用した非線形制御

岩瀬　将美*・渡辺　晃規**

Nonlinear Control Based on the State-Dependent Riccati Equation

Masami Iwase* and Kouki Watanabe**

Key words: Nonlinear control, Riccati equation, State-dependent, Stability, Optimality

1. はじめに

非線形システムに対するシステマティックで有効な制御系設計の1つとして，1990年代後半から，状態依存型リッカチ方程式(State-dependent Riccati equation: SDRE)に基づく制御系設計法が脚光を浴び，現在も精力的に研究がなされている．黎明期は，Pearson[1]や，Wernli，Cook[2]によって研究がなされ，90年後半にMracekやCloutier[3]がその有効性に再着目し，以後，理論・応用両面において加速的に研究が進められていった．また，計算機の処理スピードが上がるにつれて，SDREに基づく制御器の実システムへの実装可能性が飛躍的に向上し，誘導制御[4]，自動操縦[5,6,7]，衛星制御[8]，プロセス制御[9]，ロボティクス[10]などさまざまな実用が検討され，実際に試されてきたという側面も見逃せない．著者らもSCARA型マニピュレータや倒立振子などのメカニカルシステムを対象に，システム内部に発生する内力[11,12]や環境との干渉力を考慮した制御系[13]を，SDREのフレームワークのなかで実現している．そこで，本稿では，近年注目を集めているSDREに基づく制御系設計について概説し，応用事例としてSDREによる蛇型ロボットの移動制御について紹介する．

SDREに基づく制御系の特徴は，制御対象である非線形システムの表現(パラメトリゼーション，またはその導出に由来して“分解: Factorization”)に起因する．すなわち，非線形システムを，線形システムの状態空間表現のように，状態ベクトルと係数行列の積で表すことから始まる．本稿では，入力に対してアファインな非線形システム

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u, \quad x(0) = x_0 \tag{1}$$

を扱うことにする．ここで，$x \in \mathcal{R}^n$ は状態ベクトル，$u \in \mathcal{R}^m$ は入力ベクトル，$f: \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$ は C^1 級関数，$B: \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^{n\times m}$ かつ $B(x) \neq 0, \forall x$ とする．また，状態ベクトル x は直接観測可能で，$x=0$ が平衡点であり $f(0)=0$ とする．このとき，$f(\cdot) \in C^1(\mathcal{R}^n)$ は，状態ベクトル x の非線形行列値関数 $A: \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^{n\times n}$ を用いて

$$f(x) = A(x)x \tag{2}$$

と表され，(1)も

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u \tag{3}$$

となる．係数行列 A や B は状態に依存することから，状態依存型係数(State-dependent coefficients: SDC)行列と呼ばれる．

さて，(3)と表現されたシステムに対し，二次形式と似た構造を持つ評価関数

$$J = \int_0^\infty x^T Q(x)x + u^T R(x)u dt \tag{4}$$

を最小化する制御系設計の問題を考える．ここで，$Q: \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^{n\times n}$，$R: \mathcal{R}^n \to R^{m\times m}$ は，それぞれ，状態と入力に対する状態依存型重み行列であり，$Q(x) \geq 0, R(x) > 0, \forall x$ とする．係数行列が状態ベクトル x に依存するため，(4)は x に関して二次形式ではないが，線形システムに対する最適制御の設計問題と，表現上の構造が同じた

*　東京電機大学未来科学部ロボット・メカトロニクス学科
Dept. of Robotics and Mechatronics, School of Science and Technologies for Future Life, Tokyo Denki University
**　東京電機大学理工学研究科情報システム工学専攻
Dept. of Computers and Systems Engineering, Graduated School of Science and Technology, Tokyo Denki University

め，制御則も同様に

$$u = -R^{-1}(x)\,B^T(x)\,P(x)\,x \qquad (5)$$

と表現することを考える．ここで，$P(x)$は状態依存型リッカチ方程式（SDRE）

$$\begin{aligned} &P(x)\,A(x) + A^T(x)\,P(x) + Q(x) \\ &\quad - P(x)\,B(x)\,R^{-1}(x)\,B^T(x)\,P(x) = 0 \end{aligned} \qquad (6)$$

の唯一な正定対称解とする．SDREに基づく制御系設計の名前は，(5)の制御則を得るため(6)のSDREを解くことに由来している．SDREに基づく制御系設計を実際に行うときは，ある時点での状態各点において(6)のSDREを解き，その解をもって(5)により入力を与えることになる．

非線形システムの最適制御問題は，Hamilton-Jacobi-Bellman（HJB）方程式を解くことに帰着されるが，低次元の非常に簡単で特殊なケースを除き，HJB方程式を解いたり，または二点境界値問題を解くことは一般に難しい．一方で，SDREに基づく制御系設計は，HJB方程式に直接触れることなく，線形システムに対する最適制御系設計の延長上として入力を決定することができる．この点が多くの応用層を惹きつける一番の魅力であると考える．

しかしながら，SDREに基づく制御系設計においては，以下の点を検討せねばならない．まず，(2)のパラメトリゼーションは，$f(x)$がスカラー関数である場合を除いて一意に決まらない．また，状態各点で状態依存のリッカチ方程式を解くことで安定化フィードバック制御則が存在しうるのか，その制御則によってシステム全体の安定性が保証されるのか，また，最適性が保たれるのか，といったことに注意を払う必要がある．本稿ではこれらの事項について概説するが，Cloutier，Mracekら[3, 14]によって詳細に言及されているので参考にされたい．

このように，魅力的で応用性も高いと考えられるSDREに基づく制御系設計においても，未解決とされる問題がまだ多く残されており，これからの研究成果が期待されている．

まず，安定性の問題である．SDREに基づく制御系では，通常，局所漸近安定性が議論されるが，大域的漸近安定性については，閉ループ系のSDC行列$A(x)-B(x)K(x)$，ゲイン関数$K(x)=R^{-1}(x)B(x)P(x)$が特殊な形をしている場合や，状態がスカラーの場合など，限定された場合についてのみ示されている．また，評価関数内のSDC重み行列$Q(x)$, $R(x)$の調整は，線形システムにおける定数重み行列の場合に比べ，xの関数となっていることから自由度が格段に増えており，現状ではヒューリスティックな方法に頼らざるを得ず，設計指針が具体的に与えられていない．

次に，最適性の問題である．SDREに基づく制御系の性能は，後で述べるように$A(x)$のパラメトリゼーションに依存する．しかし，$A(x)$のパラメトリゼーションは，2次以上のシステムの場合一意に決まらない．よって，ある$A(x)$のもとで設計された制御系は準最適となる．現状では，ある緩い条件のもとで，最適となる$A(x)$のパラメトリゼーションが存在し，その意味でSDREは最適制御となりうることは証明されているが，実際にそのパラメトリゼーションを与える方法は未だに見つかっていない．

最後に実装上の問題である．状態の各点でSDREを解かなければならないため，実装では，比較的早いレートでリアルタイムにSDREを解くことができる計算環境を必要とする．幸運にも，SDREの場合では，システムの状態数に対して計算負荷が多項式的に増加することが知られているため，計算負荷は，計算機性能の向上によってあまり問題とならない可能性がある．著者らも，CPU 700MHz程度の計算機に512MBのメモリを積んだ，Windows XPシステムに実装したところ，4次の非線形システムに対して1kHzのレートを達成することができている．

また，実装では必ずインターバル毎に制御をすることになるので，はじめから離散系の枠組みでSDREに基づく制御系を考える動き[15]が始まっている．SDREに基づく制御系設計は従来，連続系の範疇で行われてきたが，著者らも近年，離散系に対するSDREの制御系に着目しており，今後の発展が期待される．

2. 解の存在性[16]

非線形システム(1)に対し，評価関数(4)を最小とする最適制御問題は，ハミルトニアン

$$H = \frac{\partial V^T(x)}{\partial x}\left(f(x) + B(x)\,u\right) + \frac{1}{2}\left(x^T Q(x)\,x + u^T R(x)\,u\right) \qquad (7)$$

を用いて，HJB偏微分方程式

$$H\left(x, \frac{\partial V^T(x)}{\partial x}\right) = 0 \qquad (8)$$

を満たす正定関数$V(x)$を得る問題に帰着される．

[仮定1]　非線形システムを平衡点まわりで線形化したシステム$\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(0), B(0), Q^{1/2}(0)\right\}$が可安定かつ可検出であり，$V(x)$が平衡点近傍で局所リプシッツ連続である．

この仮定のもとで，滑らかな正定関数 $V(x)$ が存在する平衡点近傍の領域において，(4)を最小化する最適制御入力は

$$u^*(x) = -R^{-1}(x)B^T(x)\frac{\partial V^T(x)}{\partial x} \tag{9}$$

と与えられ，(8)へ代入することで

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x}f(x) - \frac{1}{2}\frac{\partial V(x)}{\partial x}B(x)R^{-1}(x)B^T(x)\frac{\partial V^T(x)}{\partial x} + \frac{1}{2}x^TQ(x)x = 0 \tag{10}$$

を得る．ここで(10)のテイラー級数展開から $\partial V(0)/\partial x = 0$ が得られるので，ある行列値関数 $P(x)$ を用いて

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} = P(x)x \tag{11}$$

と書き表せる[17]．線形システムの場合と同様に(2)，(11)を(10)へ代入すると

$$x^T\left[P(x)A(x) + A^T(x)P(x) + Q(x) - P(x)B(x)R^{-1}(x)B^T(x)P(x)\right]x = 0 \tag{12}$$

を得る．線形システムの場合は(12)の括弧内よりリッカチ方程式が直接導出されるが，非線形システムの場合は $A(x)$ が状態に依存するため，必ずしも(12)の括弧内式が0であることを示すものではない．

本来，(11)が示すように $P(x)x$ が $V(x)$ の勾配を与え，かつ，$P(x)$ が(12)の解であることが要請されているが，SDREに基づく制御系設計のアプローチにおいては，(11)の勾配であるという要請には目をつむり，状態各点におけるSDREの正定対称解 $P(x)$ を求めるということで，(12)を満たす近似的な解を得ている．つまり，得られる制御則(9)は準最適となる．しかしながら，HJB方程式を解くことは一般に難しいため，SDREを解くという比較的単純な操作で，有益な近似解が得られることには意義があると考えられている．このような背景のもと，以下，パラメトリゼーションの自由度，SDREに基づく制御系の安定性，最適性を検証してみよう．

3. パラメトリゼーションの自由度

状態 x がスカラーの場合，(1)のパラメトリゼーションは

$$\dot{x} = a(x)x + b(x)u, \quad a(x) = \frac{f(x)}{x} \tag{13}$$

と一意に決まる．しかし，次のような2次システム

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) + b_1(x)u\\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + b_2(x)u\end{aligned} \tag{14}$$

でさえ，例えば，$\dot{x}_1 = [f_1(x_1, x_2)/x_1, 0]x$ か，または $\dot{x}_1 = [0, f_1(x_1, x_2)/x_2]x$ かと，異なるパラメトリゼーションを簡単に作り出すことができてしまう．さらに，仮に2つの異なるパラメトリゼーション $f(x) = A_1(x)x = A_2(x)x$ があるとすると，任意パラメータ α に対して $A(x, \alpha) = \alpha A_1(x) + (1-\alpha)A_2(x)$ も全て(2)を満たし，無数に存在することになる．

$k+1$ 個の異なるパラメトリゼーション $A_i(x)$ が存在するとき，k次のベクトル $\mathbf{a} = [\alpha_1, \ldots, \alpha_k]^T$ をパラメータとして，SDC行列のパラメトリゼーションは，一般に

$$A(x, \mathbf{a}) = (1-\alpha_k)A_{k+1}(x) + \sum_{i=1}^{k}\left(\prod_{j=i}^{k}\alpha_j\right)(1-\alpha_{i-1})A_i(x) \tag{15}$$

と与えられる[14]．ただし $\alpha_0 = 0$．(15)のパラメトリゼーションより，(6)のSDREの解も $\mathbf{a}$ を用いて $P(x, \mathbf{a})$ となる．つまり，SDREに基づく制御系は $\mathbf{a}$ によってパラメトライズされ，システム性能，安定性，最適性などに影響を与えるので，設計の自由度として捉える必要がある．

4. 安定性

はじめに，慣習[16]にしたがい用語を定義する．SDC行列 $\{A(x), B(x)\}$ がある領域の状態 $x \in \Omega$ 各点に関して可安定ならば，(3)は可安定な実現と呼ぶ．同様にSDC行列 $\{A(x), Q^{1/2}(x)\}$ がある領域の状態 $x \in \Omega$ 各点に関して可検出ならば，(3)は可検出な実現と呼ぶ．ある領域の状態 $x \in \Omega$ 各点に関して，SDC行列 $A(x)$ の固有値全てが複素開左半平面にあるならば，(5)は領域 Ω において各点フルビッツであるという．さて，以下の仮定のもと，SDREによる制御則によって局所安定性が与えられることを示す．

[仮定2]　SDC行列 $A(\cdot), B(\cdot), Q(\cdot), R(\cdot)$ が $C^1(\mathcal{R}^n)$ 級行列値関数で，かつ，SDC行列の組 $\{A(x), B(x)\}$，$\{A(x), Q^{1/2}(x)\}$ がそれぞれ可安定な実現，可検出な実現であると仮定する．

[定理1][3]　システム(1)に対して，SDRE(6)の正定対称かつ各点可安定な唯一解 $P(x)$ を用いたフィードバック制御(5)を施すことを考える．このとき，仮定2のもとで，SDREに基づく制御系設計は，局所的に漸近安定な制御則を与える．

[証明]　閉ループ系を $\dot{x} = A_{CL}(x)x$ と記述する．仮定よりSDC行列は $C^1(\mathcal{R}^n)$ 級関数であるので，$P(x), A_{CL}(x)$ も同様に $C^1(\mathcal{R}^n)$ 級関数となる．よって，平均値の定理より

$$A_{CL}(x) = A_{CL}(0) + \frac{\partial A_{CL}(z)}{\partial x}x$$

ただし $z \in [0, x]$．よって

$$\dot{x} = A_{CL}(0)\,x + x^T \frac{\partial A_{CL}(z)}{\partial x}\,x$$
$$= A_{CL}(0)\,x + \left(\frac{1}{\|x\|}\,x^T \frac{\partial A_{CL}(z)}{\partial x}\,x\right)\|x\|$$

第2項は $\|x\|\to 0$ のとき0となるので，平衡点 $x=0$ 付近での挙動は $A_{CL}(0)$ が支配的となる．ところで，SDREにより $A_{CL}(x)$ は各点で安定となっているため，$A_{CL}(0)$ は $x=0$ の付近で局所的漸近安定となる． ■

定理は局所漸近安定性を与えるが，大域的漸近安定性を解析的に示すことは難しい．現在のところ，$A_{CL}(x)$ が特殊な形をしている場合のみ，大域的漸近安定性が与えられている．

[定理2] [14] 仮定2を満たし，SDREに基づく制御系の閉ループ系SDC行列 $A_{CL}(x)$ が全ての状態 x に対して対称であるならば，系は大域的に漸近安定である．

[証明] リアプノフ関数の候補として $V(x)=x^Tx$ を考える．このとき

$$\dot{V}(x) = x^T\dot{x} + \dot{x}^T x$$
$$= x^T\left(A_{CL}(x) + A_{CL}^T(x)\right)x = 2x^T A_{CL}(x)\,x$$

$A_{CL}(x)$ は各点フルビッツとなるように設計されているので，$A_{CL}(x)$ は全ての x において負定．すなわち $\dot{V}<0$, $\forall x$．よって，大域的に漸近安定． ■

また，状態がスカラーの場合には，SDC行列表現は(13)と一意に決まり，SDREに基づいた制御系は大域的に漸近安定となることが $V(x)=x^2/2$ より簡単に示すことができる[14]．しかしながら，高次システムに対する大域的な漸近安定性を示すことは一般に難しく，ある限定的な条件のもとにおける事例が報告されている[3, 18]．

また，安定性が示されたケースにおいても，最適性であるかどうかはまた別途議論せねばならない．次節では，最適性について見てみよう．

5. 最適性

最適化問題では，よく最適性の必要条件が議論される．(1)のシステムに対して評価関数(4)を最小化する最適レギュレータ問題における，最適性の必要条件は，ハミルトニアン(7)を用いて

$$\frac{\partial H}{\partial u}=0,\quad \dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial x},\quad \dot{x}=\frac{\partial H}{\partial \lambda} \tag{16}$$

と与えられる．Mracekらも SDREに基づいた制御器の最適性を，この必要条件を用いてチェックしている[3]．ハミルトニアン(7)より $\lambda=\partial V/\partial x$ であることに注意すると

$$\frac{\partial H}{\partial u} = B^T(x)\,\lambda + R(x)\,u$$

u は(5)で与えられるので

$$\frac{\partial H}{\partial u} = B^T(x)\,\lambda - R(x)\,R^{-1}(x)\,B^T(x)\,P(x)\,x$$
$$= B^T(x)\left(\lambda - P(x)\,x\right)$$

ここで，(11)より $\lambda=P(x)x$ となるので

$$\frac{\partial H}{\partial u}=0$$

よって，いつでも入力に関する必要条件を満たすことが確認される．

次いで，随伴変数に関する必要条件をチェックしてみよう．ここで，さらなる仮定をおく．

[仮定3] $\partial A(x)/\partial x, \partial B(x)/\partial x, \partial P(x)/\partial x, \partial Q(x)/\partial x, \partial R(x)/\partial x$ が有界である．

さて，$\dot{\lambda}=-\partial H/\partial x$ より

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial f^T(x)}{\partial x}\lambda - u^T\frac{\partial B^T(x)}{\partial x}\lambda - Q(x)\,x - \frac{1}{2}x^T\frac{\partial Q(x)}{\partial x}x - \frac{1}{2}u^T\frac{\partial R(x)}{\partial x}u \tag{17}$$

(11)の微分より $\dot{\lambda}=\dot{P}(x)x+P(x)\dot{x}$ なる関係と，(2)，(5)を用いると，(17)は

$$\dot{P}(x)\,x + P(x)\left(A(x) - B(x)\,R^{-1}(x)\,B^T(x)\,P(x)\right)x + x^T\frac{\partial A^T(x)}{\partial x}P(x)\,x + A^T(x)\,P(x)\,x + Q(x)\,x - x^T P(x)\,B(x)\,R^{-1}(x)\frac{\partial B^T(x)}{\partial x}P(x)\,x + \frac{1}{2}x^T\frac{\partial Q(x)}{\partial x}x + \frac{1}{2}x^T P(x)\,B(x)\,R^{-1}(x)\frac{\partial R(x)}{\partial x}R^{-1}(x)\,B^T(x)\,P(x)\,x = 0$$

$$\dot{P}(x)\,x + x^T\frac{\partial A^T(x)}{\partial x}P(x)\,x + \frac{1}{2}x^T\frac{\partial Q(x)}{\partial x}x - x^T P(x)\,B(x)\,R^{-1}(x)\frac{\partial B^T(x)}{\partial x}P(x)\,x + \frac{1}{2}x^T P(x)\,B(x)\,R^{-1}(x)\frac{\partial R(x)}{\partial x}R^{-1}(x)\,B^T(x)\,P(x)\,x + \left[P(x)\,A(x) + A^T(x)\,P(x) + Q(x) - P(x)\,B(x)\,R^{-1}(x)\,B^T(x)\,P(x)\right]x = 0 \tag{18}$$

となる．(18)式中のSDREは(6)より0となるが，残り

$$\dot{P}(x)\,x + x^T\frac{\partial A^T(x)}{\partial x}P(x)\,x + \frac{1}{2}x^T\frac{\partial Q(x)}{\partial x}x - x^T P(x)\,B(x)\,R^{-1}(x)\frac{\partial B^T(x)}{\partial x}P(x)\,x + \frac{1}{2}x^T P(x)\,B(x)\,R^{-1}(x)\frac{\partial R(x)}{\partial x}R^{-1}(x)\,B^T(x)\,P(x)\,x = 0 \tag{19}$$

はMracekら[3]によって，SDREにおける最適性の必要条件として与えられた．(19)はSDC行列 $A(x)$ の取り方によって一般には満たされないが，Mracekらは適切な変換のもとで，最適性の必要条件(19)の左辺の ∞ ノル

ムが，状態 x の二次形式関数で抑えられることを示した．すなわち，SDRE に基づいて設計された制御則(5)により局所的に漸近安定化されていることから，$x \to 0$ となり，このとき最適性の必要条件(19)左辺も局所的かつ漸近的に 0 となる，すなわち漸近的に必要条件が満たされることになる．

Mracek が議論した最適性は局所的であり，大域的な最適性については Huang ら[19]が詳しく研究している．

[補題1]　ベクトル値関数 $p : \mathcal{X} \to \mathcal{R}^n$ が $C^1(R^n)$ 級関数で，$x \in \mathcal{X}$ に対して $p(x) = [p_1(x), \dots, p_n(x)]^T$ とする．このとき $\partial V(x)/\partial x = p(x)$ となる $V : \mathcal{X} \to \mathcal{R}$ が存在する必要十分条件は

$$\frac{\partial p_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial p_j(x)}{\partial x_i}, \quad \forall x \in X, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n \tag{20}$$

である．(20)が成り立つならば V は

$$V(x) = x^T \int_0^1 p(tx)\,dt, \quad V(0) = 0 \tag{21}$$

と与えられる．

この補題により大域的最適性が議論される．

[定理3][19]　SDRE が正定対称解 $P : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^{n \times n}$ を持つとする．このとき(11)が $p(x) = P(x)x$ として(20)を満たすならば，(5)は，(1)に対して(4)を最小化する最適状態フィードバックである．このとき V は

$$V(x) = x^T \int_0^1 tP(tx)\,dt \cdot x$$

と与えられる．

さて，$A(x)$ のパラメトリゼーションの結果として(20)を満たすものが存在するかが問題となる．Huang ら[19]はSDC行列 $A(x)$ のパラメトリゼーションの自由度に対応するフリーパラメータを導入し，その形式のなかで，SDRE に基づく制御系が最適制御となりうるものが存在することを示した．

まず(1)の $f(x)$ に対して，ある SDC 行列 $A(x)$ が与えられたとする．この $A(x)$ に対して $E(x)x = 0$ となるような $E : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^{n \times n}$ を用いて $A_0(x) = A(x) + E(x)$ とする．このとき $\dot{x} = A_0(x)x + B(x)u$ もやはり(1)の SDC 表現となっていることは自明である．すなわち，$E(x)$ をフリーパラメータと捉えて新たに導入した SDRE

$$\begin{aligned} &P(x)(A(x) + E(x)) + (A(x) + E(x))^T P(x) + Q(x) \\ &\quad - P(x)B(x)R^{-1}(x)B^T(x)P(x) = 0 \end{aligned}$$

の正定対称解 $P(x)$ を用いて与えられる制御則(5)のなかに，最適制御則となり得るものがあるかが問題となる．Huang らは，(2)のパラメトリゼーションのなかで最適制御となり得るものがあること示し，定理として与えた(文献19)参照)．定理により，SDC 行列 $A(x)$ の適切なパラメトリゼーションのもとで，SDRE に基づいた制御則は最適制御となり得ることが示されたが，最適となる $A(x)$ の表現を具体的に与える方法については未だ提案されておらず，オープンな問題となっている．

6.　応用事例：蛇型ロボットの移動制御

図1に示す3リンク蛇型ロボットの先頭先端を原点へ移動させる制御系を設計する．この蛇型ロボットは，各リンクに受動車輪が取り付けられており，アクチュエータはリンク同士を結ぶジョイントに設置されている．

蛇は，接地面との摩擦力を利用して推進していると考えられている．そこで，蛇を模倣し，受動車輪と路面との間に発生する摩擦力を制御系設計の評価関数へと組み込むことで，摩擦力を考慮した移動制御を実現する．

6.1　モデリング

まず，本システムの SDC 表現(3)を導出しよう．一般化座標 $\mathbf{q}_a$，一般化速度(擬速度を含む) $\mathbf{v}$，一般化質量行列 $\mathbf{M}_a$，一般化力行列 $\mathbf{h}_a$ を定義する．τ_i は i リンクに加わる外部トルクとする．また，本稿では $\cos\theta_i$, $\sin\theta_i$ を c_i, s_i と表現する．

$$\begin{aligned} &\mathbf{q}_a = [\theta_1\ x_1\ y_1\ \theta_2\ x_2\ y_2\ \theta_3\ x_3\ y_3]^T \\ &\mathbf{v} = [\omega_1\ w_{11}\ w_{12}\ \omega_2\ w_{21}\ w_{22}\ \omega_3\ w_{31}\ w_{32}]^T \\ &\mathbf{M}_a = \mathrm{diag}(J_1, m_1, m_1, J_2, m_2, m_2, J_3, m_3, m_3) \\ &\mathbf{h}_a = [\tau_1 - \tau_2 - C_1\dot{\theta}_1 + C_2(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1),\ 0,\ 0 \\ &\quad \tau_2 - \tau_3 - C_2(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + C_3(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2),\ 0,\ 0 \\ &\quad \tau_3 - C_3(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2),\ 0,\ 0]^T \end{aligned}$$

拘束されていないフリーな状態の運動方程式は $\mathbf{M}_a\ddot{\mathbf{q}}_a = \mathbf{h}_a$ であるが，速度変換 $\dot{\mathbf{q}}_a = A_a\mathbf{v}$ を行うことで，擬速度座標系での運動方程式を得る．

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{h} \tag{22}$$

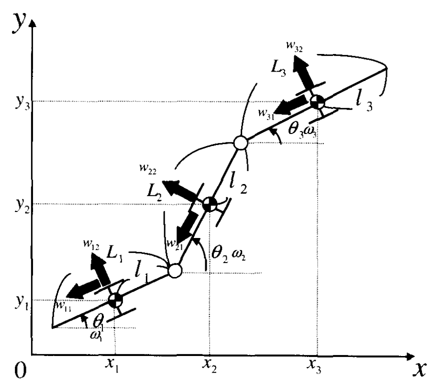

図1　3リンク蛇型ロボットと座標系

ただし，$\mathbf{M}=\mathbf{A}_a^T\mathbf{M}_a\mathbf{A}_a$，$\mathbf{h}=\mathbf{A}_a^T\mathbf{h}_a-\mathbf{A}_a^T\mathbf{M}_a\dot{\mathbf{A}}_a\mathbf{v}$，

$$\mathbf{A}_a=\mathrm{diag}\left(\mathbf{R}_1,\ \mathbf{R}_2,\ \mathbf{R}_3\right),\quad \mathbf{R}_i=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -c_i & -s_i\\ 0 & -s_i & c_i\end{bmatrix}$$

各リンクがジョイントによって連結しているというホロノミック拘束は $\mathbf{C}_h\mathbf{v}=0$

$$\mathbf{C}_h=\frac{\partial\mathbf{\Phi}_h}{\partial\mathbf{q}_a}\mathbf{A}_a,\quad \mathbf{\Phi}_h=\begin{bmatrix}x_1+l_1\cos\theta_1+d_2\cos\theta_2-x_2\\ y_1+l_1\sin\theta_1+d_2\sin\theta_2-y_2\\ x_2+l_2\cos\theta_2+d_3\cos\theta_3-x_3\\ y_2+l_2\sin\theta_2+d_3\sin\theta_3-y_3\end{bmatrix},$$

車輪が横滑りしないノンホロノミック拘束は $\mathbf{C}_{nh}v=0$

$$\mathbf{C}_{nh}=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix},$$

よって，システム全体の拘束 $\mathbf{Cv}=0$

$$\mathbf{C}=\left[\mathbf{C}_h^T\ \mathbf{C}_{nh}^T\right]^T \tag{23}$$

と表される．拘束された系の運動方程式はラグランジュの未定乗数 λ を用いて以下のように表現できる．

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{v}}=\mathbf{h}+\mathbf{C}^T\lambda \tag{24}$$

ここで，拘束された系の自由度に対応する接速度として $\dot{\mathbf{q}}=[\omega_1\ w_{11}]^T$ と選び，接速度の次元に合わせて(23)も $\mathbf{C}=[\mathbf{C}_1\ \mathbf{C}_2]$ と分割する．これを用いて

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}\mathbf{I}^{2\times2}\\ -\left(\mathbf{C}_2^T\mathbf{C}_2\right)^{-1}\mathbf{C}_2^T\mathbf{C}_1\end{bmatrix}$$

と定義すると，$\mathbf{CD}=0$ かつ $\mathbf{v}=\mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}$ を満たす直交補行列となる．ただし $\mathbf{I}^{n\times n}$ は $n\times n$ の単位行列を示す．D を用いて(24)から運動方程式が得られる．

$$\mathbf{D}^T\mathbf{M}\mathbf{D}\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{D}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{D}}\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{D}^T\mathbf{h} \tag{25}$$

図1において，外部入力は関節に取り付けられたアクチュエータのトルクとなる．そこで $u=[\tau_2,\tau_3]^T$ とし，一般化力 $\mathbf{h}$ を書き下す．

$$\mathbf{h}=\mathbf{Eu}+\mathbf{FG}\dot{\mathbf{q}}\quad\left(\mathbf{u}=[\tau_2\ \ \tau_3]^T\right) \tag{26}$$

$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix}-1&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0&1&0&0\end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix}-(C_1+C_2) & C_2 & 0\\ -m_1w_{12} & 0 & 0\\ m_1w_{11} & 0 & 0\\ C_2 & -(C_2+C_3) & C_3\\ 0 & -m_2w_{22} & 0\\ 0 & m_2w_{21} & 0\\ 0 & C_3 & -C_3\\ 0 & 0 & -m_3w_{32}\\ 0 & 0 & m_3w_{31}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}=\left[\begin{matrix}1\\ -l_1\cos\left(\theta_1-\theta_2\right)/d_2\\ \dfrac{l_1\left\{\left(-d_2+l_2\right)\cos\left(\theta_1-\theta_3\right)+\left(d_2+l_2\right)\cos\left(\theta_1-2\theta_2+\theta_3\right)\right\}}{2d_2d_3}\end{matrix}\right.$$

$$=\left.\begin{matrix}0\\ \sin\left(\theta_1-\theta_2\right)/d_2\\ -\dfrac{\left(-d_2+l_2\right)\sin\left(\theta_1-\theta_3\right)+\left(d_2+l_2\right)\sin\left(\theta_1-2\theta_2+\theta_3\right)}{2d_2d_3}\end{matrix}\right]$$

(26)より，(25)は $\tilde{\mathbf{M}}=\left(\mathbf{D}^T\mathbf{MD}\right)^{-1}\left(\mathbf{D}^T\mathbf{FG}-\mathbf{D}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{D}}\right)$，$\tilde{\mathbf{N}}=\left(\mathbf{D}^T\mathbf{MD}\right)^{-1}\mathbf{D}^T\mathbf{E}$ を用いて $\ddot{\mathbf{q}}=\tilde{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{q}}+\tilde{\mathbf{N}}\mathbf{u}$ と変形される．実際には蛇型ロボットの頭位置を制御したいので，先頭位置を含めたモデルを導出する．頭位置は接速度 $\mathbf{q}$ と

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_h\\ \dot{y}_h\end{bmatrix}=\mathbf{S}\begin{bmatrix}\omega_1\\ w_{11}\end{bmatrix},\quad \mathbf{S}=\begin{bmatrix}d_1\sin\theta_1 & -\cos\theta_1\\ -d_1\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\end{bmatrix}$$

なる関係があるので，状態を $\mathbf{x}=[x_h\ y_h\ \omega_1\ w_{11}]^T$ と取ると，以下のSDC表現を得る．

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\left(\mathbf{x}\right)\mathbf{x}+\mathbf{B}\left(\mathbf{x}\right)\mathbf{u}\\ \mathbf{A}\left(\mathbf{x}\right)=\begin{bmatrix}\mathbf{Z}^{2\times2} & \mathbf{S}\\ \mathbf{Z}^{2\times2} & \tilde{\mathbf{M}}\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}\left(\mathbf{x}\right)=\begin{bmatrix}\mathbf{Z}^{2\times2}\\ \tilde{\mathbf{N}}\end{bmatrix}\end{gathered} \tag{27}$$

ただし $\mathbf{Z}^{n\times m}$ は $n\times m$ の零行列である．

6.2 制御系設計

(27)を用いて先頭位置を目標位置に到達させる制御系を設計する．蛇は進行方向と回転方向の摩擦力を利用して進んでいると考えられるため，摩擦力を評価できる設計仕様にしたい．

摩擦力を評価関数に組み込むため，(24)より車輪に発生する拘束力を求める．

$$\begin{aligned}\mathbf{C}^T\lambda&=\mathbf{C}^T\left(\mathbf{CM}^{-1}\mathbf{C}^T\right)^{-1}\mathbf{C}\left(\dot{\mathbf{D}}\dot{\mathbf{q}}-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{h}\right)\\ &=\alpha\dot{\mathbf{q}}+\beta\mathbf{u},\end{aligned} \tag{28}$$

ただし $\alpha=\mathbf{C}^T(\mathbf{CM}^{-1}\mathbf{C}^T)^{-1}\mathbf{C}(\dot{\mathbf{D}}-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{FG})$，$\beta=-\mathbf{C}^T(\mathbf{CM}^{-1}\mathbf{C}^T)^{-1}\mathbf{CM}^{-1}\mathbf{E}$ である．ここで，$\mathbf{F}_c=\mathbf{C}^T\lambda=[\mathbf{F}_{c1}^T,\mathbf{F}_{c2}^T]^T$ とおくと，車軸方向以外の拘束力 $\mathbf{F}_{c1}$ と車軸方向の拘束力 $\mathbf{F}_{c2}$ に分解できる．さらに，$\mathbf{F}_{c1}$ を回転方向の拘束力と進行方向の拘束力とに分割する．

$$\mathbf{F}_\omega=\alpha_\omega\dot{\mathbf{q}}+\beta_\omega\mathbf{u},\quad \mathbf{F}_d=\alpha_d\dot{\mathbf{q}}+\beta_d\mathbf{u} \tag{29}$$

(29)を(27)の状態の次元に合わせて変形する．

$$\begin{gathered}\hat{\mathbf{F}}_\omega=\hat{\alpha}_\omega\mathbf{x}+\hat{\beta}_\omega u,\quad \hat{\mathbf{F}}_d=\hat{\alpha}_d\mathbf{x}+\hat{\beta}_d\mathbf{u}\\ \hat{\alpha}_\omega=\begin{bmatrix}\mathbf{Z}^{1\times2} & \mathbf{Z}^{1\times2}\\ \mathbf{Z}^{3\times2} & \alpha_\omega\end{bmatrix},\quad \hat{\beta}_\omega=\begin{bmatrix}\mathbf{Z}^{1\times2}\\ \beta_\omega\end{bmatrix}\\ \hat{\alpha}_d=\begin{bmatrix}\mathbf{Z}^{1\times2} & \mathbf{Z}^{1\times2}\\ \mathbf{Z}^{3\times2} & \alpha_d\end{bmatrix},\quad \hat{\beta}_d=\begin{bmatrix}\mathbf{Z}^{1\times2}\\ \beta_d\end{bmatrix}\end{gathered} \tag{30}$$

ここで，(4)にならって状態依存型評価関数を定義する．

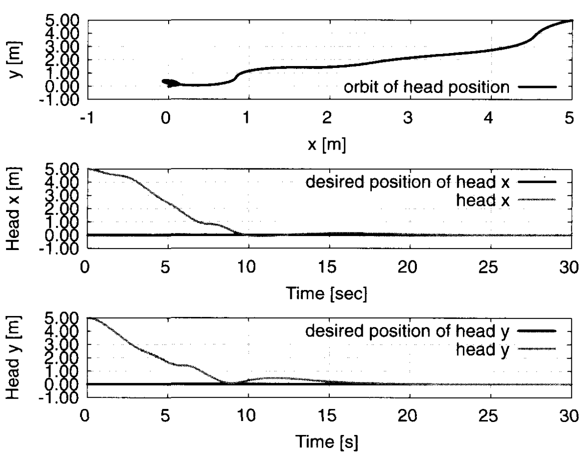

図2　蛇型ロボット先頭位置の軌跡

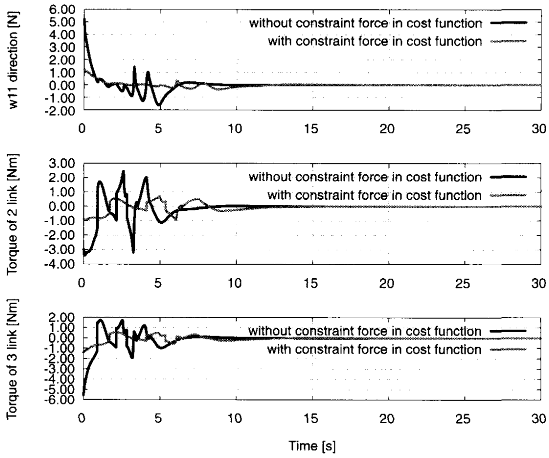

図3　摩擦力を評価関数で評価した場合としない場合の比較（上段：進行方向摩擦力，中段：τ_2，下段：τ_3）

$$
\begin{aligned}
J &= \int_0^{\infty} \left(\mathbf{x}^T \mathbf{Q}_1(\mathbf{x})\,\mathbf{x} + (\hat{\alpha}_{\omega}\mathbf{x})^T \mathbf{Q}_2(\mathbf{x})\,(\hat{\alpha}_{\omega}\mathbf{x}) \right.\\
&\quad + (\hat{\alpha}_d\mathbf{x})^T \mathbf{Q}_3(\mathbf{x})\,(\hat{\alpha}_d\mathbf{x}) + (\hat{\beta}_{\omega}\mathbf{u})^T \mathbf{R}_2(\mathbf{x})\,(\hat{\beta}_{\omega}\mathbf{u})\\
&\quad \left. + (\hat{\beta}_d\mathbf{u})^T \mathbf{R}_3(\mathbf{x})\,(\hat{\beta}_d\mathbf{u}) + \mathbf{u}^T \mathbf{R}_1(\mathbf{x})\,\mathbf{u}\right) dt\\
&= \int_0^{\infty} \left(\mathbf{x}^T \mathbf{Q}(\mathbf{x})\,\mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}(\mathbf{x})\,\mathbf{u}\right) dt, \qquad (31)
\end{aligned}
$$

ただし，

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Q}(\mathrm{x}) &= \mathbf{Q}_1(\mathrm{x}) + \hat{\alpha}_{\omega}^T \mathbf{Q}_2(\mathbf{x})\,\hat{\alpha}_{\omega} + \hat{\alpha}_d^T \mathbf{Q}_3(\mathbf{x})\,\hat{\alpha}_d\\
\mathbf{R}(\mathrm{x}) &= \hat{\beta}_{\omega}^T \mathbf{R}_2(\mathrm{x})\,\hat{\beta}_{\omega} + \hat{\beta}_d^T \mathbf{R}_3(\mathbf{x})\,\hat{\beta}_d + \mathbf{R}_1(\mathbf{x}) \qquad (32)
\end{aligned}
$$

重み行列 $\mathbf{Q}_1(\mathbf{x}), \mathbf{Q}_2(\mathbf{x}), \mathbf{Q}_3(\mathbf{x}), \mathbf{R}_1(\mathbf{x}), \mathbf{R}_2(\mathbf{x}), \mathbf{R}_3(\mathbf{x})$ はそれぞれ半正定行列，正定行列とする．(27), (32)を用いてSDRE(6)に基づいた状態フィードバック則(5)が得られる．

6.3　シミュレーション

設計した制御系をシミュレーションにより検証する．シミュレーションは，MaTX[20]で行い，常微分方程式の積分アルゴリズムはRKF45法，刻み時間を0.01[sec]とした．

図2より，自然とくねりを生じながら先頭位置が目標位置(原点)に到達していることがわかる．本制御系は本質的にレギュレータ問題であるため，軌道を必要としない点が面白い．また，**図3**より，拘束力を評価関数に組み込んで評価した場合は，組み込まない場合に比べて，摩擦力，入力トルクが小さくなっている．結果，高効率な制御が行われていると考えられる．このように，SDREに基づいた制御系設計では，「摩擦力を評価する」というような制御仕様をうまく評価関数に取り込み，評価しながら，メカニカルシステムのような非線形システムを安定化することができ，応用が効くと考えられる．

7.　おわりに

状態依存型リッカチ方程式(SDRE)に基づく制御系設計法について，そのパラメトリゼーション，解の存在性，安定性，最適性について概説した．また，SDREに基づく制御系設計の応用事例として，蛇型ロボットの移動制御を紹介した．SDREの枠組みでは，重み行列 Q, R が x の関数であることが許されるため，$Q(x)$, $R(x)$ をうまく設計することで，より高度で複雑な制御性能を実現できる可能性があり，興味深い．SDREに基づくアプローチは未解決な問題が数多く残されており，本稿でも簡単に触れた．理論・応用両面において今後のさらなる研究成果が期待されている．

参　考　文　献

1) J. D. Pearson: Approximation methods in optimal control, Journal of Electronics and Control, **13**, 453/469 (1962)

2) A.Wernli and G. Cook: Suboptimal control for the nonlinear quadratic regulator problem, Automatica, **11**, 75/84 (1975)

3) C. P. Mracek and J. R. Cloutier: Control design for the nonlinear benchmark problem via the state-dependent Riccati equation method, International Journal of Robust and Nonlinear Control, **8**, 401/433 (1998)

4) J. R. Cloutier and D. T. Stansbery: All-aspect acceleration-limited homing guidance, Proc. of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, Portland, OR, AIAA-99-4063 (1999)

5) C. P. Mracek and J. R. Cloutier: Missile longitudinal autopilot design using the statedependent Riccati equation method, Proc. of the International Conference on Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace, Daytona Beach, FL, 387/396 (1996)

6) J. R. Cloutier and D. T. Stansbery: Nonlinear, hybrid-to-turn/

skid-to-turn autopilot design, Proc. of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, Montreal, Canada, AIAA-2001-4158 (2001)

7) P. K. Menon and E. J. Ohlmeyer: Computer-aided synthesis of nonlinear autopilots for missiles, Nonlinear Studies, **11**, 173/198 (2004)

8) D. K. Parrish and D. B. Ridgely: Attitude control of a satellite using the SDRE method, Proc. of the American Control Conference, Albuquerque, NM, 942/946 (1997)

9) J. R. Cloutier and D. T. Stansbery: Control of a continuously stirred tank reactor using an asymmetric solution of the state-dependent Riccati equation, Proc. of the IEEE Conference on Control Applications, Hawaii, HI, 893/898 (1999)

10) E. B. Erdem and A. G. Alleyne: Experimental real-time SDRE control of an underactuated robot, Proc. of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, Piscataway, NJ, 219/224 (2001)

11) S. Terashima, M. Iwase, K. Furuta and S. Suzuki: A design of servo controller for nonlinear systems using state dependent Riccati equation, Proc. of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control, Hawaii, HI, 3864/3869 (2003)

12) S. Suzuki, K. Furuta and Y. Pan: State-dependent sliding-sector VS-control and application to swing-up control of pendulum, Proc. of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control, Hawaii, HI, 251/256 (2003)

13) K. Watanabe, M. Iwase, S. Hatakeyama and T. Maruyama: Control strategy for a snakelike robot based on constraint force and its validation, Proc. of IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, Zurich (2007)

14) J. R. Cloutier, C. N. D'Souza and C. P. Mracek: Nonlinear regulation and nonlinear H_∞ control via the state-dependent Riccati equation technique: Part I, Theory, Part II, Examples, Proc. of the First International Conference on Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace, Daytona Beach, FL, 117/141 (1996)

15) C. Jaganath, A. Ridley and D. S. Bernstein: A SDRE-based asymptotic observer for nonlinear discrete-time systems, Proc. of the American Control Conference, Portland, OR, 3630/3635 (2005)

16) T. Çimen: State-dependent Riccati equation (SDRE) control: a survey, Prof. of th 17th IFAC World Congress, Seoul, Korea, 201/215 (2008)

17) A. J. van der Schaft: On a state space approach to nonlinear H_∞ control, Systems and Control Letters, **16**, 1/8 (1991)

18) E. B. Erdem and A. G. Alleyne: Design of a class of nonlinear controllers via state dependent Riccati equations, IEEE Transactions on Control Systems Technology, **12**, 2986/2991 (2004)

19) Y. Huang and W. M. Lu: Nonlinear optimal control: alternatives to Hamilton-Jacobi equation, Proc. of the 35th IEEE Conference on Decision and Control, Kobe, Japan, 3942/3947 (1996)

20) 古賀雅伸：制御・数値解析のためのMaTX，東京電機大学出版局 (2000)