



有限温度・有限密度における格子 QCD シミュレーション

梅田 貴士*

Lattice Simulations in Finite Temperature and Density QCD

Umeda Takashi*

Key words: Lattice QCD, Quark gluon plasma, QCD phase transition

1. 導入

このレビューでは有限温度・密度格子 QCD シミュレーションに関する物理的意義、計算方法や問題点、そして、これまでの成果や最新の取り組みについて解説する。

まず最初に、この世には4つの力(強い力、弱い力、電磁力、重力)があり、強い力、弱い力は核力とも呼ばれている。強い力は文字通り力(結合定数)が大きく、原子核を構成する陽子、中性子の質量など、ミクロな世界の定性的な性質は強い力によって決まることが多い。この強い力を記述する理論が量子色力学(QCD)と呼ばれ、現在の素粒子物理学における標準模型の1つとなっている。

この QCD の基本的な自由度はクォークとグルーオンだが、我々のいる世界ではクォークとグルーオンはハドロンと呼ばれる粒子(陽子や中性子など)の構成要素として、そのハドロンの中に閉じ込められている。しかし超高温高密度では、例えば原子に閉じ込められている電子が飛び出してイオン化するプラズマ状態となるように、クォークとグルーオンが飛び出すクォーク・グルーオン・プラズマ(QGP)状態が現れると考えられている。

この QGP はビッグバン直後の宇宙が超高温高密度だった時に実現されていたはずで、その後、QGP が存在する QGP 相から QCD (の強い力の) 相転移を経て、いわゆるハドロン相になったと考えられている。ハド

ロン相は我々の知っている原子核の構成要素である陽子や中性子が存在する相である。従って、我々の住んでいるこの宇宙が経験した最後の相転移は QCD 相転移である。

その為、QCD 相転移の性質が「現在の宇宙がなぜこのようになっているか？」を解き明かす重要な鍵を握っている。相転移の次数の違い、特に過冷却などを伴う一次相転移とそれ以外の次数の相転移では、元素合成のメカニズムなど、宇宙の進化のストーリーを大きく制限する。さらに低温高密度ではカラー超伝導相と呼ばれる新奇な物質の状態が現れると考えられており、カラー超伝導相とハドロン相との相転移の性質は、中性子星の内部構造や、超新星爆発のメカニズムの理解にも重要である。

現在では、この QGP 状態は地球上で人間の手によって作り出すことも可能になってきている。これは重イオン衝突実験という、いわゆる巨大な加速器を用いた実験で、重イオン(金や鉛などの重い原子の、正電荷を持つ原子核)を強力な電磁石による磁場でほとんど光の速さまで加速して正面衝突させる実験である。この重イオン衝突実験はアメリカのニューヨーク州にあるブルックヘブン国立研究所の重イオン衝突型加速器 RHIC(Relativistic Heavy Ion Collider) やスイスのジュネーブにある大型ハドロン衝突型加速器 LHC(Large Hadron Collider)で行われており、ほぼ QGP 状態を作り出せるほどの高温状態を実現できるようになっている。これらの重イオン衝突実験を用いた QGP 状態生成の検証やその物性的諸性質を調べる為にも QCD 相図(図 1)の情報が重要な鍵となる。

このように、QCD の有限温度・密度に関する性質

* 広島大学大学院教育学研究科
Graduate School of Education, Hiroshima University

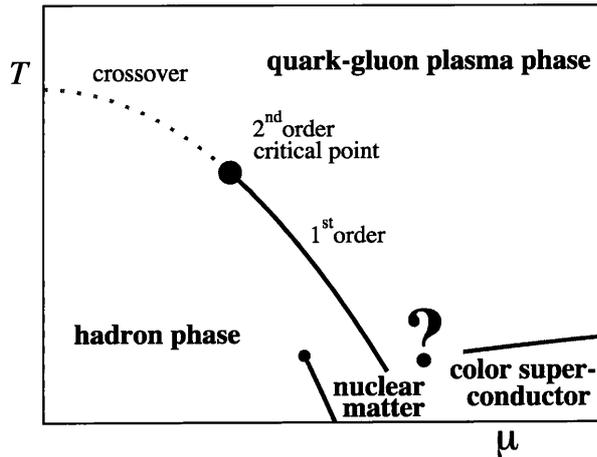


図1 現在考えられている QCD 相図の概略図¹⁾。水の3態が温度と圧力グラフの相図で表されるのと同様に QCD の状態も相図で描かれる。横軸の μ が(バリオン数)密度で、縦軸の T が温度を表す。低温低密度ではハドロン相で、高温高密度では QGP 相となっている。また、本原稿では扱わないが、低温高密度領域にカラー超伝導相が存在すると考えられている。ハドロン→QGP 相転移は低密度領域では厳密な相転移ではないクロスオーバーで、密度が上がるにつれて二次相転移を経て一次相転移になると考えられている。高密度領域の核物質の辺りは、未だにあまりはっきりしたことが分かっていない。

は物理の様々な分野で重要だと考えられているが、“強い力”の力(結合定数)の大きさのために摂動論などの解析的な計算手法が使えず、格子 QCD²⁾による数値シミュレーションによる研究が必要になってくる。この格子 QCD によるこれらの有限温度・密度 QCD の性質、例えば、QCD 相転移の温度、相転移の次数、それらのクォーク質量、温度、密度依存性(相図の構造)そして状態方程式(QGP の圧力、エネルギー密度など)の研究が第一の目的となる。次章ではまず格子 QCD の概要について、さらに有限温度 QCD の計算方法と問題点、最近の取り組みを3章で紹介し、有限密度 QCD に関する現状と最近の取り組みを4章で紹介する。

2. 格子 QCD の概要

格子 QCD では4次元時空(時間+3次元空間)を離散化(格子化)することによって場の理論が計算機で扱えるようになり、その格子間隔がゼロとなる連続極限によって QCD を計算する方法である。その利点は、QCD を第一原理から直接計算することが可能になる点であり、非摂動的な相互作用が支配的な相転移近傍の現象の研究では特にその威力を発揮する。もう少し具体的に説明すると、QCD で計算される物理量 O の期待値はファインマンの経路積分量子化を用いた場

合

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}U O[U] e^{-S[U]} \quad (1)$$

のように表す事ができる。ここで Z は QCD の分配関数で $S[U]$ は場の配位 U における QCD 作用を表す。この積分を格子 QCD ではモンテカルロ法によって実行する。4次元時空の場の配位を $\exp(-S)$ に比例した確率で多数生成して、それらの配位上で計算した物理量の平均として上記の期待値が計算される。

$$\langle O \rangle = \frac{1}{N} \sum_i^N O_i \quad (2)$$

ここで、 O_i は i 番目の配位上で計算された物理量を表す。

この重み付きの確率での配位生成にはハイブリッドモンテカルロ法³⁾と呼ばれる方法が用いられることが多い。この計算では一度のシミュレーションでディラック演算子と呼ばれる巨大な行列¹⁾の逆行列を時には数万回以上も繰り返し解いていく必要がある。この巨大な逆行列は、通常は反復法によって計算される。クォーク質量を軽くすると行列の条件数が増えて、逆行列計算の収束に要する反復回数が増えてしまう。時空間の刻み幅(格子間隔)を小さくすると行列が大きくなり、クォーク質量を現実の値に近づけると逆行列の収束に要する反復回数が増え、モンテカルロ法による統計誤差を小さくする為には配位生成回数を増やす必要がある。全ての条件が理想的な計算を行うには現在の計算機パワーを持ってしても膨大な年数がかかってしまう。そのため、計算コストを削減するギリギリの条件を探り、計算アルゴリズムを改良し、新しい計算機を用いる為のプログラムを開発しつつ、今までにない新しいアイデアを考えるという事が行われ続けている。その為、格子 QCD 研究の計算機パワーに対する要望は無尽蔵で、当面はどれだけ計算機の性能が向上してももうこれで十分という事はなさそうである。このあたりの努力の詳細は本小特集の他のレビューを参照して欲しい。

3. 有限温度格子 QCD

3.1 有限温度格子 QCD の概要

次に有限温度の効果を格子 QCD に取り入れる方法について解説する。4次元時空をユークリッド空間としてあつかう格子 QCD は虚時間定式化による有限温

¹⁾ 行と列の大きさが時空体積 $\times 12$ で与えられ、一般的な 32^4 程度の時空体積では行と列の大きさが数千万の巨大な複素疎行列になる。

度場の理論との相性が良い。QCD のハミルトニアンを H とすると温度 T での分配関数は

$$Z = \text{Tr}(e^{-\frac{H}{T}}) \quad (3)$$

と書くことが出来る。適当な境界条件(ゲージ場が周期境界条件, クォーク場は反周期境界条件)を課して(虚)時間方向の大きさを $1/T$ にすれば有限温度系のシミュレーションが可能になる。その為、古くから格子 QCD による有限温度の研究は盛んに行われてきた。

しかし計算手法については確立されているものの、取り扱う対象が臨界現象である為に、原理的には空間体積無限大の熱力学極限を調べる必要がある。具体的には複数の十分大きな体積でのシミュレーションから、その体積依存性を調べるなど、格子 QCD の分野の中でもトップクラスの計算コストがかかってしまう。また、QGP の状態方程式の計算は広い温度領域での多数のシミュレーションが必要になり、やはり膨大な計算コストがかかる(これは後でもう一度議論する)。そのため、いわゆるゼロ温度 QCD の物理に比べて、有限温度 QCD の研究は、計算の精度や質が十分でない場合が多い。具体的には、現在でも計算コストでは有利だが理論的に問題を抱えた格子定式化(スタaggerドクォーク)による結果が主流になっている。

さて、ここで格子上での作用の定式化について補足しておく。前章で述べたように、格子 QCD の計算ではモンテカルロ法における配位生成確率を計算する為に QCD 作用の値を計算する必要がある。QCD 作用をグルーオン部分とクォーク部分に分けた場合、後者に悩ましい問題がある。QCD 作用にはクォーク場の微分に相当する部分が存在する。格子上では、この微分を差分として定義するのだが、単純に差分で置き換えると、格子間隔が有限である影響によって余分な(4次元時空だと全部で $2^4 - 1$ 個の)クォークの寄与が発生するというダブリング問題が存在する。このことに関しては、ニールセン-二宮の No-go 定理⁴⁾により「フェルミオンのカイラル対称性²を損なうこと無くダブリング問題を解決する方法は無い」ことが証明されている。したがってこの問題を回避するには何かしら

の犠牲をはらわなくてはならず、その方法によって幾つかのフェルミオン作用の定式化が存在する。

大規模な有限温度計算では先に述べたスタaggerドクォークと呼ばれる作用が用いられている。このスタaggerドクォークは余分な寄与を上手く別のクォークと見なして、計算コストを抑えつつ、格子上のクォークを定式化する⁶⁾。一方で、フレーバー数(クォークの種類の数)が4の倍数³の場合のみ正しい連続極限が取れることが保証されている。実際の世界は、ほぼ同質量の軽いアップ、ダウンクォークと、少し重いストレンジクォークからなっているのでこの条件は満たさない。ちなみに、相転移が起きるエネルギースケールは数百 MeV なので、そのエネルギースケールよりも十分重いチャーム、トップ、ボトムクォークの真空偏極の効果は無視できる。したがって、いわゆる $2+1$ フレーバーの QCD が現実世界を記述する事になる。

他には、任意のフレーバー数で連続極限が保証されているものの、計算コストがかかる上にカイラル対称性を陽に破って⁴定式化するウィルソンクォーク²⁾や、さらに膨大な計算コストがかかるものの、厳密な格子上のカイラル対称性を保持する⁵オーバーラップクォークなどが存在する⁷⁾。

有限温度格子 QCD 以外の分野でも大規模な計算では計算コストが少ないスタaggerドクォークが良く使われてきたが、近年の計算機や計算アルゴリズムの発展のおかげで、フレーバー数に関する制限の無い、正しい連続極限が保証されている格子定式化による格子 QCD の研究が近年特に注目されている。特に、アルゴリズムの発展によりスタaggerドクォーク以外を用いても現実のクォーク質量での計算が行えるようになってきている⁶⁾。これらの背景のもと、著者の所属する WHOT-QCD グループでは理論的な問題点が少ないウィルソンクォークによる有限温度 QCD の定量的な研究を目標の1つとして研究を行っている。

3.2 状態方程式の計算

ここでは WHOT-QCD グループで行っている QCD の状態方程式(特に圧力 p とエネルギー密度 ϵ)の結果について紹介する。通常の熱力学では十分体積が大きな場合、圧力 p は QCD の分配関数 Z を用いて次のよ

² 本来の連続理論における QCD の作用にはカイラル対称性という QCD 相転移で重要な役割を果たす対称性が存在する。QGP 相では真空自体にカイラル対称性が現れているが、ハドロン相では真空状態の複雑な機構によりカイラル対称性が自発的に破れている³⁾。この研究で2010年に南部はノーベル賞を受賞した。

³ 4次元時空の場合。

⁴ この破れは連続極限で回復する。

⁵ 連続極限でのカイラル対称性とは異なる点で NoGo 定理に違反しない。

⁶ 本小特集の浮田氏のレビュー「物理点における格子 QCD 計算の挑戦」を参照。

うに表される.

$$p = \left\langle \frac{T}{V} \ln Z \right\rangle_{sub} \quad (4)$$

ここで T, V はそれぞれ系の温度と体積を表す. $\langle \dots \rangle_{sub}$ は繰り込みの為に, ゼロ温度での寄与を差し引いた期待値を表す. しかし分配関数 Z を格子上で直接取り扱うことは困難なために, 一度微分しておいて後で定積分を行なう積分法⁸⁾ という手法が提唱された. この積分法で圧力を表すと

$$\begin{aligned} p &= \frac{T}{V} \int_{b_0}^{\vec{b}} d\vec{b} \cdot \left\langle \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \vec{b}} \right\rangle_{sub} \\ &= -\frac{T}{V} \int_{b_0}^{\vec{b}} d\vec{b} \cdot \left\langle \frac{\partial Z}{\partial \vec{b}} \right\rangle_{sub} \end{aligned} \quad (5)$$

となる. ここで S は格子 QCD の作用を表し, \vec{b} は作用のインプットパラメータ (結合定数とアップ, ダウン, ストレンジクォークの質量など) を表す. $\ln Z$ の微分を行うと, 丁度作用微分の期待値として表すことが出来るため, 格子 QCD 計算に適している. エネルギー密度は別の熱力学関係式より求まる (6) 式と圧力の結果から求めることができる.

$$\begin{aligned} \epsilon - 3p &= -\frac{T}{V} \left\langle a \frac{d \ln Z}{da} \right\rangle_{sub} \\ &= -\frac{T}{V} a \frac{d\vec{b}}{da} \cdot \left\langle \frac{\partial \ln Z}{\partial \vec{b}} \right\rangle_{sub} \\ &= -\frac{T}{V} a \frac{d\vec{b}}{da} \cdot \left\langle \frac{\partial S}{\partial \vec{b}} \right\rangle_{sub}, \end{aligned} \quad (6)$$

ここで a は格子間隔を表す. 式中に現れる係数 $a d\vec{b}/da$ はベータ関数と呼ばれるもので, この値も別途格子 QCD で計算する必要がある. 積分法の (5) 式を見ると分かるように圧力がゼロと見なせる温度の b_0 から知りたい温度領域の \vec{b} まで区分求積で積分するために多数の温度点 (パラメータ点) でのシミュレーションが必要になる. 有限温度場の理論では, 温度は虚時間方向の周期長の逆数で定義され, 有限温度格子 QCD では通常, 虚時間方向の格子点の数 (N_t) を固定して, インプットパラメータ \vec{b} を調整することによって格子間隔 (a) を変えて温度 ($T = 1/N_t a$) をコントロールする. この為, 全ての温度点でのシミュレーションは異なるインプットパラメータで行われ, しかも先に述べた繰り込みの必要性の為に, 計算コストのかかるゼロ温度での計算が全ての温度でのパラメータで必要となり, そのため膨大な計算時間がかかってしまう.

したがって, 計算機の性能が向上しても, ウィルソンクォークによる状態方程式の計算は容易ではない.

そこで我々は計算コストを大きく削減可能な固定格子間隔アプローチを提唱した⁹⁾. この固定格子間隔アプローチでは従来の方法とは逆にインプットパラメータ \vec{b} を固定して (結果として格子間隔 a を固定して) N_t を変えて温度をコントロールする. このアプローチでは各温度で格子間隔 a が共通な為, 繰り込みに必要なゼロ温度計算を 1 回で済ませることが出来る. 一方で, 当然ながら N_t は整数しか取れないために温度の分解能が制限されてしまう. さらに, これまでに確立している状態方程式の非摂動的計算法 (積分法) は固定格子間隔アプローチでは適用出来ない. しかしながら, 温度積分法¹²⁾ を用いる事により固定格子間隔アプローチでも状態方程式の非摂動的計算が可能になった. この方法はゼロ化学ポテンシャルで有効な熱力学関係式を利用して (6) 式を用いた圧力の計算が可能になる.

$$T \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{p}{T^4} \right) = \frac{\epsilon - 3p}{T^4} \implies \frac{p}{T^4} = \int_{T_0}^T dT \frac{\epsilon - 3p}{T^5} \quad (7)$$

クエンチ近似によるテストで, この方法が従来の結果をほぼ再現することが確認されている⁹⁾. この様に, 固定格子間隔アプローチは従来の方法とは特性が大きく異なり, 計算可能な物理量も変わってくる. 従ってどのような物理量であればこのアプローチで計算が可能かを探るのも我々の研究の目的の一つである. このアプローチを用いた計算としては世界で初めての 2+1

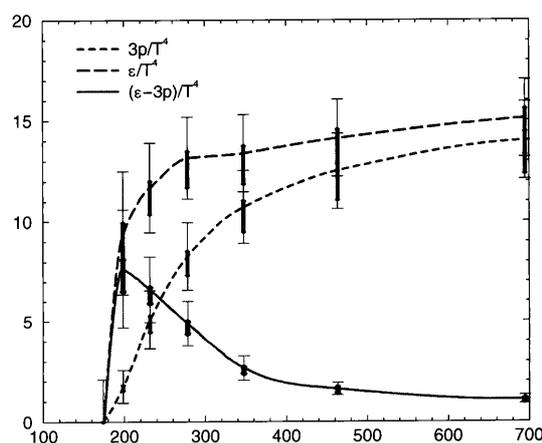


図2 固定格子間隔アプローチを用いて計算したウィルソンクォークでの QCD の状態方程式¹⁾. p が圧力, ϵ がエネルギー密度を表す. それぞれ温度の 4 乗で割って無次元化してある. (圧力はさらに 3 をかけてある). $\epsilon - 3p$ はトレスアノマリーと呼ばれる量でこれを元に状態方程式が計算できる. 横軸が温度でメガ (10^6) 電子ボルト (MeV) の単位で表されている (1 電子ボルトで 1 万度の温度に相当). 約 180 MeV の辺りでエネルギー密度の急激な立ち上がり (と少し遅れて圧力の立ち上がり) が確認できる. 各シミュレーションを行った温度の場所で統計誤差と系統誤差 (太線) が記されている. 系統誤差はベータ関数計算の不定性を表す.

フレーバー QCD における状態方程式の結果を図 2 に載せた。この計算ではまだクォーク質量が現実の値より重い場合のテスト計算であるが、現在、現実クォーク質量での計算の準備を行っている。

4. 有限密度格子 QCD

4.1 有限密度格子 QCD の概要

有限温度格子 QCD が定量的な研究のステージに入った一方、有限密度効果を格子 QCD で取り扱うには当初より符号問題と呼ばれる深刻な問題が存在する。有限密度の効果として化学ポテンシャル μ を取り入れると分配関数は粒子数演算子 N を用いて

$$Z = \text{Tr} \left(e^{-\frac{H - \mu N}{T}} \right) \quad (8)$$

と与えられる。この化学ポテンシャルの寄与を経路積分に取り入れるると作用に虚数成分が現れる。格子 QCD の計算では作用の値 S に依存した確率 $\exp(-S)$ で配位を生成するモンテカルロ法を採用している為に、作用に虚数の成分があると確率と見なせなくなり、そのままでは計算を実行することができない。そこで虚数の作用を位相部分と絶対値部分を分離して絶対値部分だけを確率として扱い、位相部分は物理量の一部として計算すれば良い事になる。しかし、この分離した位相部分がモンテカルロ積分を行う際に激しく振動してしまい、物理量の期待値がほとんどゼロになってしまう、という現象が符号問題と呼ばれている。統計精度を上げれば原理的には計算できるはずなのだが、実際問題として統計誤差をコントロールできない。

符号問題は現在に至るも根本的な解決方法が存在せず、格子 QCD の世界でも最も注目されている難問の 1 つである。ただし、今世紀に入ってから、比較的低密度の領域に限れば画期的なブレイクスルーがあり^{10,11,12)}、有限密度の効果を格子 QCD シミュレーションで計算できるようになってきた。特に、近年のエネルギーの高い重イオン衝突実験で生成される QGP 状態は比較的低密度である為、これらの手法を用いた格子 QCD の計算結果が重要な役割を果たしている。

ここで提案された方法の一つは複数パラメータの再重み付け法¹⁰⁾と呼ばれ、モンテカルロ法が可能な(作用が実数となる)化学ポテンシャルゼロのパラメータで配位を生成しておいて、 $\exp(-S)$ の重みの化学ポテンシャルによる寄与の部分は物理量とみなして計算する。これは上記の位相部分を分離する方法と同じやり方なのだが、同時に化学ポテンシャル以外の入力パラメータも再重み付けで調整する点が新しかった。

た。例えば分配関数は以下の様に与えられる事になる。

$$\begin{aligned} \frac{Z(\vec{b}, \mu)}{Z(\vec{b}_0, 0)} &= \frac{1}{Z(\vec{b}_0, 0)} \int \mathcal{D}U e^{-S(\vec{b}, \mu) + S(\vec{b}_0, 0)} e^{-S(\vec{b}, 0)} \\ &= \langle e^{-S(\vec{b}, \mu) + S(\vec{b}_0, 0)} \rangle \end{aligned} \quad (9)$$

ここで入力パラメータを明示するために作用と分配関数の引数として入力パラメータを記してある。化学ポテンシャルのみの再重み付けの手法では、化学ポテンシャルのみが異なるパラメータでの重みにより生成した配位で計算する為に、本来のパラメータではあまり重要でない配位の重みばかりが大きくなるというオーバーラップ問題が生じる可能性がある。複数パラメータの再重み付け法の場合は本来重要な配位の重みが大きくなるように(オーバーラップを大きくするように)化学ポテンシャル以外のパラメータを調整することが可能となる。さらに複数の(パラメータの異なる)シミュレーションを再重み付けにより合成して計算することによって、さらにオーバーラップを大きくすることも可能であり、有限密度 QCD への様々なチャレンジの中で重要な手法の 1 つとなっている。

4.2 ヒストグラム法

ここでは WHOT-QCD グループにおける有限密度 QCD への取り組みを一部紹介する。WHOT-QCD グループではヒストグラム法に複数パラメータの再重み付け法などを組み合わせた方法を用いて有限密度 QCD シミュレーションに挑戦している¹⁾。

先に述べたように、格子 QCD シミュレーションをモンテカルロ法で実行する場合は $\exp(-S)$ の重みで配位を生成して、その配位の上で計算した物理量の平均値として期待値を計算する。この時、ある適当な物理量(例えば P とする)に注目して、生成した配位で計算した P の値の確率分布(ヒストグラム)を作る。一次相転移には相転移点で 2 相共存という同時に 2 つの異なる相の状態が等確率で現れる現象が存在する。その為、シミュレーションを行った温度が一次相転移だった場合で、さらに物理量 P が相転移に敏感な量であった場合、上記のヒストグラムに 2 つのピークが現れる。この特性を利用することによって一次相転移が起こるかどうか判定できる。ある物理量 P に注目した場合、分配関数を次の様に書き直すことができる。

$$Z = \int \mathcal{D}U e^{-S} = \int dP w(P) \quad (10)$$

$$w(P_0) = \int \mathcal{D}U \delta(P[U] - P_0) e^{-S} \quad (11)$$

この $w(P)$ が確率密度関数で、対数をとって有効ポテンシャルが定義できる。

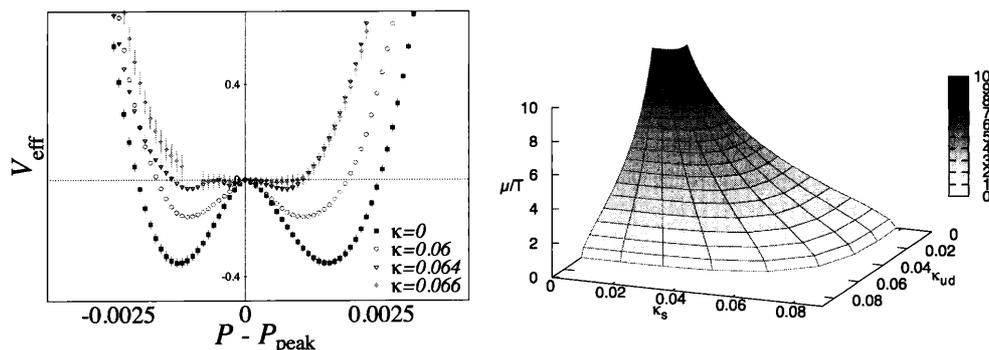


図3 左図は化学ポテンシャルゼロにおける有効ポテンシャルのクォーク質量依存性を表している¹⁾。 κ がクォーク質量に関するパラメータで、 $\kappa=0$ が質量無限大を表し、 $\kappa \neq 0$ で有限の質量となり、 κ が大きくなるに連れて質量が小さくなる。横軸の P はプラケットと呼ばれる物理量を表す。クォーク質量無限大では有効ポテンシャルに極小値が2つ存在する事から、一次相転移が確認できる。そしてクォーク質量を軽くしていくと極小値が1つとなるクロスオーバーへと移行する様子が見取れる。右図は一次相転移とクロスオーバーの境界である二次相転移の場所の場所を示している¹⁾。 κ_{ud} と κ_s はそれぞれアップ、ダウンクォーク(同質量を仮定)とストレンジクォークの質量パラメータで、 μ/T が化学ポテンシャル(と温度の比)を表す。 $\mu/T=0$ の平面は左図の結果を元に作図してある。 κ 平面の奥側がクォーク質量が重い領域なので、図中曲面の奥側が一次相転移の領域を意味する。化学ポテンシャルの効果が入ると、 κ 平面において一次相転移の領域が減少の様子が確認できる。図中の数値は全て無次元量である。

$$V_{eff}(P) = -\ln w(P) \quad (12)$$

物理量 P だけでなく、複数の物理量で定義した有効ポテンシャルも定義可能である。この方法に上記の複数パラメータでの再重み付け法を組み合わせると有限温度・有限密度 QCD の相構造の研究を行っている。

まず、この方法の有効性をテストする為に、比較的計算が簡単なクォーク質量が重い場合のシミュレーションを行った¹³⁾。クォークが重い極限として、動的クォークを含まないクエンチ近似における配位生成を行い、複数パラメータの再重み付け法により、(重いが)有限のクォーク質量を持ち、さらに有限の化学ポテンシャルの効果を取り入れた計算を行った。格子 QCD シミュレーション¹⁴⁾や QCD の有効理論などの研究¹⁵⁾から、クエンチ近似(クォーク質量が無限大)では一次相転移で、クォーク質量が有限で軽くなると二次相転移を経てクロスオーバーになる事が知られている。実際、テスト計算では図3に示すように、クォーク質量を減少させると一次相転移からクロスオーバーになることを確認し、さらに化学ポテンシャルの効果が入ると一次相転移の領域が減少の様子が確認できた。現在はこれらの手法をクォーク質量が軽い領域に応用する研究を進めている。

5. まとめ、将来への展望

このレビューでは有限温度・有限密度格子 QCD の意義と現状、そして最新の取り組みを日本の WHOT-QCD グループでの取り組みを中心に紹介した。有限温度格子 QCD は既に定量的な研究のステージに入り、

理論的な問題の無い作用を用いた現実クォーク質量でのシミュレーション、そして複数の格子間隔でのシミュレーションから連続極限を取るという最終段階へ向かっている。さらにカイラル対称性を保持した作用による研究も始まっている。一方で有限密度格子 QCD では低密度領域においては様々な手法が提唱されて来ているものの、高密度領域に関しては最有力な手法は特に無い状況である。日本では京コンピュータを初めとするこれまでにない程の高性能なコンピュータを利用できる環境が整いつつある為に、これまでより格段に質の高い計算や、これまでには試すことができなかった(計算コストが必要な)アイデアを実行できる可能性があり、さらなる有限温度・有限密度格子 QCD 分野での発展が期待できる。

なお、ここで紹介した研究の詳細は WHOT-QCD のレビュー論文¹⁾に書かれているのでさらに深く内容を理解したい読者は参考にしてほしい。現在の WHOT-QCD グループのメンバーである金谷氏、青木氏、初田氏、江尻氏、中川氏、吉田氏、斎藤氏に感謝する。また本原稿を執筆する機会を与えていただいたシミュレーション学会と本小特集の編集者である青木氏に感謝する。

参考文献

- 1) S. Ejiri, K. Kanaya, T. Umeda for WHOT-QCD Collaboration: Ab initio Study of QCD Ther-modynamics on the Lattice at Zero and Finite Densities, Prog. Theor. Exp. Phys., 01A104, 1/35(2012).

- 2) K. G. Wilson: Conneement of Quarks, *Phys. Rev. D* **10**, 2445/2459(1974).
- 3) S. Duane, A. D. Kennedy, B. J. Pendleton and D. Roweth: Hybrid Monte Carlo, *Phys. Lett. B* **195**, 216/222 (1987).
- 4) H. B. Nielsen and M. Ninomiya: No Go Theorem for Regularizing Chiral Fermions, *Phys. Lett. B* **105**, 219/234 (1981).
- 5) Y. Nambu and G. Jona-Lasinio: Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. I, *Phys. Rev.* **122-1** 345/358 (1961).
- 6) J.B.Kogut and L.Susskind: Hamiltonian Formulation of Wilson's Lattice Gauge Theories, *Phys. Rev.* **D11** 395/439 (1985).
- 7) R. Narayanan and H. Neuberger: A Construction of lattice chiral gauge theories, *Nucl. Phys. B* **443**, 305/385 (1995).
- 8) J. Engels, J. Fingberg, F. Karsch, D. Miller and M. Weber: Nonperturbative thermodynamics of $SU(N)$ gauge theories, *Phys. Lett. B* **252**, 625/630 (1990).
- 9) T. Umeda, S. Ejiri, S. Aoki, T. Hatsuda, K. Kanaya, Y. Maezawa and H. Ohno: Fixed Scale Approach to Equation of State in Lattice QCD, *Phys. Rev. D* **79**, 051501, 1/5 (2009).
- 10) Z. Fodor and S. D. Katz: Lattice determination of the critical point of QCD at nite T and mu, *JHEP* **0203**, 014, 1/6 (2002).
- 11) S. Choe, P. .de Forcrand, M. Garcia Perez, S. Hioki, Y. Liu, H. Matsufuru, O. Miyamura and A. Nakamura *et al.*: Responses of hadrons to the chemical potential at nite temperature, *Phys. Rev. D* **65**, 054501, 1/10 (2002). C. R. Allton, S. Ejiri, S. J. Hands, O. Kaczmarek, F. Karsch, E. Laermann, C. Schmidt and L. Scorzato: The QCD thermal phase transition in the presence of a small chemical potential, *Phys. Rev. D* **66**, 074507, 1/26(2002)
- 12) P. de Forcrand and O. Philipsen: The QCD phase diagram for small densities from imaginary chemical potential, *Nucl. Phys. B* **642**, 290/306 (2002)
- 13) H. Saito *et al.* [WHOT-QCD Collaboration], *Phys. Rev. D* **84**, 054502, 1/12(2011). [Erratum-ibid. *D* **85**, 079902 (2012)]
- 14) M. Fukugita, M. Okawa and A. Ukawa: Finite Size Scaling Study Of The Deconning Phase Transition In Pure $Su(3)$ Lattice Gauge Theory, *Nucl. Phys. B* **337**, 181/232 (1990).
- 15) R. D. Pisarski and F. Wilczek: Remarks on the Chiral Phase Transition in Chromodynamics, *Phys. Rev. D* **29**, 338/341 (1984).
- 16) Y. Aoki, G. Endrodi, Z. Fodor, S. D. Katz and K. K. Szabo: The Order of the quantum chromodynamics transition predicted by the standard model of particle physics, *Nature* **443**, 675 (2006) [hep-lat/0611014].