モンテカルロシミュレーションを用いた超弦理論の研究

花田　政範 *

Monte Carlo Study of the Superstring Theory

Masanori Hanada*

Key words: Superstring theory, Gauge/gravity correspondence, D-brane, Black hole

1.　はじめに

量子論的に無矛盾な重力理論を作りたいというのは，物理学者の長年の夢の一つです．超弦理論は，そのような理論の有力な候補として長年にわたって研究されてきました．それほど有望な理論であるにも関わらず，超弦理論を厳密に定義するにはどうしたら良いかは長い間の謎でした．（どういう意味で定義できる/できないと言っているのかは後ほど説明します．）しかし，1990年代半ばから2000年頃にかけて，ある種の量子場の理論（ゲージ理論）が超弦理論の厳密な定義を与えるらしいということが分かってきました．そのような場の理論は，強い相互作用を記述する理論である量子色力学（Quantum Chromodynamics; QCD）に類似しており，QCDを調べるために開発された数値シミュレーション法を適用して超弦理論の非自明な性質が明らかにできます．本論説では，超弦理論と場の理論の関係を簡単に説明したあと，シミュレーションの現状と将来の展望を概観したいと思います．

2.　超弦理論とは

ゲージ/重力対応の説明ための準備として，摂動論的な超弦理論を簡単におさらいしましょう．超弦理論では，点粒子を空間一次元の広がりを持った弦に格上げします．（「超」は，超対称性と呼ばれる，ボース粒子とフェルミ粒子を入れ替える対称性を意味します．）弦には，開いたもの（開弦）と閉じたもの（閉弦）の二種類があります（**図1**）．弦の振動モードはそれぞれが粒子に対応すると思えて，振動が激しいほど重い粒子になります（**図2**）．我々が知っている粒子は軽い粒子（振動していない弦）に対応しています．閉弦は重力を媒介する重力子，開弦はゲージ場を自然に含みます．

図3には二本の弦が散乱する様子が描かれています．左から二つの弦が飛んできて，時間とともに右に動いていくと思って下さい．弦の軌跡が描く二次元の曲面を「世界面」と呼びます．超弦理論では，弦の散乱振幅の計算ルールが与えられていて，始状態と終状態を与えれば，そのような散乱がどの程度の確率で起

図1　閉弦（左）と開弦（右）．

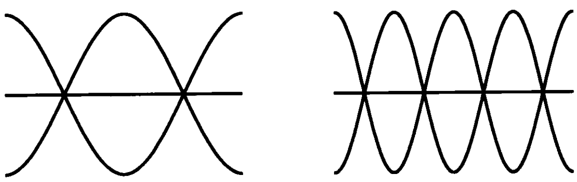

図2　開弦の振動モード．右側の激しい振動の方がより重い粒子に相当．

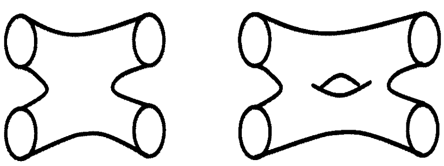

図3　閉弦の散乱

* 高エネルギー加速器研究機構 KEK 理論センター
KEK Theory Center, High Energy Acceleration Research Organization

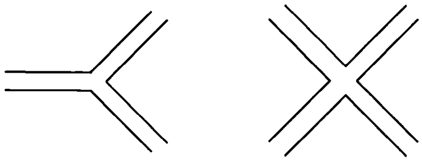

図 4　ゲージ粒子の三点相互作用と四点相互作用.

こるかが計算できます．ただ，始状態と終状態は同じでも，途中の状態は一意的には決まりません．図 3 の右側のように，入ってきた弦が一旦中間状態の二本の弦になり，それがもう一度相互作用して終状態に移る場合もあります．この時，世界面には浮き輪のような穴が一つあきます．中間状態でもっと複雑な相互作用が起きると，もっと沢山の穴がある世界面が現れます．穴が一つ増える度に相互作用の回数が一回増えるので，相互作用が小さければ，穴の数が少ない世界面から順番に計算していけば良いことが分かります．このように，穴の数が多い世界面を順番に小さな摂動として取込んでゆくことが出来るという意味で，超弦理論には摂動論的な定義が与えられています．超弦理論では，時空が 10 次元(時間 1 次元 + 空間 9 次元)でなければならないなどの奇妙な性質がありますが，余分な 6 次元を小さく丸めて見えなくするなどして我々の住む 4 次元の世界を記述できるのではないかと期待されています.

3. ゲージ理論と超弦理論の対応

超弦理論を摂動展開に頼らずに定式化しようとすると，ゲージ理論を考えることが重要になります．ゲージ理論というのは，「ゲージ対称性」を持った量子場の理論で，クオークやレプトンのような物質粒子と，相互作用を媒介するゲージ粒子をふくみます．(粒子というよりは場と言った方が正確なのですが，細かいことは気にしないことにします.)素粒子標準模型は $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ という対称性を持ちますが，ここではゲージ対称性として $SU(N)$ を仮定し，N をパラメーターして自由に動かすことにします.

$SU(N)$ ゲージ理論では，ゲージ粒子は $N \times N$ のエルミート行列で表されます．行列には二つの足があるので，ゲージ粒子が飛んでいる様子は二重線で表されます．ゲージ場の相互作用には，**図 5** に描いてあるように，三点相互作用と四点相互作用があります．(例えば三点相互作用では，一つの粒子が二つの粒子に別れたり，その逆が起きたりします.)この二種類の相互作用を組み合わせて出来る粒子の軌跡を辿ると，図 5 の

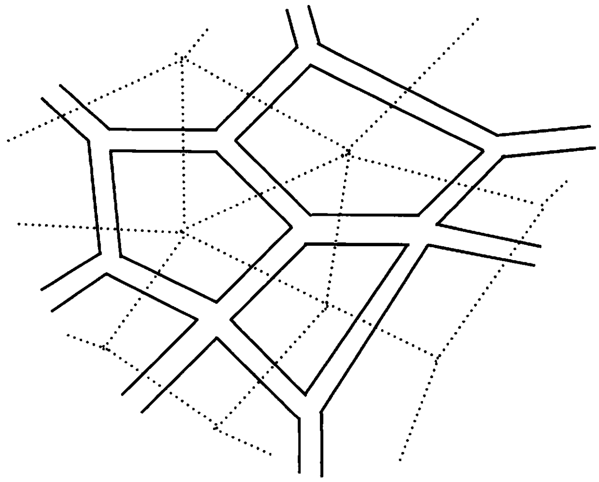

図 5　ゲージ粒子ファインマン図(実線)と，三角形と四角形での世界面の分割(点線)の対応.

実線で示した，網の目のような絵が描けます．(いわゆるファインマン図形です.)ゲージ理論の摂動計算では，ファインマン図形を足し上げていきます.

この網の目から，点線で書いたような三角形と四角形の組み合わせが得られます．即ち，ファインマン図形から，曲面の三角形と四角形による分割が得られます．従って，**ファインマン図形を足し上げれば，色々な形の世界面が自然に足し上げられます**．もっと詳しく調べると，ゲージ理論の結合定数 g を $\lambda \equiv g^2N$ が N によらずに一定になるように動かせば，ファインマン図に対応する世界面に穴が一つ増えるごとに，$1/N^2$ という因子が現れることが分かります．すなわち，ゲージ理論の $1/N^2$ 展開が，超弦理論の摂動展開と自然に対応しています．ゲージ理論は $1/N$ 展開に依存せずに非摂動的に定式化できるので，**ある種のゲージ理論が超弦理論の非摂動的な定式化を与える**のではないか，と予想されます.

この美しいアイデアは 1970 年代にトフーフトによって提唱されましたが，多分に形式的なものであり，具体的にどのようなゲージ理論を使えば超弦理論が定量的に正しく記述できるのかは長い間はっきりしませんでした．しかし，1990 年代半ばからの超弦理論の急速な発展の中で，ゲージ理論と超弦理論の詳細な対応が予想されるに至りました．なかでも，マルダセナの予想したゲージ/重力対応(そのうちの特別な場合は AdS/CFT 対応と呼ばれています)では，ゲージ理論のどのような量が超弦理論のどのような量と一致すべきかということが係数まで含めて精密に予想されています．既に述べたように，超弦理論の摂動展開は $1/N^2$

の展開なので，N が無限大の極限では摂動の最低次だけが生き残り，古典的な超弦理論になります．このような極限でも，弦が有限の広がりを持つため，まだ点粒子の理論とは異なっています．$\lambda=g^2N$ が無限大の極限を取ると，弦の広がりも無視できるようになり，単なる点粒子の理論(アインシュタインの重力理論に超対称性を組み込んだ「超重力理論」)になります．

$\lambda=\infty, N=\infty$	超重力理論
$\lambda=$ 有限, $N=\infty$	古典的な超弦理論
$\lambda=$ 有限, $N=$ 有限	量子論的な超弦理論

この予想では，D ブレーンと呼ばれるブラックホールの類似物が重要な役割を果たします．ブラックホールというと，普通の星と同じように，遠くから見ると点状になっている，空間的な広がりが 0 次元のものをイメージすると思います．しかし，古典的な重力理論の解としては，ひものように一次元的に広がった「ブラックストリング」や，もっと高次元に広がったものも考えることが出来ます．このようなブラックホールの高次元版を，「膜」を意味する英語であるメンブレーンに因んで「ブラックブレーン」と呼びます．D ブレーンは，ブラックブレーンの超弦理論における微視的な記述を与えるもので，空間的な広がりが p 次元であるものは Dp ブレーンと呼ばれます．超弦理論は 10 次元で定義されていますが，Dp ブレーンは $(p+1)$ 次元にだけ広がっており，その周りを飛んでいる弦だけに着目すると $(p+1)$ 次元のゲージ理論が現れます．このゲージ理論から Dp ブレーンの性質が再現できる，というのがマルダセナの予想です．

ここで，ゲージ理論としては必ずしも 4 次元の理論を考えないでも良いということに注意して下さい．たとえば 1 次元の理論(時間しかない，単なる量子力学)ですら，ブラックホールを記述できるのです．数値シミュレーションの立場からは，これはとても嬉しいニュースです．なぜなら，一般に，次元が高いほど数値シミュレーションのコストが大きくなってしまうからです．

マルダセナ予想はまだ証明されていませんが，少なくとも N が無限大の極限ではその正しさが様々な計算でチェックされています．

4. 超対称ゲージ理論のシミュレーション

ここまでで，超対称ゲージ理論の数値シミュレーションが超弦理論の研究において重要であることは分かっていただけたと思います．ゲージ理論をシミュレーションする際，普通は格子正則化を用います．しかし，超対称ゲージ理論の場合には，必ずしも格子正則化が良いとは限りません．細かい事情はここでは説明できませんが，格子以外の手法もうまく活用することでシミュレーションが可能です．四次元の理論は計算量が多いのでまだ詳細なシミュレーションは出来ていませんが，一次元の場合にはかなり詳細なシミュレーションが成され，マルダセナ予想の非自明な検証や，マルダセナ予想を通じた超弦理論への予言が得られています．

シミュレーションの具体例として，D0 ブレーンに対応する一次元の超対象ゲージ理論を考えることにします．ベッケンシュタインやホーキングによって明らかにされたように，ブラックホールは質量に応じた温度を持っており，熱力学と非常に良く似た関係式を満たします．マルダセナ予想によれば，ブラックホールの温度や質量はゲージ理論の温度やエネルギーに対応しており，ゲージ理論の熱力学がブラックホールの熱力学に翻訳できます[1]．**図 6** には，ゲージ理論で計算したエネルギーが三角と丸でプロットされています．ゲージ理論の行列の大きさは $N=17$ で，$1/N^2$ 補正はほとんど無視できます．ゲージ理論は本当は連続的な時空の上で定義されていますが，計算機に載せるために時空を有限個の点で近似するために誤差が生じます．四角形の方が三角よりもより連続時空に近い(点の数が多い)時のシミュレーション結果です．(同じ温度に丸と四角形の両方がある時には，四角形の方が正しい結果に近いと思って下さい．)この理論では，温度 T は $\lambda^{-1/3}T$ という形で現れます．マルダセナ予想に依れば，λ が大きい，すなわち $\lambda^{-1/3}T$ が小さい領域では超重力理論がいい近似にならなければなりません．超重力理論でブラックホールの質量を計算すると 7.41 $(\lambda^{-1}T)^{2.8}$ (実線)となります．ゲージ理論のシミュレー

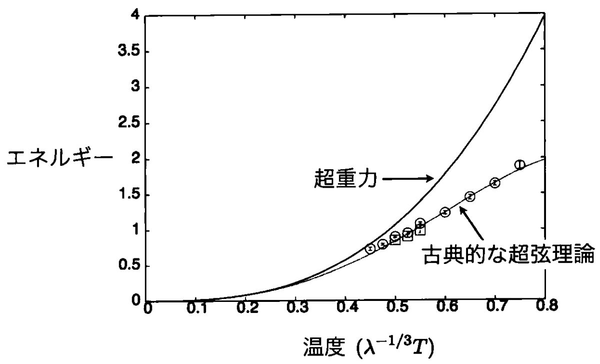

図 6　超対称ゲージ理論のシミュレーション結果と超弦理論の比較[2]

ション結果が実線に近づいていくのが分かると思います．更に，超重力からのずれを超弦理論に基づいて計算すると，最初に現れる補正は $(\lambda^{-1}T)^{4.6}$ に比例するべきであることが分かります．そこでシミュレーション結果から $7.41(\lambda^{-1}T)^{2.8}$ を引き算してみると，$\lambda^{-1/3}T$ が小さい領域では実際に $(\lambda^{-1}T)^{4.6}$ に比例しており，比例係数は -5.58 ± 0.01 となります．（超重力にこの補正を加えたものを点線で示しました．）この係数はゲージ理論のシミュレーションから決定されたことに注意して下さい．これは，ゲージ理論のシミュレーションが，超弦理論の定量的な性質を調べるための道具として使えることを意味します．

以上で，ゲージ理論の行列サイズ N が大きい極限で超弦理論が再現されることは分かっていただけたと思います．しかし，ゲージ理論の $1/N$ 補正が超弦理論の量子補正と一致するかどうかのテストはまだ成されていません．もしシミュレーションを駆使して一致が見えれば，ゲージ理論を数値シミュレーションすることで超弦理論の量子論的な性質が詳しく調べられるという夢のような世界が開けるかもしれません．

参考文献

1）J. M. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231(1998). N. Itzhaki, J. M. Maldacena, J. Sonnenschein and S. Yankielowicz, Phys. Rev. D **58**, 046004 (1998).

2）M. Hanada, Y. Hyakutake, J. Nishimura and S. Takeuchi, Phys. Rev. Lett. **102**, 191602(2009).