

## 最先端研究

# 低圧気流の数値シミュレーション

青木 一生\*

## Numerical Simulation of Low-Pressure Gas Flows

Kazuo Aoki\*

**Key words:** Low-pressure gas flows, Molecular gas dynamics, Rarefied gas dynamics, Boltzmann equation, Radiometer

### 1. はじめに

われわれのまわりで生じる気体の流れを記述するためには、巨視的な流体力学が用いられる。しかし、これは気体分子どうしの衝突が非常に頻繁で、気体が局所的にほとんど熱平衡状態にある場合に限って正しい。高層大気や真空機器内の気体といった低圧気体では、気体分子どうしの衝突が頻繁でないため、気体は局所的な熱平衡に達することができない。このような気体に対しては、通常の流体力学は適用できず、気体が多数の分子の集団で、分子の速度がどのように分布しているかの情報が必要となる。この情報を扱うのが気体分子運動論であり、それをもとにした気体力学を、分子気体力学あるいは希薄気体力学と呼ぶ。なお、常圧気体でも、考える系がマイクロスケールの微小系であれば、低圧気体と同じ状況が起こるため、やはり分子気体力学を用いなければならない。

分子気体力学の基礎方程式は、ボルツマン方程式と呼ばれる複雑な非線形微積分方程式で、従属変数（未知関数）は気体分子の速度分布関数である<sup>1,2,3)</sup>。低圧気体やマイクロスケールにおける気体の振舞を知るには、この方程式をしかるべき初期条件と境界条件のもとで解かなければならない。実際問題では、ほとんどの場合何らかの数値解析が必要である。

### 2. 低圧気流の数値シミュレーション

低圧気流の数値シミュレーション法、換言すればボルツマン方程式の数値解法、として最も普及しているのは DSMC (Direct Simulation Monte Carlo) 法と呼ばれる方法で、1963年に G. A. Bird によって提案され、その後 Bird 自身と他の多くの研究者によって改良、拡張されてきた<sup>4)</sup>。これは、現実の気体分子をはるかに少ない数の擬似粒子で代表させ、擬似粒子の無衝突運動と擬似粒子同士の衝突による速度変化を時間ステップごとに繰り返すもので、衝突過程を確率的に処理することから、粒子的・確率的方法である。これは、手順が簡単で適応性が高く、数値的にも安定で優れた方法である。また、その解がボルツマン方程式の解に収束することも数学的に証明されている<sup>5)</sup>。ただし、用いる擬似粒子数が限られる実際の計算では、常に統計的ノイズを伴うという弱点をもっている。たとえば、マッハ数が 0.01 といった遅い流れでは、巨視的な流れの場がノイズに埋没するため、計算が非常に難しくなる。

この統計的ノイズを避け、流れの構造の詳細を捉えたい場合には、差分法、有限体積法などの決定論的解法が用いられ、スペクトル法、高速フーリエ変換、不連続ガラキン法などが組み合わせて用いられる。しかし、ボルツマン方程式の場合、通常の流体力学における独立変数（時間変数と空間変数）に加えて、気体分子の速度も独立変数である。また、その衝突積分項（非線形かつ 5 重積分を含む項で、気体分子どうしの 2 体衝突の効果を表わす）は非常に複雑な形をしてい

\* 京都大学  
Kyoto University

る。このため、その決定論的数値解析は非常に困難で、2次元、3次元の流れをある程度の精度で解析するのはまだまだ難しい。

そのため、決定論的解法による実際の数値解析には、BGKモデルと呼ばれる衝突積分項を単純化したモデルがよく用いられる。これは、半世紀以上も前の1954年にBhatnagar, Gross, Krookの3人<sup>6)</sup>とWelander<sup>7)</sup>が独立に提案したもので(BGKは前3著者名の頭文字をとったもの)、ボルツマン方程式の大事な基本的性質を満たすように作られている。また最近では、この発展型ともいべきES(Ellipsoidal Statistical)モデル<sup>8)</sup>も頻繁に用いられている。

BGKモデル方程式の数値解析は、1960年代から現在にいたるまで、盛んに行われてきた。定性的にはボルツマン方程式の結果をよく再現し、ボルツマン方程式では計算が難しい流れの微細構造も記述できるため、かなりの単純化の割には(ただし複雑な非線形微積分方程式であることに変わりはない)優れたモデルである。過去には膨大な数の論文があるが、ここでは筆者の所属してきた研究グループの論文をいくつか引用するにとどめる:(i)平面境界問題:文献<sup>9,10)</sup>, (ii)球状・円柱状物体の外部流:文献<sup>11,12)</sup>, (iii)特異境界問題:文献<sup>13,14)</sup>。とくに(ii), (iii)の文献は、気体分子の速度分布関数(ボルツマン方程式あるいはBGKモデルにおける未知関数)が気体領域中で不連続になることに注意し、不連続の伝播と減衰を正確に記述したもので、以下に示す結果とも関連が深い。流れの精確な記述には、この不連続の記述が不可欠であるが、それを考慮した数値解法は他には見当たらない。

### 3. 数値シミュレーションの例

流れの数値シミュレーションというときには、複雑な形状の系を扱う応用研究をイメージしがちである。しかし、単純化された基礎的現象の理解や、数学的証明の補完など、基礎研究においても大きな力を発揮する。本節では、筆者らの最近の研究から、このような基礎的問題のシミュレーションの例を紹介する。

なお、低圧気体を議論する際に、クヌーセン数と呼ばれる気体の希薄度を表すパラメータ(以下ではKnと記す)がしばしば現れる。これは、気体分子の平均自由行程(気体分子が衝突と衝突の間に進む距離の平均値)<sup>1,2,3)</sup>と系の代表的長さの比で定義され、Knがほとんどゼロとみなせるのが局所熱平衡にある通常の気体で、Knが大きいほど気体はより低圧(あるいは希薄)

である。

#### 3.1 ラジオメータ流れ<sup>15)</sup>

ラジオメータ(正確にはクルックスのラジオメータ)は、密閉された透明なガラス球の中に、針で支えられた自由に回転できる羽根車(通常は4枚羽根)が水平に設置された装置で、光(輻射)を当てると羽根車が回転する。これには仕掛けが二つある:一つはガラス球内が低圧に保たれていること、もう一つは羽根の片面が黒く塗装されていること(他の面は金属のまま)である。いうまでもなく、光が当たると羽根の黒い面の温度が他の面よりも高くなり、面の間に温度差が生じる。この温度差と気体が低圧であること(希薄化効果)によって、容器内には気体の流れが生じ、羽根には力が働く。このため、羽根車は(黒い面が後方になる向きに)回転する。これは、19世紀後半に発明された装置であり、そのメカニズムについては物議を醸してきたが、現在では教育用実験装置、アクセサリとして市販されている。詳しくは最近のレビュー論文<sup>16)</sup>を参照されたい。

この現象について、温度差によって起こる気体の流れと羽根に働く力を理解するため、次のような単純化された問題を考える。図1に示すように、一様温度 $T_0$ に保たれた一辺 $L$ の正方形2次元容器内に低圧気体が入っており、その中央部に幅 $D$ で厚さが無視できる2次元平板が固定されている。座標軸は図のようにとる。平板の左面は容器壁と同じ温度 $T_0$ に、右面は異なる一様温度 $T_1(T_1 > T_0)$ に保たれている。このときに生じる気体の定常な流れと平板に働く力について調べる。ただし、容器壁と平板面では、気体分子は慣用の拡散反射条件に従うとする(反射分子の速度は境界の温度と速度に基づく平衡分布に従って分布しており、さらに境界を横切る正味の質量流量はゼロであるという条件;文献<sup>1,2,3)</sup>参照)。

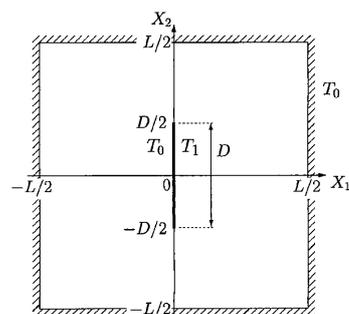


図1 正方形容器内の低圧気体中におかれた片側が加熱された平板<sup>15)</sup>

以下、上述のBGKモデルを用いた数値シミュレーションの結果<sup>15)</sup>を紹介する。本問題の難しさは、平板に先端があることと平板の温度がそこで不連続であることから、気体分子の速度分布関数が先端まわりの気体中で不連続になることである（どちらか一方の原因でも不連続は発生する）。ここでは、通常の差分法と特性曲線法を組み合わせた方法により、不連続の挙動を正確に捉えている。これによって初めて、巨視量の先端における特異性とその付近での急激な変化を正しく記述することができる。紙数の都合上、不連続を含む速度分布関数の挙動は省略し、巨視量の振舞いのみを示す。

$L/D = 4, T_1/T_0 = 2$  のとき（平板の右面が容器壁の2倍の温度に加熱されている）、平板の上部先端付近に生じる流れ（ラジオメータ流）の様子をいくつかのクヌーゼン数  $\text{Kn} = l_0/D$  に対して図2に示す。ここに  $l_0$  は、温度  $T_0$ 、密度  $\rho_{av}$ （平均密度）で静止平衡状態にある気体分子の平均自由行程で、図中の平板は上部先端から  $D/10$  の部分である。図の (a) は  $\text{Kn} = 5$ 、(b) は  $\text{Kn} = 0.5$ 、(c) は  $\text{Kn} = 0.05$ 、(d) は  $\text{Kn} = 0.01$  に対する結果で、順に希薄度が低くなっている。矢印は  $X_1, X_2$  平面での流速ベクトル  $(v_1, v_2)$  を  $(2RT_0)^{1/2}$  ( $R$  は単位質量あたりの気体定数) で無次元化したもので、そのスケールは各図に示してある。平板上の流速が見やすいように、 $X_1 > 0$  と  $X_1 < 0$  の領域を少し離して表示してある。クヌーゼン数の減少とともに、流れの領域が先端付近

に局在化していくことがわかる。また、結果は省略するが、密度、流速、温度といった巨視的物理量は、先端で特異性を示す。たとえば等温線は先端に集中し、そこでの温度の値は一意的にはきまらない。

この流れによって、平板全体には  $X_1$  方向に力  $F$  が働く（ラジオメータ力）。それを  $\text{Kn}$  の関数として示したのが図3(a)で、 $F$  が負であることから、力は左向きである。通常の流体力学の極限 ( $\text{Kn} \rightarrow 0$ ) では、流れも力も消滅する。したがって、これは低圧気体特有の現象である。いま、平板上の点  $(0, X_2)$  において、 $X_1$  方向に働く単位面積当たりの力を  $F_s(X_2)$  とすると、 $F_s$  の平板に沿っての分布は図3(b)のようになる。 $X_2 = 0$  が平板中央、 $X_2/D = 0.5$  が上部先端であり、 $F_s$  は  $X_2 = 0$  に関して対称である。気体が非常に低圧の場合 ( $\text{Kn} \gg 1$ )、力は平板全体にほぼ一様に分布するが、 $\text{Kn}$  が小さくなるにつれて先端部の力が中央部より大きくなり、 $\text{Kn} = 0.01$  では先端に近い部分にのみ力が働いている。実際のラジオメータの場合、 $\text{Kn}$  は 0.001 から 0.1 程度と考えられるので、先端の役割が大きいといえる。

### 3.2 ラジオメータ流れ(続き)<sup>17)</sup>

上のモデルでは、平板が固定されていて、その周りの流れとそれに働く力を調べたが、ラジオメータの羽根車のように、この力によって平板が定常運動をしている場合の一つの単純化されたモデルとして、次の問題が考えられる。低圧気体を含む無限に長い幅  $L$  の 2

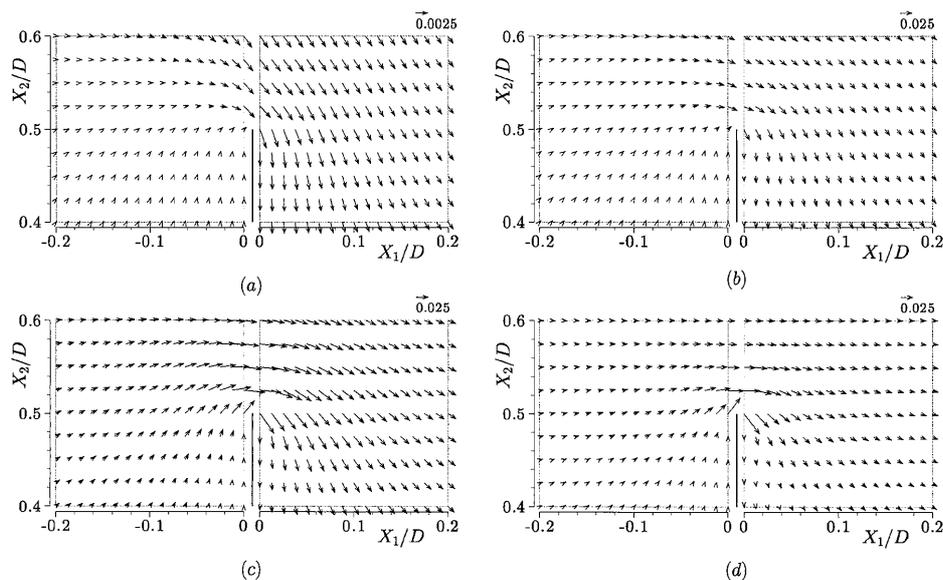


図2 平板先端付近の流れ ( $L/D = 4, T_1/T_0 = 2$ )<sup>15)</sup>.  
(a)  $\text{Kn} = 5$ , (b)  $\text{Kn} = 0.5$ , (c)  $\text{Kn} = 0.05$ , (d)  $\text{Kn} = 0.01$

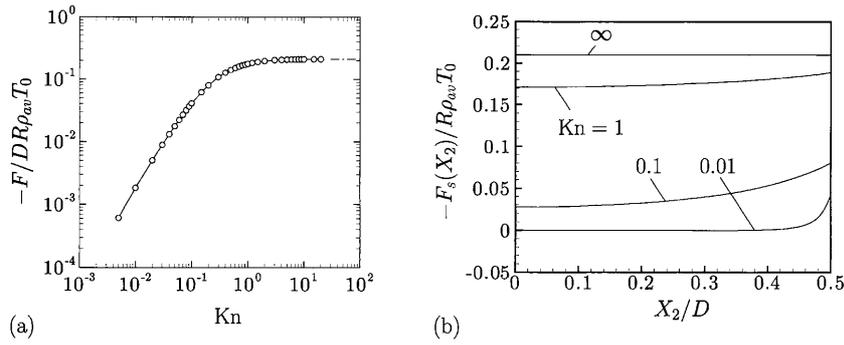


図3 平板に働く力 ( $L/D=4$ ,  $T_1/T_0=2$ )<sup>15)</sup>  
 (a) 平板全体に働く力, (b) 平板上の力の分布

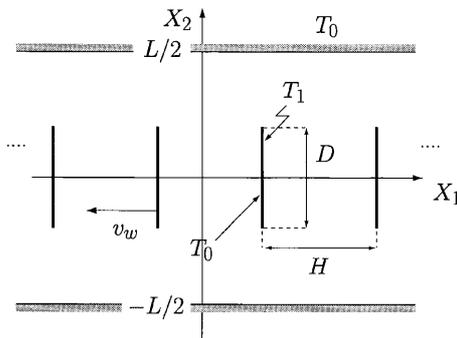


図4 ラジオメータ力によって流路内を移動する平板列<sup>17)</sup>

次元流路を考え、図4のように $X_1$ 軸を流路に平行に、 $X_2$ 軸を流路壁に垂直にとる。流路の中には、図のように $X_1$ 軸に沿って等間隔 $H$ で並んだ無限個の厚みのない幅 $D$ の平板列が $X_1$ 軸に垂直に置かれており、平板列は $X_1$ 軸に沿って自由に動ける。各平板の左側の面と流路壁は同じ温度 $T_0$ に保たれているが、右側の面は温度 $T_1 (> T_0)$ に加熱されているとする。このとき、各平板には、前節でみたように低温面に向かうラジオメータ力が働き、平板列は負の $X_1$ 軸方向に動く。最終的に平板列は各平板に働くラジオメータ力と気体中を動くことによる抗力が釣り合った状態で、一定の速度で動く。このときの平板まわりの気体の振舞いと平板列の移動速度を求める。なお、平板面と流路壁では、前節同様拡散反射条件を仮定する。

いま、定常状態で平板列が負の $X_1$ 方向に速さ $v_w (> 0)$ で動いているとする(図4)。これを平板に固定した座標系から見ると、流路壁が正の $X_1$ 軸方向に速さ $v_w$ で動いていることになる。この座標系で(すなわち平板を固定したままで) $v_w$ を変化させると、それに応じて平板に働く抗力が変化する。平板に働く抗力と温度差によるラジオメータ力がちょうど釣り合って平板

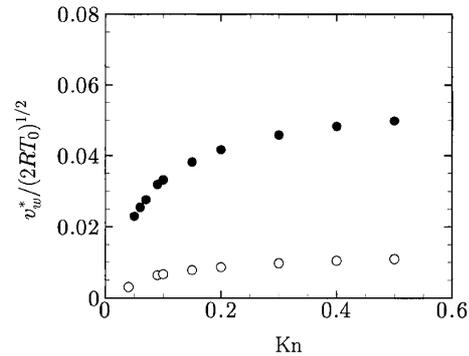


図5 平板列の移動速度 ( $L/D=H/D=4$ )<sup>17)</sup>  
 ●:  $T_1/T_0=2$ , ○:  $T_1/T_0=1.2$

に力が働かないときの $v_w$ を $v_w^*$ とすると、これがもとの座標系における平板の移動速度である。平板に固定した座標系では、問題が定常であり、しかも平板を一つ含む高さ $L$ 、幅 $H$ の矩形領域に対して $X_1$ 方向に周期的であるため、前節の問題とほとんど同じように、有限領域で計算が行える。前節のBGKモデルではなく、ESモデルを用いて求めた平板列の移動速度 $v_w^*$ を、 $L/D=H/D=4$ 、 $T_1/T_0=2$ および1.2の場合に対して、図5に示す。 $(2RT_0)^{1/2}$ が音速程度の量であることを考えると、 $T_1/T_0=1.2$ の場合でも、平板列は $Kn=0.1$ で音速の0.5%程度の速さで動くことが分かる。なお、図5には、文献<sup>17)</sup>以降の計算結果が多数含まれている。

### 3.3 移動境界問題の一例：振動平板による流れ<sup>18)</sup>

数値流体力学 (Computational Fluid Dynamics: CFD) では、移動境界を伴う流れのシミュレーションが盛んに行われ、様々な方法が開発されている。しかし、低圧気体に対しては、ボルツマン型方程式(本来のボルツマン方程式とそのモデル方程式)と境界条件の複雑さのため、移動境界問題はほとんど取り扱われてこなかった。ごく最近になって、MEMS (micro electro mechanical systems) におけるマイクロ梁の振動と減衰、

それによる波動伝播などに関連して研究が盛んになり、現在では分子気体力学のホットトピックとなっている。

ボルツマン型方程式の移動境界問題の理論的難しさは、境界がその法線方向に加速・減速を行うと、これによってその解（速度分布関数）に新たな特異性（主なものは不連続）が生じることである。しかし、この点は他のシミュレーション研究において全く考慮されていない。第2節の終わりで触れたように、定常問題で境界が静止している場合でも、それが気体側に凸であれば<sup>11,12,13</sup>、あるいは境界条件に不連続があれば（たとえば境界の温度がそれに沿って不連続的に変化する場合<sup>14</sup>）、気体分子の速度分布関数は、気体中で不連続になる<sup>19</sup>（文献<sup>1,2,3</sup>参照）。一方、境界が平面で境界条件に特異性がないと、気体中の速度分布関数に不連続は生じない。これに対して、境界がそれに垂直方向に加速・減速を行う非定常問題では、たとえ境界が平面で境界条件に特異性がなくても、気体中で速度分布関数が不連続となる<sup>20</sup>。ここでは、この点に焦点を絞って単純化した問題の一例について述べる。

互いに平行でともに温度  $T_0$  に保たれた2枚の無限に広い平板の間の気体を考える。気体は密度  $\rho_0$ 、温度  $T_0$  の静止平衡状態にあり、一方の平板は  $X_1 = a (> 0)$  に、他方の平板は  $X_1 = d$  にあるとする。図6に示すように、時刻  $t = 0$  に  $X_1 = a$  の平板が突然  $X_1 = X_w(t)$ 、 $X_w(t) = a \cos \omega t$  に従って  $X_1 = 0$  のまわりに振幅  $a$ 、角振動数  $\omega$  で振動を始めた。その後の気体の非定常運動を数値的に調べる。気体が低圧であったり平板の間隔が微小であると、気体分子の平均自由行程が平板の間隔と同程度になる。また、平板の振動数が非常に高いと、それが気体分子の平均衝突頻度（気体分子が単位時間当たりどのくらい他の分子と衝突するかの平均値）と同程度になる。このような場合には、分子気体力学による解析が必要になり、実際にそのような数値解析を行う。基礎方程式として、再びBGKモデルを用い、両

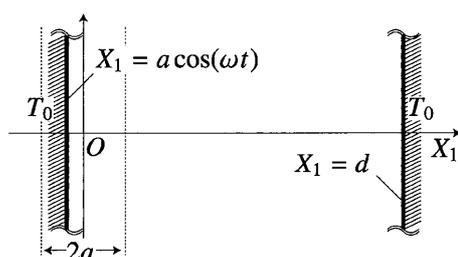


図6 振動平板と静止平板の間の低圧気体<sup>18</sup>

平板における境界条件としてはやはり拡散反射条件を仮定する。用いる数値解法は一種の特性曲線法で、上述の不連続を正確に記述できるよう構築したものである<sup>20</sup>。

本節では、速度分布関数の振舞いを示すため、まずそれを定義しておく。空間の位置ベクトルを  $X_i$ 、分子速度を  $\xi_i$  とすると、気体分子の速度分布関数  $f(t, X_i, \xi_i)$  は、一般に時刻  $t$  および  $X_i$  と  $\xi_i$  の関数である。いま、 $X_i$  空間の点  $X_i$  まわりの微小体積  $dX = dX_1 dX_2 dX_3$  および  $\xi_i$  空間の点  $\xi_i$  まわりの微小体積  $d\xi = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$  をとると、位置が  $dX$  に含まれ、速度が  $d\xi$  に含まれる気体分子の質量は、 $f$  によって  $f(t, X_i, \xi_i) dX d\xi$  と表される。すなわち、 $f$  は6次元相空間  $(X_i, \xi_i)$  における気体の質量密度である。上の問題は空間的に1次元の問題であるため、 $f$  は  $X_2, X_3$  によらず、 $f(t, X_1, \xi_1)$  である。

本問題は、次の三つの無次元パラメータ、 $K, M, \hat{d}$  によって特徴づけられる：

$$K = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{Kn} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{l_0 \omega}{(2RT_0)^{1/2}},$$

$$M = \sqrt{\frac{5}{6}} \text{Ma} = \sqrt{\frac{5}{6}} \frac{a\omega}{(5RT_0/3)^{1/2}},$$

$$\hat{d} = \frac{d\omega}{(2RT_0)^{1/2}}.$$

$\text{Kn}, \text{Ma}$  はそれぞれ、本問題に即して定義されたクヌーセン数とマッハ数であり、 $l_0$  は初期平衡状態における気体分子の平均自由行程である。 $K = 10, M = 1, \hat{d} = 2\sqrt{5/6}\pi = 5.735 \dots$  に対して、点  $x_1 = 2.5$  における速度分布関数の初期時刻、1周期目、2周期目、 $\dots$ 、5周期目までの時間変化の様子を図7に示す。ここに、 $\hat{t} = \omega t$  は無次元時刻、 $x_i = \omega(2RT_0)^{-1/2} X_i$  は無次元位置ベクトル [ $x_i$  の範囲は  $x_w(\hat{t}) \leq x_1 \leq \hat{d}$ 、ここに  $x_w(\hat{t}) = \omega(2RT_0)^{-1/2} X_w(t)$ ]、 $\zeta_i = (2RT_0)^{-1/2} \xi_i$  は無次元気体分子速度、 $g$  は無次元の周辺速度分布関数で、 $g(\hat{t}, x_i, \zeta_i) = (2RT_0)^{1/2} \rho_0^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, X_i, \xi_i) d\xi_2 d\xi_3$  で定義される。図7

は、希薄度がかなり高く、平板の振幅も速さもかなり大きい場合である。振動平板から次々と送り出される不連続によって、速度分布関数は非常に複雑な形を呈している（少し見にくいだが、不連続は破線で示してある）。結果は省略するが、 $K$  が減少するにつれて、分子どうしの衝突の効果によって不連続が早く減衰するため、速度分布関数はよりなめらかな形になる。

次に、巨視量の挙動を示す。気体の密度を  $\rho$ 、流速の  $X_1$  成分を  $v_1$ 、温度を  $T$  とすると、これらはすべて速度分布関数のモーメント（速度分布関数に分子速度

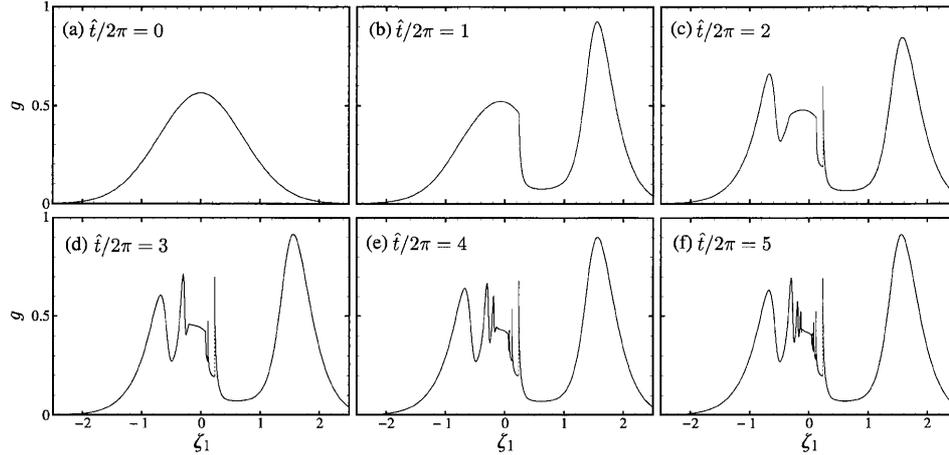


図7  $x_1 = 2.5$ における周辺速度分布関数  $g$  の形 ( $K = 10$ ,  $M = 1$ ,  $\hat{d} = 2\sqrt{5/6}\pi = 5.735\dots$ )<sup>18)</sup>.  
 気体領域が  $x_w(t) \leq x_1 \leq \hat{d}$  であることに注意.  
 (a)  $\hat{t}/2\pi = 0$ , (b)  $\hat{t}/2\pi = 1$ , (c)  $\hat{t}/2\pi = 2$ , (d)  $\hat{t}/2\pi = 3$ , (e)  $\hat{t}/2\pi = 4$ , (f)  $\hat{t}/2\pi = 5$

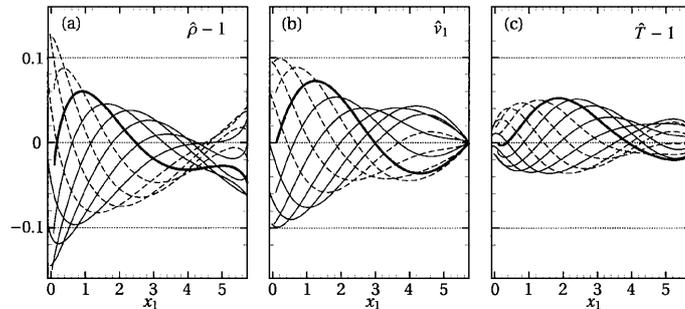


図8 巨視量のプロフィール ( $K = 1$ ,  $M = 0.1$ ,  $\hat{d} = 2\sqrt{5/6}\pi$ )<sup>18)</sup>.  
 (a)  $\hat{\rho}$ , (b)  $\hat{v}_1$ , (c)  $\hat{T}$ .  
 $\hat{t}/2\pi = 19.1, \dots, 19.5$  は実線で,  $\hat{t}/2\pi = 19.6, \dots, 19.9$  は破線で,  
 $\hat{t}/2\pi = 20$  は太い実線で示す

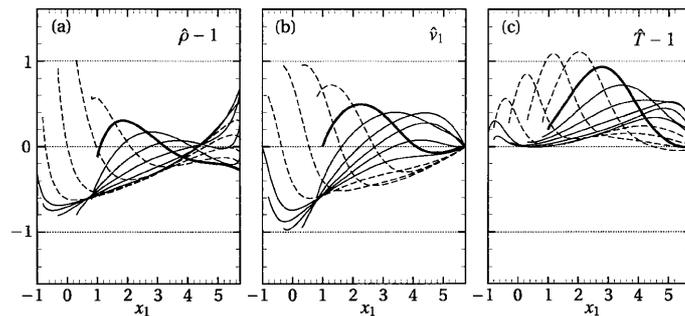


図9 巨視量のプロフィール ( $K = 1$ ,  $M = 1$ ,  $\hat{d} = 2\sqrt{5/6}\pi$ )<sup>18)</sup>.  
 (a)  $\hat{\rho}$ , (b)  $\hat{v}_1$ , (c)  $\hat{T}$ . 図8の説明参照

$\xi_i$  の多項式をかけて,  $\xi_i$  の全空間にわたって積分した  
 もの)として求められる.  $K = 1$ ,  $\hat{d} = 2\sqrt{5/6}\pi$  対し  
 て, ほぼ定常振動の状態に達したと思われる初期時刻  
 から 19 周期目 ( $19 < \hat{t}/2\pi \leq 20$ ) の 10 の時刻 ( $\hat{t}/2\pi =$   
 $19.1, 19.2, \dots, 19.9, 20$ ) における無次元密度  $\hat{\rho} = \rho/\rho_0$ ,

無次元流速  $\hat{v}_1 = v_1/(2RT_0)^{1/2}$ , 無次元温度  $\hat{T} = T/T_0$  の振  
 る舞いを, 図8 ( $M = 0.1$ ) および図9 ( $M = 1$ ) に示す.  
 プロフィールは,  $\hat{t}/2\pi = 19.1, \dots, 19.5$  は実線で,  $\hat{t}/2\pi =$   
 $19.6, \dots, 19.9$  は破線で,  $\hat{t}/2\pi = 20$  は太い実線で示して  
 ある. 図8は振動平板の振幅と速度が比較的小さい場

合, 図9はそれらがともに大きい場合で, 気体の希薄度は中程度( $K=1$ )である.  $\hat{d}=2\sqrt{5/6}\pi$ は, 音波伝播の古典理論における一波長に対応している. したがって, 図8の流速 $\hat{v}_1$ は正弦振動から大きくずれてはいないが, 静止壁に近い側の振幅は振動壁に近い側の振幅に比べて小さくなっている. この傾向は, 図9でより顕著である. 振動が激しい図9では, 気体全域において気体が加熱されている.

#### 4. おわりに

本稿では, 低圧気体やマイクロスケールにおける気体の流れの数値シミュレーションを取り上げた. 基礎となるのは分子気体力学で, ボルツマン型の運動論的方程式を用いた数値シミュレーションである. 実際的な応用を目指す複雑系のシミュレーションではなく, 実現象からその本質を取り出してモデル化した基礎的問題のシミュレーションに焦点を合わせ, とくに方程式の解に含まれる特異性の正確な記述を目指した筆者らの最近の研究の一部を紹介した. 理論的・数学的研究のきっかけとなれば, また, 応用を目指すシミュレーションに解の振舞いについての基礎的情報を提供することができれば, 大きな幸である.

#### 参 考 文 献

- 1) 曾根良夫, 青木一生: 分子気体力学, 朝倉書店(1994); 正誤表等 <http://hdl.handle.net/2433/84799>
- 2) Y. Sone: Kinetic Theory and Fluid Dynamics, Birkhäuser (2002); Supplement <http://hdl.handle.net/2433/66099>
- 3) Y. Sone: Molecular Gas Dynamics: Theory, Techniques, and Applications, Birkhäuser (2007); Supplement <http://hdl.handle.net/2433/66098>
- 4) G. A. Bird: Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows, Oxford Univ. Press (1994)
- 5) W. Wagner: A Convergence Proof for Bird's Direct Simulation Monte Carlo Method for the Boltzmann Equation, J. Stat. Phys., **66**-3/4, 1011/1044 (1992)
- 6) P. L. Bhatnagar, E. P. Gross, and M. Krook: A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems, Phys. Rev., **94**, 511/525 (1954)
- 7) P. Welander: On the Temperature Jump in a Rarefied Gas, Ark. Fys., **7**, 507/553 (1954)
- 8) L. H. Holway, Jr.: New Statistical Models for Kinetic Theory: Methods of Construction, Phys. Fluids, **9**-9, 1658/1673 (1966)
- 9) Y. Sone and H. Sugimoto: Strong Evaporation from a Plane Condensed Phase, Adiabatic Waves in Liquid-Vapor Systems, G. E. A. Meier and P. A. Thompson (eds.), Springer, 293/304 (1990)
- 10) K. Aoki, Y. Sone, and T. Yamada: Numerical Analysis of Gas Flows Condensing on Its Plane Condensed Phase on the Basis of Kinetic Theory, Phys. Fluids A, **2**-10, 1867/1878 (1990)
- 11) H. Sugimoto and Y. Sone: Numerical Analysis of Steady Flows of a Gas Evaporating from Its Cylindrical Condensed Phase on the Basis of Kinetic Theory, Phys. Fluids A, **4**-2, 419/440 (1992)
- 12) Y. Sone and H. Sugimoto: Kinetic Theory Analysis of Steady Evaporating Flows from a Spherical Condensed Phase into a Vacuum, Phys. Fluids A, **5**-6, 1491/1511 (1993)
- 13) K. Aoki, K. Kanba and S. Takata: Numerical Analysis of a Supersonic Rarefied Gas Flow past a Flat Plate, Phys. Fluids, **9**-4, 1144/1161 (1997)
- 14) K. Aoki, S. Takata, H. Aikawa, and F. Golse: A Rarefied Gas Flow Caused by a Discontinuous Wall Temperature, Phys. Fluids, **13**-9, 2645/2661 (2001)
- 15) S. Taguchi and K. Aoki: Rarefied Gas Flow around a Sharp Edge Induced by a Temperature Field, J. Fluid Mech., **694**, 191/224 (2012)
- 16) A. Ketsdever, N. Gimelshein, S. Gimelshein, and N. Selden: Radiometric Phenomena: From the 19th to the 21st Century, Vacuum, **86**, 1644/1662 (2012)
- 17) S. Taguchi and K. Aoki: A Simple Model for Flows around Moving Vanes in Crookes Radiometer, 28th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics 2012: AIP Conf. Proc. 1501, M. Mareschal and A. Santos (eds.), AIP, 786/793 (2012)
- 18) T. Tsuji and K. Aoki: Gas Motion in a Micro Gap between a Stationary Plate and a Plate Oscillating in Its Normal Direction, Microfluidics and Nanofluidics (掲載予定)
- 19) Y. Sone and S. Takata: Discontinuity of the Velocity Distribution Function in a Rarefied Gas around a Convex Body and the S Layer at the Bottom of the Knudsen Layer, Transp. Theory Stat. Phys., **21**-4/6, 501/530 (1992)
- 20) T. Tsuji and K. Aoki: Moving Boundary Problems for a Rarefied Gas: Spatially One-Dimensional Case, J. Comp. Phys., **250**, 574/600 (2013)