



マルチボディダイナミックスのモデリングと定式化 —陰的なラグランジュ形式へ向けて—

吉村 浩明*

Modeling and Formalisms of Multibody Dynamics: Towards Implicit Lagrangian Formalisms

Hiroaki Yoshimura*

Key words: Multibody dynamics, Modeling, DAEs, Implicit Lagrangian systems, Dirac structures

1. はじめに

マルチボディダイナミックスの登場は, Hooker and Margulies¹⁾によって人工衛星のダイナミックスに関する多剛体系の定式化の論文が発表された1960年代に遡る. 以来, 約半世紀が経とうとしており, マルチボディダイナミックスに関連する研究は枚挙に遑がない¹⁾. 筆者がマルチボディダイナミックスの研究を始めた1980年代は, 日本ではマルチボディダイナミックスは殆ど注目されておらず, マルチボディシステムという言葉さえ聞かれる事も殆どなかった. しかし, 欧米では, Kane⁷⁾やRoberson and Wittenburg⁸⁾といったパイオニア世代による多剛体系の定式化に関する研究から次の第2世代による柔軟多体系のモデリングと定式化に関する研究へと関心が移っていた. 筆者は, 宇宙構造物等の柔軟多体系のダイナミックスを対象にして, モデリングや記号生成による効率的な数値解析法の開発といった観点から研究に従事して来たが(Kawase and Yoshimura⁹⁾, Yoshimura, Nakano and Kawase¹⁰⁾, 吉村¹¹⁾, Yoshimura and Kawase¹²⁾), 研究を進めるに連れ, 日に日にある種の疑問が頭をもたげてきた. それは「マルチボディダイナ

ミックスは, そもそも古典力学の理論に何をもたらしたのであろうか?」という素朴な疑問であった. 言うまでもなく, マルチボディダイナミックスの理解には, ラグランジュ形式やハミルトン形式といった力学形式とともに, 拘束系を扱うために, ラグランジュ・ダランベール原理等の変分原理を基礎とする解析力学の理論が不可欠である. 一方, マルチボディシステムの運動方程式を筆算で導出することは殆ど不可能であり, 定式化には数式処理や数値計算が不可欠である. また, 導出した運動方程式が正しいかどうかを確かめることも極めて難しく, これらは紛れもなくマルチボディダイナミックスが持ち込んだ技術的課題であるが, 果たして, マルチボディダイナミックスは従来の解析力学の枠組みを超えた何か新たな力学形式を提起したのだろうか.

本稿では, マルチボディダイナミックスの汎用計算機コードで使われているモデリングと定式化の方法を概観しながら, マルチボディダイナミックスの数学モデルが, ニュートンの運動方程式に代表される, いわゆる2階の微分方程式とは異なり, 1階の陰形式微分代数方程式によって表されることを示す. さらに, それがどのように解析力学の理論体系の中で捉えられるのかを見てみたい. 特に, 微分代数方程式による数学モデルは, とすると, 2階の微分方程式からの単なる式の置き換えのように捉えられがちであるが, そうではなく, 従来の力学体系には現れなかった「陰的なラグランジュ形式」という新しい力学形式を提供していることを明らかにしたい.

* 早稲田大学理工学術院機械科学・航空学科
Dept. Applied Mechanics and Aerospace Engineering,
Waseda University

1 マルチボディダイナミックスに関する研究レビューについては, 例えば, Schwertassek and Roberson²⁾, 吉村³⁾, 吉村・川瀬⁴⁾, Shabana⁵⁾, Schiehlen⁶⁾等を参照の事.

2. モデリングの方法と定式化

2.1 拘束のないマルチボディシステムの定式化

ニュートン・オイラー法. 初めに, 拘束を受けないマルチボディシステムの代表的なシステムとして, 図1に示すような単純チェーン構造のロボットマニピュレータを考え, 代表的な定式化方法として, ニュートン・オイラー法について見てみよう.

いま, ロボットが $\mathcal{N}$ 個の剛体のボディからなるマルチボディシステムであるとする. 図2に示すように, 慣性系から見た i 番目のボディの位置ベクトル $\mathbf{R}_i$ と i 番目のボディの重心に固定された局所系 L_i の慣性系 O に対する姿勢を表す 3×3 の回転変換行列 A_i は n 個の一般化座標 $q^1, \dots, q^n$ を用いて

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_i(q^1, \dots, q^n), \quad A_i = A_i(q^1, \dots, q^n) \quad (2.1)$$

と表される. 但し, $i = 1, \dots, \mathcal{N}$. 後述するように, これらの関係式はホロノミック拘束である. また, i 番目のボディの速度 $\mathbf{v}_i$ と姿勢の時間微分 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i$ は

$$\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{R}}_i, \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i = A_i^{-1} \dot{A}_i$$

のように与えられる. ここに, $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i$ は回転行列 A_i の時間微分から導かれる歪対称な 3×3 行列であり, i 番目の

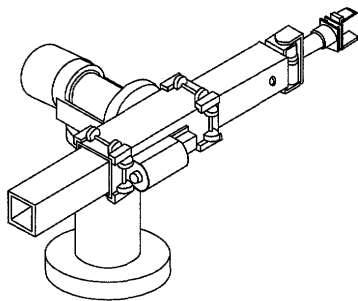


図1 マニピュレータ

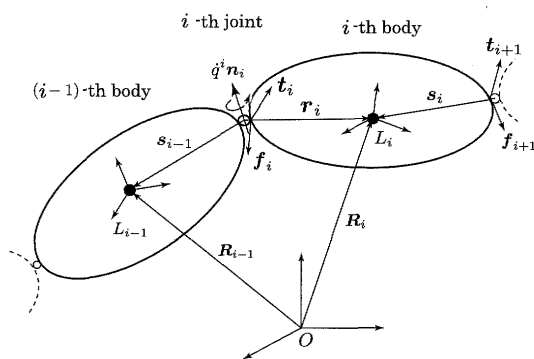


図2 隣接するボディ間の幾何学的な関係

ジョイントのヒンジ点から i 番目のボディの重心までの位置ベクトルを $\mathbf{r}_i$ とすると, 剛体の角速度 $\boldsymbol{\omega}_i$ は $\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_i = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{r}_i$ として定義される²⁾. さらに, i 番目の回転型ジョイントのヒンジ点から $(i-1)$ 番目のボディの重心までの位置ベクトルを $\mathbf{s}_{i-1}$ とすると, i 番目のボディは $(i-1)$ 番目のボディと理想ジョイントを介して

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_i - \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{s}_{i-1} \quad (2.2)$$

$$\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_{i-1} + \dot{q}^i \mathbf{n}_i \quad (2.3)$$

なる運動学的関係が成立する. q^i は 1 自由度の i 番目の回転型ジョイントの角度であり, $\mathbf{n}_i$ は i 番目のジョイントの自由度方向の単位ベクトルである. i 番目のジョイントを介して $(i-1)$ 番目のボディから i 番目のボディへ作用する力とトルクを各々 $\mathbf{f}_i, \mathbf{t}_i$ とし, i 番目のボディに加わる合力と全トルクを各々 $\mathbf{F}_i, \mathbf{T}_i$ とすると, 力学的な関係として,

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{f}_i - \mathbf{f}_{i+1} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{T}_i = \mathbf{t}_i - \mathbf{t}_{i+1} - \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i + \mathbf{s}_i \times \mathbf{f}_{i+1} \quad (2.5)$$

$$\boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{t}_i \quad (2.6)$$

を得る. i 番目のボディのダイナミクスは, 並進運動に関するニュートンの運動方程式と回転運動に関するオイラー方程式によって

$$m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \mathbf{F}_i \quad (2.7)$$

$$\mathbf{I}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{T}_i \quad (2.8)$$

と表される. 逆動力学的計算アルゴリズムは, 式(2.2)~(2.8)を用いて, 入力として, 関節の座標 $q^i(t)$, 速度 $\dot{q}^i(t)$ および加速度 $\ddot{q}^i(t)$ を与え, 出力として, 駆動トルク $\boldsymbol{\tau}_i$ を導出するものである. 特に, ニュートン・オイラー法に基づく計算アルゴリズムは $\mathcal{N}$ 個の剛体のボディからなるロボットの逆動力学問題に対して, 再帰的な代数計算によってオーダー $\mathcal{N}$ の計算が可能であり, 演算効率の面で最も優れていることが示されている (Walker and Orin¹³⁾).

ラグランジュ法. 一般化座標を用いて自由度分の運動方程式を機械的に導出できる方法としてラグランジュ形式に基づく定式化法がある. すなわち, n 個の一般化座標 q^k 及び n 個の一般化速度 $\dot{q}^k$ を用いて, 系のラグランジアンを $L(q, \dot{q})$ とすると, ハミルトンの原理より, ラグランジアン の作用積分

2 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i = A_i^{-1} \dot{A}_i$ は A_i を左移動で原点に戻したものであり, 角速度 $\boldsymbol{\omega}_i$ は物質表示, または, ラグランジュ表示の角速度である.

$$S(q(t)) = \int_a^b L(q, \dot{q}) dt$$

の停留条件 $\delta S(q(t)) = 0$ から、ラグランジュの運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial L}{\partial q^k}$$

として導出できる。

マニピュレータの場合、各関節に駆動アクチュエータがあり、その駆動トルク(力) τ_k は非保存的であるため、ハミルトンの原理を修正して

$$\sum_{k=1}^n \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right) \delta q^k dt + \sum_{k=1}^n \int_a^b \tau_k \delta q^k dt = 0$$

なるラグランジュ・ダランベールの原理によってダイナミックスの定式化を行う必要がある。これにより、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L}{\partial q^k} = \tau_k, \quad k=1, \dots, n$$

のように系の自由度を与える独立な一般化座標 q^k に関する運動方程式の定式化ができる。

系のラグランジアンを運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの差として

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} M_{jk}(q) \dot{q}^j \dot{q}^k - V(q)$$

のように与える場合、ラグランジュの運動方程式は

$$\sum_{k=1}^n M_{jk}(q) \ddot{q}^k + \sum_{k,l=1}^n \Gamma_{jkl}(q) \dot{q}^k \dot{q}^l + \frac{\partial V(q)}{\partial q^j} = \tau_j \quad (2.9)$$

となる。但し、

$$\Gamma_{jkl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial M_{jk}}{\partial q^l} + \frac{\partial M_{lk}}{\partial q^j} - \frac{\partial M_{jl}}{\partial q^k} \right)$$

はクリストッフエルの記号である³。式(2.9)は、左辺の第2項、第3項の非線形項をまとめて $f_j(q, \dot{q})$ と置き、

$$M_{jk}(q) \ddot{q}^k + f_j(q, \dot{q}) = \tau_j, \quad \text{あるいは} \quad M(q) \ddot{q} + f(q, \dot{q}) = \tau \quad (2.10)$$

と表す。ここに、 $M(q) = [M_{jk}]$, $f(q, \dot{q}) = [f_1(q, \dot{q}), \dots, f_n(q, \dot{q})]^T$, $\tau = [\tau_1, \dots, \tau_n]^T$ は関節駆動力(またはトルク)である。

2.2 拘束を受けるマルチボディシステムの定式化

一般に、マルチボディダイナミックスの定式化では、逆動力学のための計算効率に限らず、トルク(力)を入力として関節角度の軌道を出力とする、いわゆる順動力学による数値積分を行う必要があり、前述のニュートン・オイラー法に基づくアルゴリズムだけでは十分ではない。また、ラグランジュ形式を用いる場合でも、

3 ロボットのダイナミックスはリーマン空間で記述すると簡潔に説明できる。

ボディの結合形態は単純チェーンとは限らず、閉ループ構造を有する場合等、拘束条件を受ける力学系として、より一般的な観点からダイナミックスの定式化を行うことが重要である(Bianchi and Schiehlen¹⁴⁾)。

ダランベールの原理。 マルチボディシステムの結合形態として、図1のロボットのような単純チェーンのトポロジー構造を持つ力学系だけでなく、図2に示すように、二輪車のように閉ループ構造を持つもの、二足歩行ロボットや双腕ロボットによる捕捉などのように系のトポロジーが閉ループ構造とツリー構造の間で切り替わるものも含めて、より複雑な結合形態を持つシステムを考察する必要がある。

このようなボディ間の結合形態をトポロジー構造として捉えてグラフを用いてモデル化を行う方法が提案されている。例えば、回路グラフを用いた方法(Roberson and Wittenburg⁸⁾)やボンドグラフを用いた方法(吉村¹¹⁾、川瀬¹⁵⁾)がある。特に、自由度分の運動方程式を導出する場合、ボディ間のジョイント結合に伴う運動学的な拘束から不必要な拘束力や内力を消去する必要がある。グラフを用いる方法は、大規模かつ複雑化したマルチボディシステムのモデリングにおいて非常に有効である。グラフを用いるかどうかに関わらず、拘束を受ける系を考察する場合、拘束力の消去においては、基本的にダランベールの原理に基づく方法が用いられる。この際、自由度や独立座標の概念に関連して、ホロノミック拘束と非ホロノミック拘束で取り扱いが異なるので注意する必要がある。ここでは、ホロノミック拘束を受ける系として、前述のニュートン・オイラー方程式で表されたマニピュレータを考えると、ダランベールの原理は

$$\sum_{i=1}^N \langle F_i - m_i \ddot{v}_i, \delta R_i \rangle + \langle T_i - I_i \ddot{\omega}_i - \omega_i \times I_i \omega_i, \delta \pi_i \rangle = 0 \quad (2.11)$$

と表される。式(2.1)のホロノミック拘束が成り立つこ

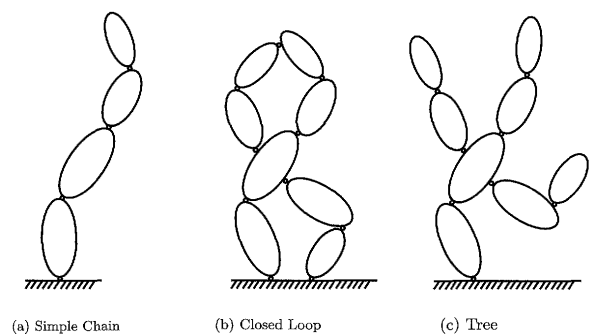


図3 位相構造

とから, 仮想変位 δR_i と仮想角変位 $\delta \pi_i$ は, 一般化座標の仮想変位 δq^k を用いて

$$\delta R_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial R_i}{\partial q^k} \delta q^k, \quad \delta \pi_i = \sum_{k=1}^n A_i^{-1} \frac{\partial A_i}{\partial q^k} \delta q^k$$

のように表される. これらの関係を式(2.11)のダランベールの原理へ代入し, 独立な変分 δq^k をとると, n 自由度の産業用ロボットの運動方程式(2.10)が得られる. **Kaneの方法.** ダランベールの原理に基づいたマルチボディダイナミックスの定式化法として, Kane⁷⁾の方法やSchiehlen¹⁶⁾の方法が良く知られている. 以下に, Kaneの方法について簡単に見ておこう.

いま, $\mathcal{N}$ 個の剛体からなるマルチボディシステムを考え, 次のように, 一般化速度 $\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n$ の間に m 個の運動学的拘束

$$\sum_{j=1}^n N_{rj}(q) \dot{q}^j = 0, \quad r = 1, \dots, m < n, \quad \text{または} \quad N(q) \dot{q} = 0 \quad (2.12)$$

が与えられたとしよう. 但し, $N(q) = [N_{rj}]$ は $m \times n$ 行列である. もし拘束条件式(2.12)が

$$\Phi(q) = 0 \quad (2.13)$$

のような座標だけの関数 $\Phi(q) = [\Phi_1(q), \dots, \Phi_m(q)]^T$ として記述できるとき, これを**ホロノミック拘束**といい, そうでない場合を**非ホロノミック拘束**(Neimark and Fufaev¹⁷⁾)という. ホロノミック系の場合, $N(q) = [\partial \Phi_r / \partial \dot{q}^j]$ となることは言うまでもない. 式(2.12)より, $p = n - m$ 個の独立な一般化速度 $\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^p$ について解いて

$$\dot{q}^r = \sum_{s=1}^p B_{rs}(q) \dot{q}^s, \quad r = p+1, \dots, n \quad (2.14)$$

と変形する. ここに, $N_{rj}(q), B_{rs}(q)$ は一般化座標 $q = (q^1, \dots, q^n)$ の関数である. 独立な一般化速度の数は $p = n - m$ であるが, 式(2.14)は積分不能な非ホロノミック拘束であるため, 配位空間の次元 (すなわち, 独立座標の数) は依然として n である⁴.

以上より, i 番目の剛体の並進速度を独立な一般化速度で表すと

$$v_i = \sum_{s=1}^p \frac{\partial R_i}{\partial q^s} \dot{q}^s + \sum_{r=p+1}^n \frac{\partial R_i}{\partial q^r} \left(\sum_{s=1}^p B_{rs} \dot{q}^s \right) = \sum_{s=1}^p \dot{q}^s v_i^s, \quad i = 1, \dots, \mathcal{N}$$

のようになる. ここに,

4 ホロノミックな拘束を受ける場合, 独立速度の次元と独立座標の次元は同じであり, これを自由度というが, 非ホロノミック系の場合, 速度ベクトルの空間の次元が $n - m$ であるのに対して, 配位空間の次元は n となっており, 自由度の概念がホロノミック系の場合とは異なることに注意が必要である.

$$v_i^s = \frac{\partial R_i}{\partial q^s} + \sum_{r=p+1}^n \frac{\partial R_i}{\partial q^r} B_{rs}, \quad s = 1, \dots, p, \quad i = 1, \dots, \mathcal{N}$$

を**部分速度ベクトル**(partial velocity)という. 同様に, 角速度についても**部分角速度**(partial angular velocity) ω_i^s が定義できて,

$$\omega_i = \sum_{s=1}^p \dot{q}^s \omega_i^s, \quad i = 1, \dots, \mathcal{N}$$

と書くことができる. これら部分速度と部分角速度を用いて, **Kaneの方程式**を以下のように導くことができる.

$$K_s + K_s^* = 0, \quad s = 1, \dots, p. \quad (2.15)$$

ここに, K_s は**一般化作用力**(generalized active force), K_s^* は**一般化慣性力**(generalized inertia force)であり,

$$K_s = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} F_i \cdot v_i^s + \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} T_i \cdot \omega_i^s, \\ K_s^* = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} (-m_i \dot{v}_i) \cdot v_i^s + \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} (-I_i \dot{\omega}_i - \omega_i \times I_i \omega_i) \cdot \omega_i^s$$

と与えられる. Kaneの方程式(2.15)は一般化作用力と一般化慣性力の釣り合い式であり, 独立速度と同じ数 $p = n - m$ の運動方程式を導くことができる⁵. このように, Kaneの方法は, 原理的には, ダランベールの原理に基づくものであるが, 一旦, 部分速度を導くことができれば, 拘束力の自動消去と機械的な計算が可能のため, 数式処理によるコード化が容易である利点がある. 一方で, 部分速度の力学的な意味が十分に明確でないため, 解析力学に精通していないと, 部分速度の選択やその導出に困難を伴う(Kane and Levinson¹⁸⁾). この部分速度の概念は微分幾何学の概念を用いて合理的に説明することが可能であるが, これについては別の機会に譲りたい.

ラグランジュ・ダランベール原理. 解析力学では, 非ホロノミック拘束を受ける力学系の定式化は, **ラグランジュ・ダランベール原理**を用いて行われる(Bloch¹⁹⁾). いま, ラグランジアン $L(q, \dot{q})$ が与えられているとし, 一般化速度 $\dot{q} = (\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ の間に, m 個の運動学的拘束式(2.12)が成立するものとする.

ラグランジュ系の運動は, 配位空間上の点の軌跡 $q(t) = (q^1(t), \dots, q^n(t))$, $a \leq t \leq b$ として与えられるが, 非保存的な一般化外力を $F(q, \dot{q})$ とすると,

5 一般に, 非ホロノミック拘束の場合, 一般化座標については数を減らすことができないので, Kaneの運動方程式とともに拘束条件式(2.14)が必要となる.

$$\sum_{i=1}^N \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i + \sum_{i=1}^n \int_a^b F_i(q, \dot{q}) \delta q^i = 0 \quad (2.16)$$

なるラグランジュ・ダランベールの原理によって運動が決定できる。但し、変分 δq^i は

$$\sum_{i=1}^n N_{ri}(q) \delta q^i = 0, \quad r = 1, \dots, m < n \quad \text{または} \quad N(q) \delta q = 0$$

に従うものとする。式(2.16)より、ラグランジュ未定乗数 $\lambda_r, r = 1, \dots, m$ を用いて

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} &= F_i(q, \dot{q}) + \lambda_r N_{ri}, \\ \text{または} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} &= F(q, \dot{q}) + N^T \lambda \end{aligned}$$

を得る。このラグランジュ・ダランベール方程式と式(2.12)を合わせた $(n+m)$ 個の微分代数方程式によって、 $(n+m)$ 個の未知変数 (q^i, λ_r) に関するダイナミックスの定式化が可能となる (Yoshimura and Kawase²⁰⁾)。

3. 陰的なラグランジュ形式によるマルチボディダイナミックスの定式化

3.1 柔軟マルチボディシステムの定式化

近年、アンテナなど柔軟部材からなる宇宙構造物や大型建設機械の解析などに関連して、剛体運動とともに大変形挙動を伴う柔軟体を含むマルチボディシステムの研究が盛んに行われている。従来、柔軟体の変形記述を仮定モード法に基づいて定式化する方法も盛んに研究されたが、最近では有限要素法による変形の記述が主流になっている。これは、柔軟マルチボディシステムの弾性変形が系全体の剛体運動による幾何学的な非線形性を有するため、モード法では大変形挙動の解析が困難であることに起因する。(非線形)有限要素法に基づく柔軟マルチボディダイナミックスの定式化では、弾性変形の記述法は、座標系の取り方によって、大きく、(1)浮動基準座標系(動座標系)、及び(2)絶対節点座標系の座標を用いたものに分けられる (Shabana⁵⁾)。

浮動基準座標系を用いた定式化。 浮動基準座標系による記述法は、剛体のマルチボディダイナミックスとの相性が良く、従来、柔軟マルチボディダイナミックスの定式化でも頻繁に用いられて来た方法である。図4に2次元梁の弾性変形の様子を示す。浮動基準座標系 $L-X'Y'$ は柔軟ボディに固定された局所系であり、弾性変位は

$$R(x, t) = R_L(t) + A(\theta) u(x, t)$$

と記述できる。ここに、 x は梁の図心軸に沿った空間座標である。また、 $u(x, t)$ は浮動基準座標系(局所系) L

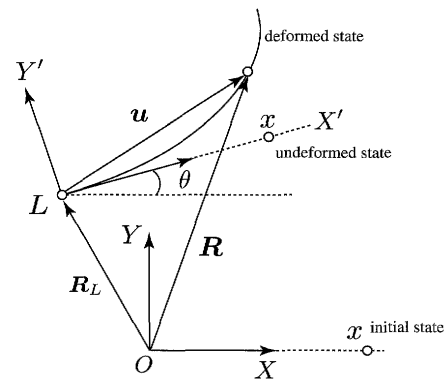


図4 柔軟体の変形

$-xy$ から観た弾性変位であり、 $L-X'Y'$ 座標系で定義された形状関数 S_L を用いて点 x における弾性変形が $u(x, t) = S_L(x) q_f(t)$ のように記述できる。ここに、 A は θ をパラメータとする局所系の絶対節点座標系 $O-XY$ (慣性系) に対する姿勢を表す回転行列であり、

$$q_r = \begin{pmatrix} R_L \\ \theta \end{pmatrix}$$

とすると、運動方程式は以下のように表される。

$$M(q) \ddot{q} + Kq = Q(q, \dot{q}).$$

ここに、 M は慣性行列、 K は剛性行列、 Q はコリオリ力や遠心力、外力からなる非線形な力であり、

$$M = \begin{pmatrix} M_{rr} & M_{rf} \\ M_{fr} & M_{ff} \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{ff} \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} q_r \\ q_f \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} Q_r \\ Q_f \end{pmatrix}$$

である。慣性項 M や F が非線形性の強いものとなる一方、剛性行列 K は定数になるという特徴がある。

絶対節点座標系を用いた定式化。 一方、絶対節点座標系 $O-XY$ を用いた場合、要素節点座標 e として点 x の変位座標と変位勾配を選び、慣性系で定義された形状関数 S を用いることで、弾性変位は

$$R = S(x) e(t)$$

として慣性系の絶対座標を用いて記述するため、運動方程式は

$$M\ddot{e} = F(e)$$

のように定式化される。ここで、慣性行列 M は定数になり、浮動基準座標系のように、要素内の点における剛体回転と弾性変形を用いて剛体運動による大回転挙動と弾性変形の複雑な連成を導く必要がない。一方で、弾性力 $F(e)$ は非線形となるという特徴がある。

本稿では、紙面の都合もあり、詳細については述べ

ないが、2つの形状関数 S_i と S の間の座標変換を介して、両者は数学的に等価であることが示されている (Shabana and Schwertassek²¹⁾). 大変形挙動や剛体マルチボディシステムとの整合性、及び数値シミュレーションする際の精度や安定性の面からも、今後、より詳細な比較・検討が必要である。

柔軟マルチボディダイナミックスの数学モデル. ここでは、微分代数方程式によるダイナミックスの定式化という観点から柔軟マルチボディシステムの数学モデルを分類してみよう。離散化された有限要素同士を接続する場合、接続される節点における変位座標と変位勾配が一致する条件としてホロノミック拘束式(2.13)が課される。このようなホロノミック拘束を受けるマルチボディシステムの運動方程式は

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ F(q, v) + N^T \lambda \end{pmatrix},$$

$$0 = \Phi(q)$$

と記述できる。ここに、 M は慣性力、 F はコリオリ力、遠心力、あるいは、弾性力やその他の外力を表す。また、 $N = [\partial \Phi_{q_j} / \partial q^j]$ である。このように、拘束条件が座標レベルで記述される微分代数方程式を**微分指数3**の定式化という⁶。しかし、微分指数3の数学モデルは、系に特異点がある場合やその近くを運動が通過する際に数値的に不安定になることが知られている (Yoshimura²²⁾). それを回避するために、微分指数を下げて、拘束条件を速度レベル(微分指数2)、あるいは、加速度レベル(微分指数1)の定式化を行うことが多い。また、非ホロノミックな拘束

$$N(q) \dot{q} = 0$$

を受ける場合は、最初から速度レベルの拘束で考えなければならない。**微分指数2**の定式化では、運動方程式は

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & M & -N^T \\ N & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{v} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ F(q, v) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

のように記述できる。この定式化は、マルチボディダイナミックスの代表的な汎用計算コードである **ADAMS** で良く利用される。さらに、加速度レベルで拘束条件を表した場合の**微分指数1**の数学モデルは

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & M & -N^T \\ 0 & N & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{v} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ F(q, v) \\ \dot{N} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

のような陰形式の微分代数方程式として定式化できる。微分指数1の数学モデルは、汎用計算コード **DADS** で用いられる。このような微分指数1, 2の数学モデルは、特異点付近での数値的な不安定性を回避できる一方で、得られた数値解がもとのホロノミック拘束を満足しないという、いわゆる**拘束安定性**の問題を引き起こすことが知られている。そのために、Baumgarte²³⁾の方法、Gear, Leimkuhler and Gupta²⁴⁾の方法、幾何学的拘束安定化法(Yoshimura²²⁾)など種々の拘束安定化法が提案されているが、ここでは、紙面の都合でこれ以上は触れないことにする。

上に述べた微分代数方程式による数学モデルを一般化したものとして、**陰的なラグランジュ形式**による定式化法がある。以下、これについて述べよう。

3.2 接続の原理とディラック構造

いま、 k 次元の一般化速度 v とそれと双対な k 次元の一般化力 F の間のペアリング(双対内積)に

$$\langle F, v \rangle = 0 \quad (3.3)$$

という関係が成り立つとき、これを**接続の原理**と呼ぼう(吉村¹¹⁾, 川瀬¹⁵⁾). v は仮想変位 δq だけでなく、実速度 $\dot{q}$ をも含むことに注意する必要がある。したがって、接続の原理は仮想仕事の原理やパワ原理を含む力学原理であり、様々な力学系の拘束を定式化する際に有効である。以下にそれを見てみよう。

非ホロノミック拘束. n 次元の配位空間を考える。運動学的拘束式(2.12)は、運動量相空間上に持ち上げて、運動量相空間上の点 $Z = (q, p)$ における一般化された $2n$ 次元の速度

$$\dot{Z} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix}$$

に関する非ホロノミック拘束として、以下のように書き換えることができる。

$$\sum_{j=1}^{2n} \tilde{N}_{rj} \dot{Z}^j = 0, \quad r = 1, \dots, m < 2n \quad \text{または} \quad \tilde{N} \dot{Z} = 0.$$

ここに、 $\tilde{N} = (N, 0)$ である。また、運動量相空間上の一般化力を $F(F_q, F_p)^T$ と置き、運動量相空間上のシンプレクティック行列(構造) (Marsden and Ratiu²⁵⁾) を

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

として、行列 $\tilde{N}$ 及びラグランジュの未定乗数 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T$ を用いて

6 微分指数とは、微分代数方程式を常微分方程式に式変形をして変換する際に要する微分の回数である。

$$F = \Omega \dot{Z} + \tilde{N}^T \lambda, \text{ すなわち } F = \begin{pmatrix} F_q \\ F_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{p} \\ \dot{q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N^T \\ 0 \end{pmatrix} \lambda \quad (3.4)$$

と定義すると

$$\begin{aligned} \langle F, \dot{Z} \rangle &= \langle F_q, \dot{q} \rangle + \langle F_p, \dot{p} \rangle \\ &= \langle -\dot{p} + N^T \lambda, \dot{q} \rangle + \langle \dot{q}, \dot{p} \rangle = \lambda^T (N \dot{q}) = 0 \end{aligned}$$

のように**パワ保存則**が成立する。式(3.3)の一般化力 F と一般化速度 $\dot{Z}$ の間の関係を**運動量相空間上のディラック構造**と呼ぶ(Yoshimura and Marsden^{26, 27)})。また、 $\tilde{N}^T \lambda$ は一般化された拘束力である。

3.3 陰的なラグランジュ形式

速度相空間の座標を (q, v) として、ラグランジアンを $L(q, v)$ としよう。ここで L は退化していても良い。また、運動量相空間の座標を (q, p) として、 $\bar{Z} = (q, v, p)$ における一般化された部分速度ベクトルを

$$\dot{\bar{Z}}(q, v, p) = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix}$$

としよう(但し、 $\dot{v} = 0$ である)。また、ラグランジアン $L(q, v)$ に対して、一般化エネルギー関数を

$$E(q, v, p) = \langle p, v \rangle - L(q, v)$$

と定義する。 E から誘導される一般化力は

$$\mathbf{d}E = \begin{pmatrix} \frac{\partial E}{\partial q} \\ \frac{\partial E}{\partial v} \\ \frac{\partial E}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial L}{\partial q} \\ p - \frac{\partial L}{\partial v} \\ v \end{pmatrix}$$

と書ける。ここで、速度相空間から運動量相空間への**ルジャンドル変換** $(q, v) \mapsto (q, p = \partial L / \partial v)$ は

$$\frac{\partial E}{\partial v} = p - \frac{\partial L}{\partial v} = 0$$

として表され、これを満たすように一般化力 $\mathbf{d}E$ を制限すると

$$\mathbf{d}E|_{p=\partial L/\partial v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E}{\partial q} \\ \frac{\partial E}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial L}{\partial q} \\ v \end{pmatrix}$$

を得る。さらに、相空間上のシンプレクティック行列 Ω 、接続行列 $\tilde{N}$ 及びラグランジュの未定乗数 λ を用いて、 $\mathbf{d}E|_{p=\partial L/\partial v}$ と $\dot{\bar{Z}}$ の間に**ディラック構造**が存在するとき、すなわち、

$$\mathbf{d}E|_{p=\partial L/\partial v} = \Omega \dot{\bar{Z}} + \tilde{N}^T \lambda$$

が成立するとき、これを**陰的なラグランジュ系**、また

は、**ラグランジュ・ディラック力学系**という。以上より、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\partial L}{\partial q} \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ N^T(q) \lambda \end{pmatrix}, \\ p &= \frac{\partial L}{\partial v}, \\ 0 &= N(q) v \end{aligned} \quad (3.5)$$

と表すことができる。

式(3.5)で表された陰的なラグランジュ形式による定式化は、非ホロノミック拘束だけでなく、慣性項がルジャンドル変換として速度に関する線形の代数式で与えられるため、ラグランジアンが退化した場合のディラックの意味での拘束を扱うことが可能である。柔軟マルチボディシステムの定式化を行う際、浮動基準座標系を用いたとしても、慣性力に伴う複雑な非線形項の計算は不要となる。また、絶対基準座標系による定式化も式(3.5)の陰的なラグランジュ形式の枠組みで容易に定式化が可能であることは言うまでもない。

4. おわりに

本稿では、マルチボディダイナミックスのモデリングと定式化法について概説し、拘束力学系として陰的な力学形式が本質的な役割を果たす事を示した。特に、ディラック構造と陰的なラグランジュ系の詳細については、参考文献(吉村²⁸⁾、Yoshimura and Marsden^{26, 27)}を参考にされたい。

筆を置くにあたり、改めて、力学の奥の深さを感じている。以前、ある数学の大家から「力学とは何となく経験で分かってくるような学問なのではないのか」と言われたことを思い出す。実際、物理学や工学の学生は、数学的に厳密な定義など知らなくとも、何となく力学の考えを身につけて行くように見える。しかし、力学の基礎的な概念について数学的な観点から見直してみると、案外分らないことが随分あることに気がつく。筆者の考えでは、一旦、経験的、直感的な方法で力学を学んだ後に、数学的な見地から力学を合理的に理解することができれば、さらなる飛躍ができるのではないかと思う。最後に、読者がマルチボディダイナミックスはもとより、古典力学の数学的理論と方法について少しでも興味を持ってもらえれば、それは筆者の望外の幸せである。

謝辞

筆者を力学と回路のアナロジーの世界、さらにマルチボディダイナミックスの研究へと導いてくださった

恩師、故川瀬 武彦先生に本稿を捧げます。マルチボディダイナミックスが殆ど注目されていなかった1970年代後半に、力学と回路のアナロジーに基づいて、ボンドグラフ理論をマルチボディシステムに応用しようという着想を持たれた先生の慧眼に改めて深く敬意を表します。また、共同研究者でもあるカリフォルニア工科大学のJ. E. Marsden教授とは様々な議論を通じて古典力学の数学的理論をご教示頂いた。ここに感謝の意を表します。本研究は日本学術振興会・科学研究費基盤研究(C)課題番号 20560229, JST CREST 及び早稲田大学特定課題研究重点助成(課題番号 2010A-606)の支援を受けている。

参 考 文 献

- 1) Hooker, W. W. and G. Margulies : The dynamical attitude equations for n -body satellite, *J. Astronautical Sci.*, **12**, 123/128 (1965)
- 2) Schwertassek, R. and R. E. Roberson : A perspective on computer-oriented multibody dynamical formalisms and their implementations, In: Bianchi G. and W. Schiehlen, editors, *Dynamics of Multibody Systems*, 263/273, Springer-Verlag (1986)
- 3) 吉村浩明: 多体動力学のモデリングに関する研究の現状, 日本機械学会コンピュータ・ダイナミクス研究会資料, 1-15, 平成6年3月31日 (1994)
- 4) 吉村浩明, 川瀬武彦: 柔軟多体力学系の周辺, 日本機械学会論文集, **62**-600, C編, 2969/2975 (1996)
- 5) Shabana, A. A. : Flexible multibody dynamics: review of past and recent developments, *Multibody Syst. Dyn.*, **1**, 189/222 (1997)
- 6) Schiehlen, W. : Research trends in multibody system, *Multibody Syst. Dyn.*, **18**, 3/13 (2007)
- 7) Kane, T. R. : Dynamics of nonholonomic systems, *J. Applied Mechanics*, **28**, 574/578 (1961)
- 8) Roberson, R. E. and J. Wittenburg : A dynamical formalism for an arbitrary number of interconnected rigid bodies, with respect to the problem of satellite attitude control, *Proc. 3rd Congr. Int. Fed. Auto. Control* (London 1966), **1**, Book 3, System Dynamics, Butterworth, London undated, Paper 46D (1966)
- 9) Kawase, T. and H. Yoshimura : Bond graph modelling of multibody dynamics and its symbolic scheme, *Journal of Franklin Institute*, **328**-5/6, 917/940 (1991)
- 10) Yoshimura, H., H. Nakano and T. Kawase : Flexible multibody dynamics and symbolic generation of system equations, *IMACS transaction special volume for Bond Graphs for Engineers*, 187/199, Elsevier (North-Holland) (1992)
- 11) 吉村浩明: 柔軟多体力学に関する研究, 早稲田大学博士論文 (1995)
- 12) Yoshimura, H. and T. Kawase : Multiport models for dynamics of flexible multibody systems, *JSME Int. Journal*, Ser.C, **46**-2, 467/475 (2003)
- 13) Walker, M. W. and D. E. Orin : Efficient dynamic computer simulation of robotic mechanisms, *Transactions of the ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, **104**, 205/211 (1982)
- 14) Bianchi, G. and Schiehlen, W. (Editors) : *Dynamics of Multibody Systems*, IUTAM/IFTOMM Symposium, Udine, Italy, September 16-20, 1985. Springer-Verlag (1986)
- 15) 川瀬武彦: まねる, テクノライフ選書, オーム社 (1995)
- 16) Schiehlen, W. : Dynamics of complex multibody systems, *SM Archive*, **9**, 159/195 (1984)
- 17) Neimark, J. I. and N. A. Fufaev : *Dynamics of Nonholonomic Systems*, Translations of Mathematical Monographs, AMS, **33**, (1972)
- 18) Kane, T. R. and A. D. Levinson : Formulation of equations of motion for complex spacecraft, *J. Guidance and Control*, **3**, 99/112 (1980)
- 19) Bloch, A. M. : *Nonholonomic Mechanics and Control*, volume 24 of Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer-Verlag, New York. With the collaboration of J. Baillieul, P. Crouch and J. Marsden, and with scientific input from P. S. Krishnaprasad, R. M. Murray and D. Zenkov (2003)
- 20) Yoshimura, H. and T. Kawase : A duality principle in nonholonomic mechanical systems, *Nonsmooth/Nonconvex Mechanics: Modeling, Analysis and Numerical Methods*, Eds. D. Y. Gao, R. W. Ogden and G. E. Stavroulakis, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 447/471 (2001)
- 21) Shabana, A. A. and R. Schwertassek : Equivalence of the floating frame of reference approach and finite element formulations, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, **33**-3, 417/432 (1998)
- 22) Yoshimura, H. : A geometric approach to constraint stabilization for holonomic Lagrangian systems, *Proceedings of ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference* (Las Vegas, USA, September 4-7), DETC2007-35429, 1/8 (2007)
- 23) Baumgarte, J. W. : A new method of stabilization for holonomic constraints, *Trans. ASME J. Appl. Mech.*, **50**, 869/870 (1983)
- 24) Gear, C. W., B. Leimkuhler and G. K. Gupta : Automatic integration of Euler-Lagrange equations with constraints, *J. Comput. Appl. Math.*, **12**, 77/90 (1985)
- 25) Marsden, J. E. and T. S. Ratiu : *Introduction to Mechanics and Symmetry*, volume 17 of Texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag, second edition (1999)
- 26) Yoshimura, H. and J. E. Marsden : Dirac structures in Lagrangian mechanics Part I: Implicit Lagrangian systems, *J. Geom. and Phys.*, **57**, 133/156 (2006)
- 27) Yoshimura, H. and J. E. Marsden : Dirac structures in Lagrangian mechanics Part II: Variational structures, *J. Geom. and Phys.*, **57**, 209/250 (2006)
- 28) 吉村浩明: 古典力学とディラック構造—力学系の基本構造の理解へ向けて, システム／制御／情報, **49**-5, 173/180 (2005)