

講座

電気・機械一体モデルの開発と応用

第2報 力学と電磁気学間の新しい相似則の提案

長松 昌男*・長松 昭男**

Development and Application of Unified Model of Electric and Mechanical System

2nd Report Introduction of New Analogy between Mechanics and Electromagnetics

Masao Nagamatsu* and Akio Nagamatsu**

Key words: Multi-physics domain simulation, Electromagnetics, Mechanics, Modeling, Analogy

1. まえがき

力学・電気・熱・流体・化学などの異分野間を自在に横断するエネルギー変換によって使命を果たす機械製品の実働シミュレーションには、複合物理領域を統合するモデルが必要になる。本解説では、その中で実用上特に重要であり、ハイブリッド自動車、ロボット、家庭電器など昨今の各種機械のモデルベース製品開発に用いられる、電気・機械一体モデルの開発と応用について、筆者らのこれまでの研究^{1~4)}の概要を紹介する。

本解説の第1報⁵⁾で、電気・機械一体モデルの構築を可能にするための理論的基礎を、物理学の立場から論じた。まず、電気と機械の学術的整合性をとるために必要な力学の改革を行った。すなわち、力学の基本を力と運動の関係からエネルギーの均衡・不均衡に移し、同時に在来力学に欠けていた事象の閉じた因果関係と対称性を力学に導入し、それを可能にする新しい力学法則を提唱した。次に、電気と機械の両領域の状態量である力・速度と電流・電圧間の相似則の正当性に対し、物理学の立場から学術的根拠を与えた。これ

らの内容は参考文献4に詳細に記されている。

これに続いて本第2報では、まず力学と電磁気学間の相似関係を前報よりもさらに詳しく論じる。まず、前報で物理学的根拠を与えた状態量の相似則から出発し、特性・法則・規定・エネルギーなどの両分野を構成する諸概念全体の相似則を新しく提案する。次に、簡単な1次と2次の機械系と電気系をモデル化し、それらのモデルと支配方程式を用いて、提案した相似則の正当性を例証する。

2. 力学と電磁気学の相似関係

2.1 状態量

多くの物理学分野には、事象の状態を表現し互いに対称・双対の関係にある2種類の状態量が存在し、一方はエネルギーの質(強弱)を、他方は量(大小)を表現し、両者の積は瞬時エネルギー(動力・電力)になるという、分野を越えた共通性が存在する。力学では力 f (強弱)と速度 v (大小)、電磁気学では電流 I (強弱: 電流を表す記号 I はIntensity(強さ)の頭文字)と電圧 V (大小)がそれに相当する。

在来の力学と電磁気学では、これら2種類の状態量を代表する力・速度(回転系ではトルク・角速度、流体系では圧力・流量)と電流・電圧の間に、表1の上中2段に示すように、力電圧相似と(在来の)力電流相似という、2通りの相似関係があるとされている¹⁴⁾。

* 北海道工業大学
Hokkaido Institute of Technology
** キャテック株式会社
CATEC Inc.

表1 電気・機械系における状態量の相似則

相似則	状態量名	並進	回転	流体	電気
力電圧相似	エフォート	力	トルク	圧力	電圧
	フロー	速度	角速度	流量	電流
在来の力電流相似	スルー	力	トルク	流量	電流
	アクロス	速度	角速度	圧力	電圧
新提案の力電流相似	内包量	力	トルク	圧力	電流
	外延量	速度	角速度	流量	電圧

表1 上段の力電圧相似では、力[N]、トルク[N・m]、圧力[Pa=N/m²]、電圧[V=N・m/C]のように、力[N]に関連する状態変数を1組にまとめて、それらを力のイメージからエフォート(effort)と総称し、また速度[m/s]、角速度[rad/s]、流量[m³/s]、電流[A=C/s]のように時間変化率[1/s]に関連する状態変数をもう1組にまとめて、それらを流れのイメージからフロー(flow)と総称する。このように力電圧相似は、状態変数の単位(次元)に着目した相似である。力と電圧が対応し、速度と電流が対応するという力電圧則は、感覚的に受け入れやすいためか、一般によく使われている。

一方、表1 中段に記した在来の力電流相似は、作用力、流量、電流のように1点を通過する変数を1組にまとめて、それらをスルー(through)と総称し、また(相対)速度、圧力差、電圧(電位差)のように2点間の差で定義される変数をもう1組にまとめて、それらをアクロス(across)と総称する。スルーに関しては1点の状態量の代数和が0になるというキルヒホッフの電流則に相当するノード則が、アクロスに関しては閉回路を通過する状態量の1周にわたる代数和が0になるというキルヒホッフの電圧則に対応するループ則が、それぞれ成立するとされている。

物理学から見れば、正しい相似則は1つのはずである。前報⁵⁾ではこのことを論じ、力学と電磁気学の状態量間に成立する正しい相似則(異分野間の相似関係)として、力と電流、速度と電圧がそれぞれ対応しており、したがって、物理学的に正しい機械・電気間の相似則は力電流相似であることの学術的根拠を示した。

ただし在来の力電流相似には、力学における固体系と流体系の相似関係、すなわち表1 中段のように、力と流量、速度と圧力がそれぞれ対応していると見なす点に問題がある。力に回転半径を乗じるとトルクになり、速度を回転半径で割ると角速度になることから、力とトルクが、速度と角速度が対応していることは理解できる。これと同様な関係を流体系に適用すれば、力を断面積で割ると圧力になり、速度に断面積を乗じ

ると流量になることから分るように、力と圧力が、速度と流量が対応することは明らかであり、したがって在来の力電流相似における上記の対応関係は、力学的には正しくない。

前述のように、在来の力電流相似において力と流量、速度と圧力が対応するとされていることの根拠は、前者にはノード則が、後者にはループ則が対応することにあるといわれている。しかしこの根拠は正確でないと筆者らは考える。その理由は以下のとおりである。

流体の湧出し・吸込みがある点(ノード)では、流量の総和が0にはならず力や電流と同様のノード則(キルヒホッフの電流則に相当)は成立しない。これに対して、1点におけるあらゆる方向からの圧力の総和は必ず0であるから、湧出し・吸込みがある点でも、圧力に関しては力や電流と同様のノード則(力の釣合、ただし加減速しつつある流体からの反作用圧力を考慮した広義の力の釣合=ダランベールの原理⁴⁾)が成立する。これは、電源を含む点(ノード)では、電圧に関してはノード則が成立せず電流に関しては成立することと同様である。一方、流体が閉回路を1周すれば必ず元に戻るから、閉回路の中に湧出し・吸込み点が存在する場合にも、流量に関しては速度や電圧と同様のループ則(キルヒホッフの電圧則に相当)が常に成立する。これらのことから見ても、流量は速度や電圧と対応し、圧力は力や電流と対応すると考えるのが、明らかに正しい。

筆者らは前報⁵⁾で、表1 下段に示すように、この点を修正した新しい相似則を提案し、それを構成する2種類の状態量を内包量・外延量と呼んだ。これは、オレム(Nicole Oresme; 1320-82)が、「質の量は質の強さと質の広がり積である」とし、前者を内包量、後者を外延量と呼んだことに由来する⁶⁾。オレムの言う質は、現在の瞬時エネルギーを意味する。

表2に、内包量と外延量を対比する。前者は、場(空間)または物体に包含・隠べいされ、ノード則が成立し、瞬時エネルギーの質的程度(強弱・激穏)を表す。これに対して後者は、場として空間に具現・展開され、瞬時エネルギーの量的程度(大小・多少)を表し、ループ則が成立する。

筆者らが新しく提案した表1 下段の相似関係から必然的に、力の時間積分値である運動量 $p = \int f dt$ (力積)と電流の時間積分値である電気量(電荷または電束 D) $Q (= D) = \int I dt$ 、また速度の時間積分値である位置 $x = \int v dt$ (速度積、弾性体では変位)と電圧の時間積分値である磁束 $\Phi = \int V dt$ (インダクタンスの磁氣的性

表2 内包量と外延量の対比

内包量	外延量
場または物体に包含・隠べいされる。	場として空間に具現・展開される。
瞬時エネルギーの質的程度(強弱・激穏)を現す。	瞬時エネルギーの量的程度(大小・多少)を現す。
ノード則が成立する。	ループ則が成立する。

質)は、それぞれ相似関係にあることが導かれる。

電束は、電気量に近接する空間や媒体中に形成される想定線であるが、それ自身がエネルギーを有するれっきとした実体(場)のベクトル量であり、空間や媒体の性質(真空か導体か誘電体かなど)や状態には無関係に1Cの電荷から1本の線が出るように決められている⁴⁾から、電気量(電荷)と同一と見なしてよい。運動量と位置、電束(電気量)と磁束は、それぞれ互いに対称・双対の関係にある⁴⁾。運動量と電気量(電荷)は、エネルギーと共に物理学全体を支配する基本量である。なお電磁気学では、電荷と対称・双対の関係にある量として磁荷の概念が用いられるが、磁荷は電荷とは異なり実在しない量であり、その正体は分子電流であることがわかっている⁴⁾。ただし磁束は、分子電流によって発生する実在の量である。

2.2 特性

本章では、力学と電磁気学の間に、状態量以外の事象・法則間にも状態量と同様の相似関係が存在することを新しく指摘し、これまで明らかにされていなかった両分野全体間の相似則を提示する。まず、状態量の変換を演じる力学特性と電気特性について述べる。

前報⁵⁾で述べたように質量 M は、自由状態に置かれ力が作用しないときには静止($v=0$)を含む一定の速度を保ち(質量の静的機能：慣性の法則： $v=一定$)、力が作用するときには力に比例した速度変動(加速度)を生じる(質量の動的機能：運動の法則： $f=M\dot{v}$)。一方電気容量 C は、開放状態に置かれ電流が流れないときには0を含む一定の電圧を保ち(電気容量の静的機能： $V=一定$)、電流が流れるときにはそれに比例した電圧変動を生じる(電気容量の動的機能： $I=C\dot{V}$)。力と電流が、また速度と電圧が相似関係にあるから、質量と電気容量は相似関係にある。

これも前報⁵⁾で述べたように弾性 H (剛性 K の逆数： $H=1/K$)は、両端間が一定長に拘束され速度が作用しない(両端間に相対速度(速度差)が与えられない)ときには0を含む一定の力(内力)を保ち(弾性の静的機能：弾性の法則⁴⁾： $f=一定$)、速度が作用する(両端間に速度差が与えられる)ときにはそれに比例した力(内力)

変動を生じる(弾性の動的機能：力の法則⁴⁾： $v=H\dot{f}$)。また、弾性の両端を自由にすれば、その瞬間に内力が消滅して自然長に復元する。一方インダクタンス L は、両端の電位が同一で電圧が印加されないときには0を含む一定の電流を流し続け(インダクタンスの静的機能： $I=一定$)、電圧を印加するときにはそれに比例した電流変動を生じる(インダクタンスの動的機能： $V=L\dot{I}$)。また、インダクタンスの両端を解放すれば、その瞬間に電流が消滅して自然状態に復元する。したがって、弾性とインダクタンスは相似関係にある。

質量と弾性はたがいに対称・双対関係にあるから、それらと相似関係にある電気容量とインダクタンスも互いに対称・双対関係にある。

粘性 C_m には、作用速度(両端間の速度差)に比例した力が生じる($f=C_mv$)。一方コンダクタンス G (電気抵抗 R の逆数： $G=1/R$)には、印加電圧(両端間の電位差)に比例した電流($I=GV$)が流れる。したがって、粘性とコンダクタンスは相似関係にある。

2.3 法則・規定

次に、力学と電磁気学を支配する法則・規定間の相似則について述べる。

上記のように、「力が作用しない質量は0を含む一定の速度を保つ」という質量の静的機能である慣性の法則($v=一定$)と、「電流が流れない電気容量は0を含む一定の電圧を保つ」という電気容量の静的機能($V=一定$)は、相似関係にある。また、「速度が作用しない弾性は0を含む一定の力(内力)を保つ」という弾性の静的機能である弾性の法則($f=一定$)⁴⁾と、「電圧が印加されないインダクタンスは0を含む一定の電流を保つ」というインダクタンスの静的機能($I=一定$)は、相似関係にある。

「力が作用する質量は作用力に比例する速度変動(加速度)を生じる」という質量の動的機能である運動の法則($f=M\dot{v}$)と、「電流が流れる電気容量は電流に比例する電圧変動を生じる」という電気容量の動的機能($I=C\dot{V}$)は、相似関係にある。一方、「速度が作用する(両端間に速度差を与える)弾性は作用速度に比例する力変動を生じる」という弾性の動的機能である力の法則($v=H\dot{f}$)⁴⁾と、「電圧が作用する(両端間に電位差を印加する)インダクタンスは作用電圧に比例する電流変動を生じる」というインダクタンスの動的機能($V=L\dot{I}$)は、相似関係にある。慣性の法則と弾性の法則⁴⁾、運動の法則と力の法則⁴⁾、電気容量の静的機能とインダクタンスの静的機能、電気容量の動的機能とインダクタンスの動的機能は、それぞれ互に対称・双

対の関係にある。

「速度が作用する(両端間に速度差を与える)粘性は作用速度に比例する力を生じる」という粘性の機能($f = C_m \dot{v}$)は、「両端に電位差(電圧)が印加されるコンダクタンスには電圧に比例する電流が流れる」というオームの法則($I = GV$)と互いに相似関係にある。

運動量と電気量, 力と電流は互いに相似関係にあるから, 運動量の法則($p = \int f dt$)と電気量の規定($Q = \int I dt$)は, 相似関係にある。また, 位置と磁束, 速度と電圧は互いに相似関係にあるから, 弾性体における位置の法則⁴⁾($x = \int v dt$)とインダクタンスにおける磁束の規定($\Phi = \int V dt$)は, 相似関係にある。運動量の法則と位置の法則, 電気量(電荷)が近接場に形成する電束の規定($D (= Q) = \int I dt$)とインダクタンスに印加された電圧が近接場に形成する磁束の規定($\Phi = \int V dt$)は, それぞれ互いに対称・双対の関係にある。

「力が作用しない系の運動量は保存される」という運動量保存の法則と, 「電流が流入出しない系の電気量(電荷)とその近接場に形成される電束は保存される」という電気量(電荷)保存の法則は, 相似関係にある。また, 「速度が作用しない(両端間に速度差を与えない)弾性の力(内力)と変位は保存される」という弾性体における位置保存の法則⁴⁾と, 「電圧が印加されない(両端間に電位差を与えない)インダクタンスの電流とその近接場に形成される磁束は保存される」という規定は, 相似関係にある。運動量保存の法則と位置保存の法則, 電気量(電束)保存の法則と磁束保存の規定は, それぞれ互いに対称・双対の関係にある。

運動量保存の法則と電気量保存の法則は, エネルギー保存の法則と共に, 物理学全体を支配する基本法則である。

運動量の定義($p = Mv$)と電気容量の性質($Q = CV$), フックの法則($x = Hf \leftarrow (H = 1/K) \leftarrow f = Kx$)とインダクタンス L の性質($\Phi = LI$)は, それぞれ相似関係にある。運動量の定義とフックの法則, 電束 D を用いて表現した電気容量の性質($D (= Q) = CV$)と磁束 Φ を用いて表現したインダクタンスの性質($\Phi = LI$)は, それぞれ互いに対称・双対の関係にある。

運動量の定義を時間で微分すれば運動の法則($f = \dot{p} = M\dot{v}$)になり, フックの法則を時間で微分すれば力の法則($v = \dot{x} = Hf$)になる。同様に, 電気容量の性質を時間で微分すればその動的機能($I = \dot{Q} = C\dot{V}$)になり, インダクタンスの性質を時間で微分すればその動的性質($V = \dot{\Phi} = L\dot{I}$)になる。

2.4 エネルギーと仕事

弾性体の力学的エネルギーは, 次式に示す運動エネルギー T_m と力エネルギー(位置エネルギー) U_m からなる⁴⁾。

$$T_m = \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2M} p^2 = \frac{1}{2} p v \quad (1)$$

$$U_m = \frac{1}{2} H f^2 = \frac{1}{2H} x^2 \left(= \frac{1}{2} K x^2 \right) = \frac{1}{2} x f \quad (2)$$

2.1 節で述べたように, 力 f と速度 v , 運動量 p と位置(変位) x , 質量 M と弾性 H がそれぞれ互いに対称・双対の関係にあるから, 運動エネルギーと力エネルギーは互いに対称・双対の関係にある。

電氣的エネルギーは, 次式に示す静電エネルギー T_e と電磁エネルギー U_e からなる。

$$T_e = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2C} Q^2 = \frac{1}{2} Q V \quad (3)$$

$$U_e = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2L} \Phi^2 = \frac{1}{2} \Phi I \quad (4)$$

電流 I と電圧 V , 電気量 $Q (= \text{電束 } D)$ と磁束 Φ , 電気容量 C とインダクタンス L がそれぞれ互いに対称・双対の関係にあるから, 静電エネルギーと電磁エネルギーは互いに対称・双対の関係にある。

速度と電圧, 運動量と電気量, 質量と電気容量が相似関係にあるから, 運動エネルギーと静電エネルギーは相似関係にある。また, 力と電流, 変位と磁束, 弾性とインダクタンスが相似関係にあるから, 力エネルギーと電磁エネルギーは相似関係にある。

次に, 仕事とエネルギーの関係を示す。

質量に力を作用させる場合には運動の法則 $f = M\dot{v}$ が成立するから, 作用力がなす仕事は

$$W = \int_0^t f v dt = \int_0^t M \dot{v} v dt = \int_0^t \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M v^2 \right) dt \quad (5)$$

$$= T_m - T_{m0}$$

弾性に速度を作用させる場合には力の法則 $v = H\dot{f}$ が成立するから, 作用速度がなす仕事は

$$W = \int_0^t v f dt = \int_0^t H \dot{f} f dt = \int_0^t \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} H f^2 \right) dt \quad (6)$$

$$= U_m - U_{m0}$$

電気容量に電流を流す場合には規定式 $I = C\dot{V}$ が成立するから, 電流がなす仕事は

$$W = \int_0^t I V dt = \int_0^t C \dot{V} V dt = \int_0^t \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C V^2 \right) dt \quad (7)$$

$$= T_e - T_{e0}$$

インダクタンスに電圧を印加する場合には規定式 $V = L\dot{I}$ が成立するから, 電圧がなす仕事は

$$W = \int_0^t VI \, dt = \int_0^t LiI \, dt = \int_0^t \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} LI^2 \right) dt \quad (8)$$

$$= U_e - U_{e0}$$

式5は作用力が質量になす仕事は運動エネルギーを変化させることを意味し、式6は作用速度が弾性になす仕事は力エネルギーを変化させることを意味する。また、式7は作用電流が電気容量になす仕事は静電エネルギーを変化させることを意味し、式8は作用電圧がインダクタンスになす仕事は電磁エネルギーを変化させることを意味する。式5と6は力学における仕事の対称・双対関係、式7と8は電磁気学における仕事の対称・双対関係を示す。式5と7、式6と8を比較すれば、力学と電磁気学における仕事はたがいに相似関係にあることが分る。

これまでに述べてきた力学と電磁気学間の状態量・特性・法則・規定・エネルギーの相似則を、表3にまとめて記す。表3内の点線は、その上下が同一分野でたがいに対称・双対の関係にあることを示す。

3. モデル化と支配方程式から見た相似関係

3.1 1次系

3.1.1 1次力学系

図1は、質量または弾性のうちどちらかと粘性からなる3種類の力学系である。これらの支配方程式は1次微分方程式になるので、これらを1次力学系という。物体は必ず質量と弾性の両方から構成されているので、このような物体は現実には存在しないが、力学系のモデル化では、しばしば物体を1次系と見なすこと

表3 力学と電磁気学間の相似則

	力 学	電 磁 気 学
状態量	力 f	電流 I
	速度 v	電圧 V
	運動量 p	電気量(電荷=電束) $Q (= D)$
	位置 x	磁束 Φ
特性	質量 M	電気容量(コンデンサ) C
	弾性(剛性の逆数) $H (= 1/K)$	インダクタンス L
	粘性 C_m	コンダクタンス(電気抵抗の逆数) $G (= 1/R)$
法則・規定	慣性の法則(質量の静的機能) $v = \text{一定}$	電気容量の静的機能 $V = \text{一定}$
	弾性の法則 ⁴⁾ (弾性の静的機能) $f = \text{一定}$	インダクタンスの静的機能 $I = \text{一定}$
	運動の法則(質量の動的機能) $f = M\dot{v}$	電気容量の動的機能 $I = C\dot{V}$
	力の法則 ⁴⁾ (弾性の動的機能) $v = H\dot{f}$	インダクタンスの動的機能 $V = L\dot{I}$
	粘性の機能 $f = C_m v$	クーロンの法則 $I = GV$
	運動量の法則 $p = \int f \, dt$	電気量(電束)の規定 $Q (= D) = \int I \, dt$
	位置の法則 ⁴⁾ $x = \int v \, dt$	磁束の規定 $\Phi (= \int L\dot{I} \, dt) = \int V \, dt$
	運動量保存の法則 $p = \text{一定}$	電気量保存の法則 $Q = \text{一定}$
	位置保存の法則 ⁴⁾ $x = \text{一定}$	磁束保存の規定 $\Phi = \text{一定}$
	運動量の規定 $p = Mv$	電気容量の性質 $Q = CV$
	フックの法則 $x = Hf (\leftarrow f = Kx)$	インダクタンスの性質 $\Phi = LI$
	運動エネルギー $Mv^2/2$	静電エネルギー $CV^2/2$
エネルギー	力エネルギー ⁴⁾ $Hf^2/2 (= Kx^2/2)$	電磁エネルギー $LI^2/2$

(注) 点線はその上下が同一分野内で対称・双対の関係にあることを示す。

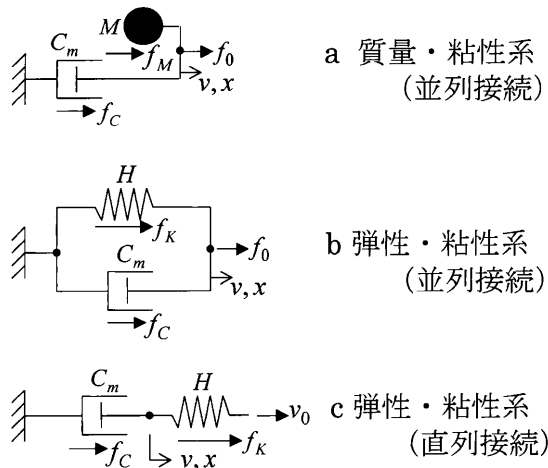


図 1 1 次力学系

がある。

図 1a は自由状態にある質量 M と左端が固定された粘性 C_m の並列結合からなる 1 次力学系である。系右端の変位を $x(t)$ 、速度を $v(t)$ とする。系右端に外部から力 $f_0(t)$ が加わるとき、質量には慣性力 $f_M = -M\ddot{x}$ が、粘性には粘性抵抗力 $f_c = -C_m\dot{x}$ が生じ、これら 3 力は釣り合うから、 $f_M + f_c + f_0 = 0$ 。したがって支配方程式は

$$M\ddot{x} + C_m\dot{x} = f_0(t) \quad \text{または} \quad M\dot{v} + C_mv = f_0(t) \quad (9)$$

外力 f_0 が $t=0$ を起点とするステップ関数 $f_{0h} = \text{一定}$ のとき、速度解は $v = (f_{0h}/C_m)(1 - e^{-(C_m/M)t})$ 、速度の時定数は $\tau = M/C_m$ になる。

図 1b は弾性 $H (= 1/K : K \text{ は剛性})$ と粘性 C_m の並列接続からなる 1 次力学系である。系左端は固定され、系右端の変位を $x(t)$ 、速度を $v(t)$ とする。系右端に外部から力 $f_0(t)$ が加わるとき、弾性には復元力 $f_k = -x/H$ が、粘性には粘性抵抗力 $f_c = -C_m\dot{x}$ が生じ、これら 3 力は釣り合うから、 $f_k + f_c + f_0 = 0$ 。したがって支配方程式は

$$HC_m\dot{x} + x = Hf_0(t) \quad \text{または} \quad HC_m\dot{v} + v = H\dot{f}_0(t) \quad (10)$$

作用 f_0 が $t=0$ を起点とするステップ関数 $f_{0h} = \text{一定}$ のとき、変位解は $x = Hf_{0h}(1 - e^{-(1/HC_m)t})$ 、変位の時定数は $\tau = HC_m$ になる。

図 1c は弾性 H と粘性 C_m の直列接続からなる 1 次力学系である。系左端は固定され、弾性と粘性の接続点の変位を $x(t)$ とする。系右端に初期変位 0 からステップ関数速度 $v_{0h} = \text{一定}$ が与えられるとき、弾性から復元力 $f_k = -(x - v_{0h}t)/H$ が、粘性から粘性抵抗力 $f_c =$

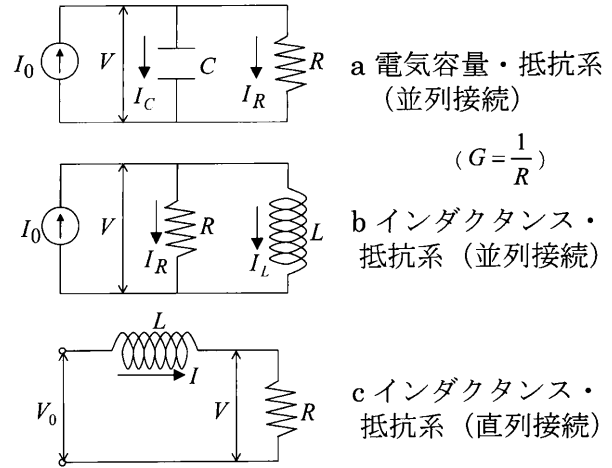


図 2 1 次電気系

$-C_m\dot{x}$ が接続点に作用し、これら 2 力は釣り合うから、 $f_M + f_c = 0$ 。したがって式 $HC_m\dot{x} + x = v_{0h}t$ が成立する。この式を時間で 1 回微分すれば、速度 $v = \dot{x}$ に関する支配方程式は

$$HC_m\dot{v} + v = v_{0h} \quad (11)$$

式 11 の速度解は $v = v_{0h}(1 - e^{-(1/HC_m)t})$ 、速度の時定数は $\tau = HC_m$ になる。

3.1.2 1 次電気系

図 2 は、電気容量 C またはインダクタンス L のうちどちらかと電気抵抗 R からなる 3 種類の電気系である。これらの支配方程式は 1 次微分方程式になるので、これらを 1 次電気系という。ここでは、電気抵抗をその逆数のコンダクタンス $G = 1/R$ で表現する。

図 2a は電気容量と電気抵抗(コンダクタンス)の並列接続からなる 1 次電気系である。電流源から電流 $I_0(t)$ が供給されるとき、電圧を $V(t)$ とする。電気容量とコンダクタンスは並列に接続されているから、両者に流れる電流はそれぞれ $I_c = CV$ 、 $I_R = GV$ である。キルヒホッフの電流則から $I_c + I_R = I_0$ であるから、支配方程式は

$$C\dot{V} + GV = I_0(t) \quad (12)$$

電流 I_0 が $t=0$ を起点とするステップ関数 $I_{0h} = \text{一定}$ のとき、電圧解は $V = (I_{0h}/G)(1 - e^{-(G/C)t})$ 、電圧の時定数は $\tau = C/G$ になる。表 4 を参照すれば、図 1a と 2a、式 9 と 12 はそれぞれ相似関係にあることが分る。

図 2b はインダクタンスと電気抵抗(コンダクタンス)の並列接続からなる 1 次電気系である。電流源から電流 $I_0(t)$ が供給されるとき、電圧を $V(t)$ とする。

インダクタンスに流れる電流は $I_L = \Phi/L$ (Φ は磁束) である。一方、 $V = \Phi$ の関係があるから、コンダクタンスに流れる電流は $I_R = GV = G\Phi$ である。キルヒホッフの電流則から $I_R + I_L = I_0$ であるから、支配方程式は

$$LG\dot{\Phi} + \Phi = LI_0(t) \quad \text{または} \quad LG\dot{V} + V = LI_0(t) \quad (13)$$

電流 I_0 が $t=0$ を起点とするステップ関数 I_{0h} のとき、磁束解は $\Phi = LI_{0h}(1 - e^{-(1/LG)t})$ 、変位の時定数は $\tau = LG$ になる。表 4 を参照すれば、図 1b と 2b、式 10 と 13 はそれぞれ相似関係にあることが分る。

図 2c はインダクタンスと電気抵抗(コンダクタンス)の直列接続からなる 1 次電気系である。系左端に一定電圧 V_{0h} が印加されるとき、系に電流 $I(t)$ が流れるとする。コンダクタンス両端間の電圧は $V = I/G$ 、インダクタンス両端間の電圧は $V_{0h} - V = L\dot{I} = LG\dot{V}$ であるから、支配方程式は

$$LG\dot{V} + V = V_{0h} \quad (14)$$

式 14 の電圧解は $V = V_{0h}(1 - e^{-(1/LG)t})$ 、速度の時定数は $\tau = LG$ になる。表 4 を参照すれば、図 1c と 2c、式 11 と 14 はそれぞれ相似関係にあることが分る。

3.2 2 次系

3.2.1 2 次力学系

図 3 は、質量と弾性の両者からなる 3 種類の力学系である。これらの支配方程式は 2 次微分方程式になるので、これらを 2 次力学系という。通常これらの系は、力学における 1 自由度系の振動解析に用いられる。

図 3a は、自由状態にある質量 M と左端が固定され

た弾性 H の並列接続からなる 2 次力学系である。系右端に外部から力 $f_0(t)$ が加わるとき、質量には慣性力 $f_M = -M\ddot{x}$ (運動の法則) が、弾性には復元力 $f_K = -x/H$ (フックの法則) が生じ、これら 3 力が釣り合うから、 $f_M + f_K + f_0 = 0$ 。したがって支配方程式は

$$M\ddot{x} + x = Hf_0(t) \quad \text{または} \quad M\ddot{x} + Kx = f_0(t) \quad (15)$$

式 9 を時間で 1 回微分すれば、速度 $v = \dot{x}$ に関する支配方程式は

$$M\dot{v} + v = H\dot{f}_0(t) \quad (16)$$

図 3b は質量 M に弾性 H と粘性 C_m の並列接続からなる 2 次力学系である。系右端に外部から力 $f_0(t)$ が加わるとき、質量には慣性力 $f_M = -M\ddot{x}$ (運動の法則) が、粘性には粘性抵抗力 $f_C = -C_m\dot{x}$ が、弾性には復元力 $f_K = -x/H$ (フックの法則) が生じ、これら 4 力が釣り合うから、 $f_M + f_C + f_K + f_0 = 0$ 。したがって支配方程式は

$$M\ddot{x} + C_m\dot{x} + x = Hf_0(t) \quad \text{または} \quad M\ddot{x} + C_m\dot{x} + Kx = f_0(t) \quad (17)$$

式 17 を時間で 1 回微分すれば、速度 $v = \dot{x}$ に関する支配方程式は

$$M\dot{v} + C_mv + v = H\dot{f}_0(t) \quad (18)$$

図 3c は質量 M と粘性 C_m と弾性 H の直列接続からなる系である。直列接続では力を共有するから、系右端に速度 v_0 が与えられるとき、弾性と粘性には同一の力 f が生じる。弾性と粘性の接続点における速度を v_d 、質量と粘性の接続点の速度を v とすれば、弾性では力の法則に従って式 $v_0 - v_d = Hf$ が成立し、粘性に生じる力は $f = C_m(v_d - v)$ となる。これら両式から v_d を消去すれば、式 $f = C_m(v_0 - v - Hf)$ が得られる。一方、質量は運動の法則に従うから、式 $f = M\ddot{v}$ とその時間微分式 $\dot{f} = M\dot{v}$ を前式に代入すれば、速度に関する支配方程式は

$$MHC_m\ddot{v} + M\dot{v} + C_mv = C_mv_0(t) \quad (19)$$

3.2.1 2 次電気系

図 4 は、電気容量とインダクタンスの両者を有する 3 種類の電気系である。これらの支配方程式は 2 次微分方程式になるので、これらを 2 次電気系という。

図 4a は電気容量とインダクタンスの並列接続からなる系である。電流源から電流 $I_0(t)$ が供給されるとき、電圧を $V(t)$ とする。電気容量を流れる電流は式 $I_C = C\dot{V}$ に従うから、これを時間微分して $\dot{I}_C = C\ddot{V}$ が

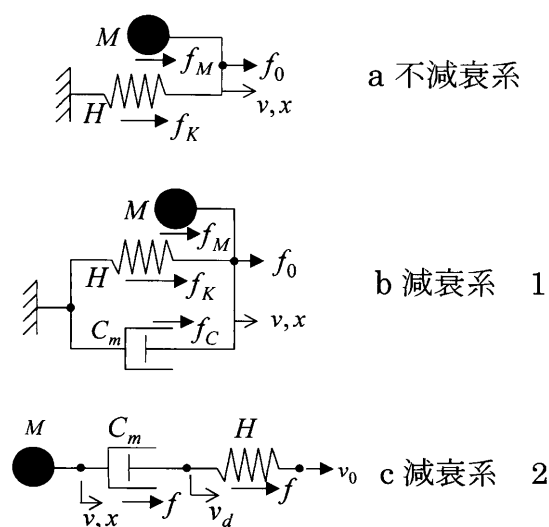


図 3 2 次力学系

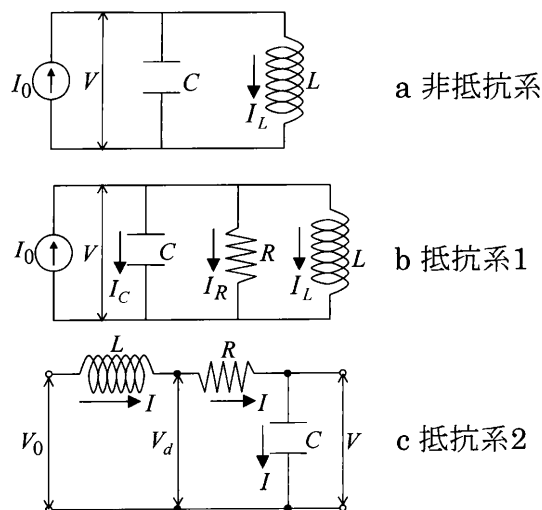


図4 2次電気系

成立する。インダクタンスでは式 $V = L\dot{I}_L = L(\dot{I}_0 - \dot{I}_C)$ が成立するから、支配方程式は

$$CL\ddot{V} + V = L\dot{I}_0(t) \quad (20)$$

表4を参照すれば、図3aと4a、式16と20はそれぞれ相似関係にあることが分る。

図4bは電気容量と電気抵抗(コンダクタンス)とインダクタンスの並列接続からなる系である。電流源から電流 $I_0(t)$ が供給されるとき電圧を $V(t)$ とする。電気抵抗を流れる電流は式 $I_R = CV$ に従うから、これを時間微分して式 $\dot{I}_R = G\dot{V}$ が成立する。また、電気容量を流れる電流は式 $I_C = C\dot{V}$ に従うから、これを時間微分して式 $\dot{I}_C = C\ddot{V}$ が成立する。一方インダクタンスでは式 $V = L\dot{I}_L = L(\dot{I}_0 - \dot{I}_R - \dot{I}_C) = L(\dot{I}_0 - G\dot{V} - C\ddot{V})$ が成立するから、支配方程式は

$$CL\ddot{V} + GL\dot{V} + V = L\dot{I}_0(t) \quad (21)$$

表4を参照すれば、図3bと4b、式18と21はそれぞれ相似関係にあることが分る。

図4cはインダクタンスと電気抵抗と電気容量が直

列に接続された系である。インダクタンスと電気抵抗の接続点における電圧を V_d 、電気容量両端間の電圧を V とし、系左端に電圧 $V_0(t)$ を印加するとき系に電流 I が流れるとする。電気容量を流れる電流は式 $I_C = C\dot{V}$ に従うから、これを時間微分して $\dot{I} = C\ddot{V}$ が成立する。一方インダクタンスでは式 $V_0 - V_d = L\dot{I}$ が成立するから、 $V_d = V_0 - L\dot{I} = V_0 - CL\ddot{V}$ が得られる。この式と式 $I = C\dot{V}$ を電気抵抗で成立する式 $G(V_d - V) = I$ に代入すれば、支配方程式は

$$CLG\ddot{V} + C\dot{V} + GV = GV_0(t) \quad (22)$$

表4を参照すれば、図3cと4c、式19と22はそれぞれ相似関係にあることが分る。

4. まとめ

本報告では、力学と電磁気学間全体にわたる相似関係を詳細に論じた。まず、前報で物理学的根拠を与えた状態量の相似則から出発し、特性、法則・規定・エネルギーなどの両分野を構成する諸概念全体の相似則を新しく提案した。次に、簡単な1次と2次の力学系と電気系をモデル化し、それらのモデルと支配方程式を用いて、本報告で提案した相似則の正当性を例証した。

参考文献

- 1) 長松, 角田, 長松: 製品開発のための新しいモデル化手法(機能モデルの基本概念), 日本機械学会(C編), 64-622, 1997/2004 (1998)
- 2) 長松, 角田, 長松: 同上(展開と統合), 同上, 64-627, 4126/4223 (1998)
- 3) 角田, 長松, 長松: 同上(非線形系1 基本要素), 同上, 65-632, 1403/1410 (1999)
- 4) 長松昌男, 長松昭男: 複合領域シミュレーションのための電気・機械系の力学, コロナ社 (2013)
- 5) 長松昌男, 長松昭男: 電気・機械一体モデルの開発と応用, 第1報 物理学的基礎(講座), シミュレーション vol.32, No.1, 48-54 (2013)
- 6) 三輪修三: 機械工学史, 丸善 (2000)