

講座

電気・機械一体モデルの開発と応用

第4報 物理機能線図の応用例

角田 鎮男*・長松 昌男**・長松 昭男*

Development and Application of Unified Model of Electric and Mechanical System

4th Report Application Examples of Physical Function Diagram

Shizuo Sumida*, Masao Nagamatsu** and Akio Nagamatsu*

Key words: Physical Function Diagram, Modeling, Direct Current Motor, Electromechanical System, Nonlinear Property

1. まえがき

各種メーカーでは、厳しい経済情勢下での地球規模の熾烈な生存競争を生き抜くため、製品開発の期間短縮とコスト低減への必死の努力の中で、開発初端に製品の実働シミュレーションを実行し、諸々の機能・性能を予測しながら製品開発を行うモデルベース開発(MBD)の導入が不可避になっている。MBDには製品モデルが不可欠であり、力学・電気・熱・流体・化学などの異なる物理領域間を自在に横断するエネルギー変換によって使命を果たす実機製品のモデル化には、複合物理領域を統合できる理論と手法が必要になる。筆者らは、その中で実用上特に重要かつ緊急性を要する電気・機械一体モデルの開発と応用について研究しており¹⁻⁶⁾、本シリーズ講座でその概要を紹介する⁷⁻⁹⁾。

本講座の第1報⁷⁾では、電気・機械一体モデルの基礎理論を、物理学の立場から論じた。まず、共にエネルギー現象を扱うにもかかわらず別の物理分野とされ相互関係が不明であった力学と電磁気学間の理論的整合を可能にするために、電磁気学に存在し力学に欠け

ている法則の対称性と事象の閉じた因果関係を力学に導入すべく、力学の改革を行った。次に、これら両物理領域の状態量である力・速度と電流・電圧間の正しい相似則を示し、その正当性に物理学的根拠を与えた。これらの内容は参考文献6に詳細に記されている。

第2報⁸⁾では、力学と電磁気学間の相似関係を広範囲かつ詳細に論じた。まず、前報で物理学的根拠を与えた状態量の相似則から出発し、特性・法則・エネルギーなどの、電気と機械の両分野を構成する事象と物理量の全体にわたり成立する新しい相似則を提示した。次に、機械と電気の1自由度系モデルを用いて、提示した両系間の相似則の正当性を例示した。

第3報⁹⁾では、企業の製品開発へのMBD導入に対する考え方を、モデル化を中心に論じ、合せて筆者らが提案し実用している新しいモデル化手法の基本概念を紹介した。まず、各種企業の製品開発で重要性を増しているシミュレーション技術の動向を述べた。次に、企業現場にMBDを導入する際に留意すべき要点を記した。続いて、MBDにおける実機挙動のシミュレーションに用いる製品モデルへの要求事項を列挙し、それに対する有限要素法などの在来モデル化手法の限界を記した。さらに、この限界を補うために筆者らが開発し企業現場で実用している新しいモデル化手法である物理機能線図を紹介した。そして、機械系と電気系の1自由度系をモデル化して両者を対比することに

* キャテック株式会社
CATEC Inc.

** 北海道工業大学
Hokkaido Institute of Technology

よって、物理機能線図の有効性を例証した。

これらに続いて本第4報では、物理機能線図の2種類の応用例を紹介する。第1の例は、ばね・粘性・質量からなる支持系で剛体はりの両端を支持した柔軟支持はりである。これにより、系を簡単な部分構造に分解し、各々を物理機能線図でモデル化した後に、それらを結合して系全体のモデルを得る方法を説明する。第2の例は、直流モータ系である。まず、モータの基本機能について説明する。そして、モータを線形系と見なし定常特性を重視した簡略モデルと、過渡特性と非線形性をも考慮した詳細モデルを作成する。また、詳細機能モデルに含まれる、周辺温度と自己発熱に依存する巻線抵抗値の変化、ブラシ摺動による電圧降下および軸受の摩擦トルクの3種類の非線形性をモデル上で表現する方法を紹介する。続いて、電源系を構成する電源と操作系をモデル化する。操作系のモデルとしては、機械式接点スイッチと電子スイッチ2種類の物理機能線図を示す。さらに、電池、操作系およびモータを結合することにより、モータ系全体の物理機能線図を求める。

2. 物理機能線図の概要

物理機能線図については本講座の第3報⁹⁾で紹介したので、ここではその概要を述べる。図1に示すように物理機能線図は、線形を基本とする機能モデルを中核に構成される。機能モデルは、機械や電気など個別の物理領域を横断する基準化された手法で統一的に表現され、また異なる物理領域間のモデルの結合を可能にするために、入出力が個別領域を超えた共通量である瞬時エネルギーになるように標準化されている。

機能モデルには、その中の随所に局在する各物理領

域固有の理論とメカニズムの詳細、および現場の設計・開発に不可欠な性能線図・図表・統計式・実験式・近似式・各種データなどからなる機構モデルを付随できる。機構モデルは、基本的には非線形であり、これにより実機に存在する種々雑多な非線形性をモデルに導入し再現することを可能にしている³⁾。機構モデルは、モデルの他の部分に影響を与えないように、入子式で機能モデルに挿入される。

物理機能線図は、対象の機能、すなわち特性の働き・それに伴う状態量の推移・エネルギー流れなどが視覚的に理解できるように、特有の記号を組み合わせで作られている。その主なものを表1に示す。

表2に、機械と電気の特性を、表1の記号を用いて表示する。後述図3左の構造モデルでは質量が黒丸、ばねがギザギザ、粘性が閉じた水鉄砲で記され、また後述図7の電気回路ではインダクタンスが渦巻き、抵抗がギザギザで記されているだけであり、これらの図を見ても特性の機能(働き)が全く表現されていない。これでは専門外の人はモデルの意味が理解できないし、これらの在来モデル化手法をそのまま用いて電気・機械一体モデルを作成することは不可能である。これに対して表2では、特性が右の数式表示で表現される支配法則に従って機能し状態量の変換・流動を生じる様相をそのまま素直に表現しており、前報^{7,9)}で説明した特性の機能が視覚で容易に理解できる。また、電気と機械の物理領域を越えて共通のモデル表現がなされており、筆者らの物理機能線図を用いれば電気・機械一体モデル化が可能であることが分る。

3. 柔軟支持はり

図2は、質量を挟んだ2連の並列ばね・粘性からなる2個の柔軟系で両端を支持されたはりの構造モデルである²⁾。この系を左支持部、右支持部、剛体はりの3部分に分け、さらに左右両支持部をそれぞれ上部と下部に分けて、物理機能線図でモデル化する。図3は、上部と下部に分けた左支持部であり、左側は構造モデル、右側は物理機能線図を示す。ここで、 D は粘性、 M は質量(下部に含める)であり、ばねは構造モデルでは剛性 K 、物理機能線図では弾性 H (剛性の逆数： $H = 1/K$)で表現されている。これは、力 f と位置(変位) y を基準にとり運動の法則 $f = M\ddot{y}$ とフックの法則 $f = Ky$ を用いる構造モデルでは剛性が便利であるのに対し、瞬時エネルギーに関して力 f の双対状態量である速度 $v = \dot{y}$ で運動を代表し、また力学法則に対称性を導入してたがいに対称・双対の関係にある運動

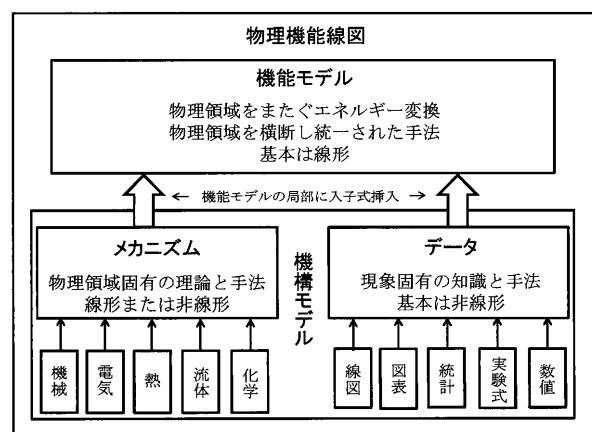


図1 物理機能線図の基本構成

表 1 物理機能線図に用いる主な記号

状態量	→ 内包量 (力 トルク 圧力 電流)	→ 外延量 (速度 角速度 流量 電圧)
特性	$A \rightarrow [G] \rightarrow B$ $B = GA$ G : 特性 (表2参照)	
演算記号	$A \rightarrow [C] \rightarrow B$ 和 $C = A + B$	$A \rightarrow [C] \rightarrow B$ 積 $C = A \times B$ 自乗 $B = A^2$
	$A \rightarrow [C] \rightarrow B$ 差 $C = B - A$	$A \rightarrow [C] \rightarrow B$ 除 $C = B / A$
	$A \rightarrow [C] \rightarrow B$ 等値分配 $A = B = C$	$A \rightarrow [C] \rightarrow B$ 絶対値 $B = A $
変換子	$A \rightarrow [Q] \rightarrow B$ $B = QA$, $D = QC$ エネルギー保存の法則から $AD = BC$	
	$A \rightarrow [Q] \rightarrow B$ $B = QA$, $D = QC$ エネルギー保存の法則から $AD = BC$	
スイッチ	$\varepsilon \rightarrow [Q] \rightarrow C$ 作動条件 $Q = Q(\varepsilon)$ $\varepsilon \rightarrow [Q] \rightarrow C$ 六角形は条件判定記号 if Q then $C = 1$ else $C = 0$	
その他	$A \rightarrow [Q] \rightarrow B$ $B = QA$, $D = QC$ エネルギー保存の法則から $AD = BC$	

表 2 エネルギーを保有する特性の機能表示

特性	物理機能線図	物理法則の数式表示
力学特性	$f \rightarrow [1/M] \rightarrow \dot{v}$	$f = M\dot{v}$, $v = \int \dot{v} dt$
	$\dot{v} \rightarrow [1/H] \rightarrow f$	$v = H\dot{f}$, $f = \int \dot{f} dt$
電気特性	$I \rightarrow [1/C] \rightarrow \dot{V}$	$I = C\dot{V}$, $V = \int \dot{V} dt$
	$\dot{V} \rightarrow [1/L] \rightarrow I$	$V = L\dot{I}$, $I = \int \dot{I} dt$

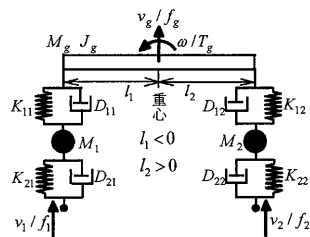


図 2 柔軟支持はりの構造モデル

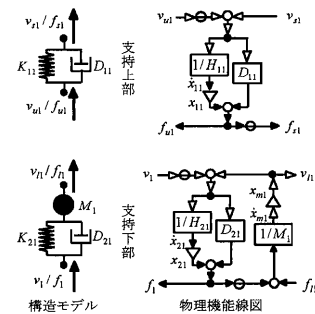


図 3 左支持部のモデル

の法則 $f = M\dot{v}$ と力の法則^{6,7)} $v = H\dot{f}$ (フックの法則 $y = Hf = f/K$ の時間微分形) を用いる物理機能線図では弾性が便利だからである。このように力学系のモデル化では、剛性と弾性の場合に応じて自在に使い分けることが望ましい。

図 3 の支持上部について説明する。ばね $H_{11}(= 1/K_{11})$ は、上端の速度 v_{s1} から下端の速度 v_{u1} を引いた両端間の速度差を作用速度として受けて、力の法則に従ってそれを力 (内力) 変動 $\dot{x}_{11} = (v_{s1} - v_{u1})/H_{11}$ に変換し、蓄

積 (時間積分) して内力 x_{11} を生じる。一方、同一の作用速度を受ける支持上部の粘性 D_{11} は、作用速度に比例する内力 $D_{11}(v_{s1} - v_{u1})$ を生じる。支持上部は、これら両内力の和 (物理機能線図中の白丸で和を表現) f_{u1} を下端から外部 (支持下部) に作用させ、同時にその反作用力である復元力 $f_{s1}(= -f_{u1})$ を上端から外部 (剛体はり) に作用させる。

一般に物理機能線図は、表 2 から分るように物理法則に従う対象の機能をモデル上に直接表現しているか

ら、簡単に数学モデル（支配方程式）に変換できる。図3の支持上部の場合には、上の白丸を数式表現すれば

$$H_{11}\dot{x}_{11} = v_{s1} - v_{u1} \quad (1)$$

また、下の白丸を数式表現すれば

$$-f_{s1} = f_{u1} = x_{11} + D_{11}(v_{s1} - v_{u1}) \quad (2)$$

式(1)と(2)が、図3に示した左支持上部の物理機能線図に対応する数学モデルである。

次に図3の支持下部について説明する。支持下部は、支持上部と同様なばね・粘性並列系の上端に質量 M_1 が接続されたものである。支持下部のばね $H_{21}(=1/K_{21})$ は、上端の速度（質量の速度） x_{m1} から下端の速度 v_1 を引いた速度差を作用速度として受け、内力変動 $\dot{x}_{21} = (x_{m1} - v_1)/H_{21}$ に変換し、蓄積して内力 x_{21} を生じる。一方同一の作用速度を受ける支持下部の粘性 D_{21} は、作用速度に比例する内力 $D_{21}(x_{m1} - v_1)$ を生じる。支持下部は、これら両内力の和 f_1 を下端から外部に作用させ、同時にその反作用力である復元力 $-f_1$ を上端から質量 M_1 に作用させる。質量 M_1 は、外部入力 f_{11} とばね・粘性並列系からの復元力の和 $f_{11} + (-f_1)$ を作用力として受け、それを加速度 $\dot{x}_{m1}$ に変換し、蓄積して速度 x_{m1} を生じる。この速度 x_{m1} がそのまま支持下部のばね・粘性並列系上端の速度になり、同時に速度 v_{11} として外部（支持上部の下端）に出力される。物理機能線図はこれらをそのまま表現しているから、図中の白丸を数式表現するだけで以下の数学モデルが得られる。

$$H_{21}\dot{x}_{21} = x_{m1} - v_1 \quad (3)$$

$$M_1\dot{x}_{m1} = f_{11} + (-f_1) \quad (4)$$

$$f_1 = x_{21} + D_{21}(x_{m1} - v_1) \quad (5)$$

$$v_{11} = x_{m1} \quad (6)$$

図3右側に示すように、一般に力学系の物理機能線図では、上半分が速度の推移、下半分が力の推移を表し、これらを上下につなぐ力学特性（ばね・粘性・質量）の機能が、力と速度間の相互変換を視覚で容易に理解できるように表現されている（表2参照）。

図3右側の物理機能線図は、支持上部の左端と支持下部の右端を接続するだけで簡単に結合でき、左支持部全体の物理機能線図が得られる。その際の接続条件は

$$v_{u1} = v_{11}, f_{11} = f_{u1} \quad (7)$$

またその数学モデルは、式(7)を用いて式(1)～(6)か

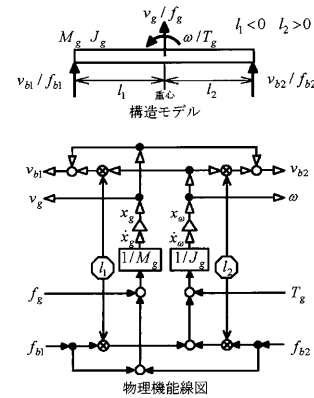


図4 剛体はりのモデル

ら v_{u1} と f_{11} を消去すれば、得られる。

右支持部の物理機能線図と数学モデルは、左支持部に関する上記図3と同じ手順によって得られる。

次に、はりのモデル化を行う。図4上部は、質量 M_g 、重心まわりの慣性モーメント J_g 、重心から左右支持点までの距離 l_1 と l_2 の剛体はり単体の構造モデルである。このはり、重心にはりの長さから垂直上方に外力 f_g 、重心まわりに外トルク T_g （反時計回りが正）を受け、また左右支持点に左右支持部からそれぞれ復元力 $f_{s1} = f_{b1}$ と $f_{s2} = f_{b2}$ を受け、重心の速度 v_g と重心まわりの角速度 ω を生じている。このときの左右支持部の速度は、それぞれ v_{b1} と v_{b2} である。ここで、力と並進運動は垂直上方を正、トルクと回転運動は反時計回りを正にとっているから、力×距離=トルクの関係を満たすように、重心から両端までの距離を $l_1 < 0$ 、 $l_2 > 0$ としている。

図4下部は、剛体はり単体の物理機能線図である。この図から数学モデルを求める。下部の左右それぞれ2個の白丸を合せて数式表示すれば

$$M_g\dot{x}_g = f_g + f_{b1} + f_{b2} \quad (8)$$

$$J_g\dot{x}_\omega = T_g + l_1 f_{b1} + l_2 f_{b2} \quad (9)$$

自明の関係より

$$v_g = x_g, \omega = x_\omega \quad (10)$$

上部左右の白丸より

$$v_{b1} = x_g + l_1 x_\omega, v_{b2} = x_g + l_2 x_\omega \quad (11)$$

次に、柔軟支持はり全体のモデル化を行う。物理機能線図による全体モデルは、図4下部に示すはりの物理機能線図の左端に図3上下部を統合した左支持部の物理機能線図、またその右端に図3と同様な方法で統

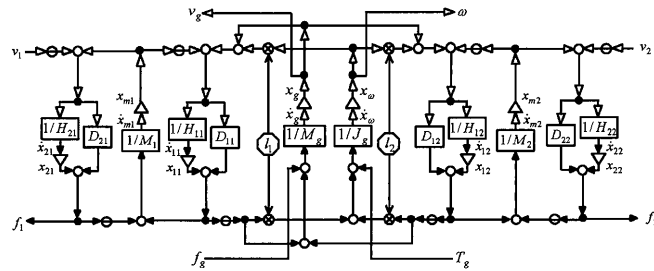


図5 物理機能線図による柔軟支持はりのモデル

合した右支持部の物理機能線図を接続するだけで、
図5のように求められる。その際の接続条件は

$$\left. \begin{aligned} v_{s1} &= v_{b1}, & v_{s2} &= v_{b2} \\ f_{b1} &= f_{s1}, & f_{b2} &= f_{s2} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

図5を記述する柔軟支持はり全体の数学モデルは、条件式(7)を用いて式(1)～(6)から得られた左支持部の数学モデルと、同じ手順で得られた右支持部の数学モデルと、式(8)～(11)から、接続条件式(12)を用いて v_{s1} , v_{s2} , f_{b1} , f_{b2} を消去すれば、得られる。

さて、一般に機械は数多くの部品や部分構造から構成され、それら各々の局部機能が渾然一体に融合されて全体の機能を実現している。前報⁹⁾で述べたように、モデルベース開発に用いる製品モデルには、この様相が実機に忠実に表現されている必要がある。すなわち製品モデルは、局部機能と全体機能の両者を同時に視覚的に理解できるように階層化され、同位レベルの部品群の機能展開・上位レベルへの機能統合・下位レベルへの機能分解が可能であることが要求される。物理機能線図はこれらの要求を満足している。

筆者らの一部が所属する企業では、この物理機能線図を使った実用システムを自作し商品化しており、これを用いて部品毎のモデルを作成すれば、数学モデルが自動生成され、また展開・統合・分解が自在にできるようにしている。したがって機械製品のモデル化では、それを部品または部分構造に分解して各々をモデル化して入力し結合条件を与えるだけで、そのまま製品全体の物理機能線図と数学モデルが得られる。学術講座である本報ではこれに関する説明は行わないが、代りに上記の柔軟支持はりの例によって物理機能線図とその展開・統合・分解の骨子を理解していただきたい。

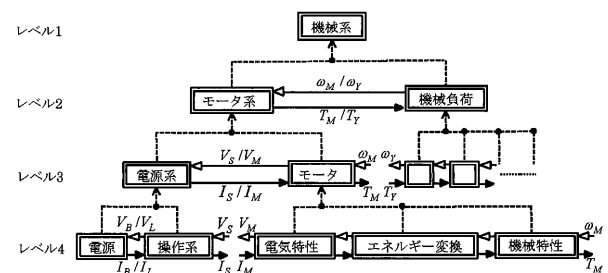


図6 モータを内蔵する機械系の機能構成

4. 直流モータ

4.1 モータの基本機能

電気・機械一体モデルの例として、汎用の簡単な直流モータ系を物理機能線図でモデル化する。モータを内蔵する機械系を、モータを中心に機能展開すれば、図6のように4レベルに階層化できる。最上位のレベル1の機械系は、レベル2のモータ系と機械負荷からなる。モータ系はレベル3のモータ本体と電源系からなり、機械負荷はレベル3の複数の部分構造あるいは部品の集合からなる。レベル3の電源系はレベル4の電源と操作系からなり、同じくレベル3のモータ本体はレベル4の電気特性と機械特性と両者間のエネルギー変換機能からなる。

一般に機械は、エネルギーの変換・移動により機能し使命を果たす。瞬時エネルギーは、電気系では電圧 V と電流 I の積からなる電力、機械系では速度 v と力 f の積あるいは角速度 ω とトルク T の積からなる動力の形をとる。図6では、全レベルを通してすべての機能要素における入出力が、これらのうちいずれかになっている。物理機能線図では、モデルの入出力をこのように瞬時エネルギーを用いて標準化することにより、専門物理領域を越えてモデルを接続・分離・展開・統合・分解できるようにしている。

モータ本体では、電気特性と機械特性がエネルギー

変換機能によって連結される。この変換にエネルギー保存の法則が成立する理想的なモータでは、これを以下のように簡単に表現できる。

$$\left. \begin{aligned} X_T &= \frac{T_M}{I_M}, X_\omega = \frac{V_M}{\omega_M} \\ M_M &= X_T = X_\omega = \frac{PZ\phi}{2\pi a} * 10^8 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ここで、 P は電機子の極数、 a は電機子並列回路数、 Z は全導体数であり、これらはモータの構造で決まる。また、 ϕ は1極あたりの全磁束数であり、界磁に永久磁石を使用する他励式モータではモータの構造で決まり、界磁巻線を持つ自励式モータでは界磁巻線の電流に支配される。式(13)では、電気系と機械系をトルク係数 X_T (Nm/A)と速度係数 X_ω (V/(rad/s))で関係付けており、 M_M はモータ定数と呼ばれる。式(13)は、直流発電機などの一般の直流回転機械にも適用できる一般性のある定義である。

モータは、電気系、磁気系、回転系の連結で構成されており、エネルギー変換には磁気系が介在しているが、磁気回路のモデル化は複雑なので、通常はこれを省略し、代りに上記のようにモータ定数 M_M を用いて電気系と回転系を直結する方法でモデル化を行う。磁気回路の詳細な特性が必要な場合には、 M_M に非線形を持たせる形でモデル化することが多い。しかし本報では、モータ自身の設計開発ではなく、モータを機械の単なる一部品として使う立場からモデル化しており、このような場合には M_M を定数にする表現で十分である。

4.2 モータの簡略モデル

図6のレベル4における電気と機械の両特性の表現は、モデルの目的と用途によって変る。一般的なモー

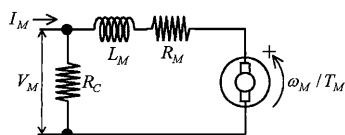


図7 モータの電気回路

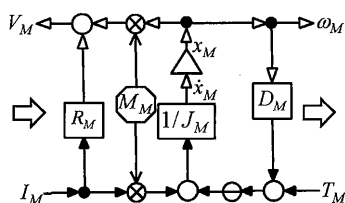


図8 物理機能線図によるモータの簡略モデル

タの電気特性は、図7に示すように電機子巻線の抵抗 R_M 、インダクタンス L_M 、巻線の絶縁抵抗 R_C からなるが、負荷変動が比較的少なく定常に近い使用状態では、電気的非定常挙動を誘起する L_M と R_C を省略しても、実機との差異があまり起こらない。一方機械特性は、電機子が回転体であることから、簡略的には慣性モーメント J_M と粘性抵抗 D_M で代表できる。

これらにより簡略表現したモータを物理機能線図によりモデル化すれば、図8になる。図8のように物理機能線図では、式(13)のエネルギー変換を、表1で示した変換子を用いてモデル化を行う。この図では、表1中の変換子の変換係数はモータ定数であり、 $Q = M_M$ になっている。

図8から数学モデルを求める。まず下2個の白丸をまとめて式で表現すれば

$$J_M \dot{x}_M = M_M I_M - D_M x_M - T_M \quad (14)$$

上の白丸より

$$V_M = M_M x_M + R_M I_M \quad (15)$$

自明の関係より

$$\omega_M = x_M \quad (16)$$

式(14)～(16)をまとめて表現すれば

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \omega_M \\ V_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_M & D_M & 1 & -M_M \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & M_M & 0 & R_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_M \\ x_M \\ T_M \\ I_M \end{bmatrix} \quad (17)$$

式(17)の上1行が状態方程式、下2行が出力方程式である。

4.3 モータの詳細モデル

前節では、モータを線形系とみなし、定常に近い使用状態において有効な簡略モデルを示した。本節では、モータ諸特性の非線形性を考慮し、同時に電氣的な過渡現象のシミュレーションに対しても有効な詳細モデルを紹介する。詳細モデルは、簡略モデルに次の各項を付加することにより作成する。

- (1) 電機子巻線インダクタンス L_M 。起動・停止時や負荷の急変などでモータ電流の変動が激しいときの過渡現象に対しては、インダクタンスが大きい影響を及ぼす。
- (2) 電機子巻線絶縁抵抗 R_C 。
- (3) ブラシの摺動による電圧降下 V_{MB} とその非線形性。
- (4) 周囲温度 Q_E と巻線の自己発熱に依存する電機

子巻線抵抗 R_M の非線形変化。

(5) 軸受の摩擦トルク T_{MF} とその非線形性。

(6) 速度補正係数 δ_M 。

速度補正係数 δ_M について説明する。式(13)は理想的なモータの関係式であるが、この関係が厳密に成立するように実機を製造するのは困難であり、実際には少なくとも χ_T か χ_ω のどちらかに誤差が生じるのは避けられない。そこで通常、どちらか重要な方の精度を上げ、他方に対しては公差を設けてその範囲内で誤差を許すように設計する。本論で対象とするモータでは、一般にトルクを正しく制御するために χ_T の精度を上げ、 χ_ω の方に誤差を許している。そこでモデル化に際しては、この誤差を考慮し補正するために、速度補正係数 δ_M を用いて

$$\chi_T = M_M \cdot \chi_\omega = \delta_M M_M \quad (18)$$

逆に発電機では、電圧を正しく管理する必要性から χ_ω の精度を上げる設計を行うので、 χ_T の方を補正するためのトルク補正係数を用いてモデル化することが多い。

図9に物理機能線図によるモータの詳細モデルを示す。図9は図8と同様に、モータ定数 M_M を境にして左が電気系、右が機械系である。図9中3個の二重四角形は、それぞれ巻線抵抗の温度依存変化、ブラシの摺動による電圧降下および軸受の摩擦トルクという3種類の非線形特性である。図9では、本体の機能モデルが図8と同様に線形であり、その局部に含まれるこれらの非線形性は、2重四角形の機構モデルを本体に付随させることにより表現される。それらの内容は後に示す。また、 R_M と L_M は実際にはコイル全体に分布しているが、本論ではこれらを集中定数として扱い、両者は直列に接続されていると見なす。

この詳細モデルの支配方程式は、図8の簡略モデルの場合と同様の方法で作成できて

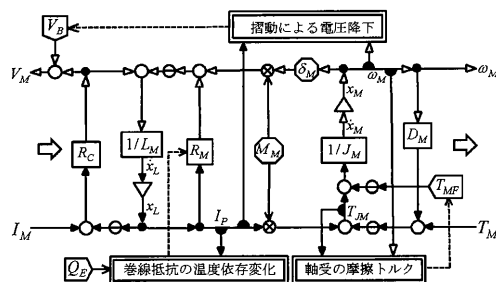


図9 物理機能線図によるモータの詳細モデル

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_M \\ V_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_M & 0 & D_M & -M_M & 1 & 0 & T_{MF} \\ 0 & L_M & \delta_M M_M & R_M + R_C & 0 & -R_C & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_C & 0 & R_C & V_{MB} \end{bmatrix} \times [\dot{x}_M \quad \dot{x}_L \quad x_M \quad x_L \quad T_M \quad I_M \quad 1]^T \quad (19)$$

ここで、式19右辺の上添字 T は転置を意味する。

4.4 非線形性の機構モデル

4.4.1 巻線抵抗の温度依存変化

巻線抵抗 R_M は、周囲温度 Q_E [°C] と巻線電流 I_p による自己発熱に依存して非線形的に変化する。これを表現する機構モデルは、自己発熱による温度変化 Q_x の部分とそれに依存する抵抗値変化の部分から構成され、図10のようになる³⁾。熱放散係数を δ_c [W/deg]、熱時定数を τ_M [s]、標本化周期を t_s [s]、コイルの温度係数を α_w [1/°C]、周囲温度における抵抗を R_{MS} [Ω]、標本化時刻 $t_{(k)}$ [s] における温度を $T_{x(k)}$ [°C]、巻線抵抗を $R_{M(k)}$ [Ω] とすれば、その数学モデルは図10から

$$\left. \begin{aligned} T_{x(k+1)} &= P_M T_{x(k)} + (1 - P_M) \frac{R_{M(k)} I_p^2}{\delta_c} \\ P_M &= \exp\left(-\frac{t_s}{\tau_M}\right) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$R_{M(k+1)} = R_{MS} \{1 + \alpha_w (T_{x(k+1)} - Q_E)\} \quad (21)$$

図9に示すモータ本体の機能モデルから電流 I_p を観測値として図10に取り込み、式(20)と(21)を用いて $R_{M(k+1)}$ を計算し、その結果を時刻歴で図9の機能モデルに与えればよい。

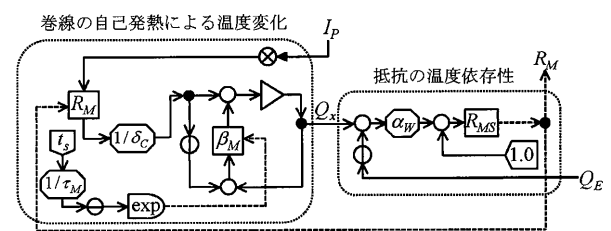


図10 巻線抵抗の温度依存変化の機構モデル

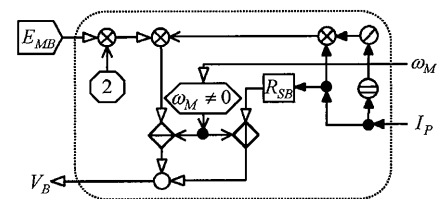


図11 摺動による電圧降下の機構モデル

4.4.2 ブラシの摺動による電圧降下

ここでは、モータの整流子に普通に用いられる黒鉛系のブラシを対象にする。このブラシは、回転が停止しているときには直流抵抗に近い特性を示し、その電気抵抗を R_{SB} とする。また、回転中は流れる電流値に関係なく一定の電圧降下を示す。その値は電流の方向によって若干異なるが、ここではその平均値を採用することとし、ブラシ 1 個あたりの降下電圧を E_{MB} とする。直流モータは 2 個のブラシを有するので、それらによる電圧降下 V_B を表現する機構モデルは図 11 のようになる。ただし通常は $R_{SB} = 0$ としてよい。

その数学モデルは図 11 より

$$\left. \begin{array}{l} \text{if } \omega_M \neq 0 \text{ then } V_B = 2E_{MB} \operatorname{sgn}(I_P) \\ \text{else } V_B = R_{SB}I_P \end{array} \right\} \quad (22)$$

ここで、 $\operatorname{sgn}(A)$ は A の符号を示す。本体の機能モデルである図 9 から角速度 ω_M と電流 I_P を観測値として図 11 に取り込み、式(22)を用いて V_B を計算し、結果を時刻歴で図 9 に与えればよい。

4.4.3 軸受の摩擦トルク

停止中の軸が回転し始めるときの軸受の静摩擦トルクを T_{FS} 、回転中の軸受の動摩擦トルクを T_{FV} とすれば、軸受の摩擦トルクを表現する機構モデルは図 12 のようになり、その数学モデルは

$$\left. \begin{array}{l} y_s = |T_{JM}| - T_{FS} \\ \text{if } \omega_M \neq 0 \text{ then } T_{MF} = T_{FV} \operatorname{sgn}(\omega_M) \\ \text{else if } y_s > 0 \text{ then } T_{MF} = T_{FV} \operatorname{sgn}(T_{JM}) \\ \text{else } T_{MF} = T_{JM} \end{array} \right\} \quad (23)$$

モータ本体の機能モデルである図 9 から角速度 ω_M と慣性モーメント J_M に作用するトルク T_{JM} を観測値として取り込み、式(23)を用いて T_{MF} を計算し、結果を時刻歴で図 9 に与えればよい。

4.5 電源系のモデル

電源系は電源と操作系からなる。操作系の基本機能は、起動・停止、正転・逆転、電気ブレーキ有・無で

ある。操作の方法には、機械式接点によるスイッチで行う方法と、制御ユニットなどに組み込まれた電子回路を介して行う方法がある。電子回路による方法には、電力の供給をモータの速度に影響しない周期で ON/OFF 比を変えて行う電子スイッチ方式と、モータの電流または電圧を連続的に変えて制御する方法があるが、本報では前者のモデルを示す。電子回路については、高度な回路技術を使用して行う方法もあるが、本論は電子回路の技術的内容の検討が目的ではないので、必要最低限の機能のみを簡単にモデル化する。したがって、半導体の持つ非線形特性や電子回路の過渡応答などは省略する。

4.5.1 電源

電源は電圧 E_0 、内部抵抗 R_B の電池とする。図 13 はそのモデルであり、左が電気回路、右が物理機能線図である。その数学モデルは

$$I_B = \left[-\frac{1}{R_B} \frac{E_0}{R_B} \right] \begin{bmatrix} V_B \\ 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

4.5.2 機械式接点スイッチ

図 14 は、機械式接点によるスイッチを電池とモー

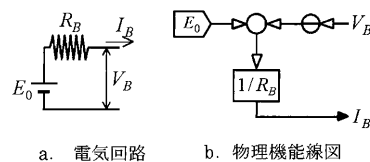


図 13 電源のモデル

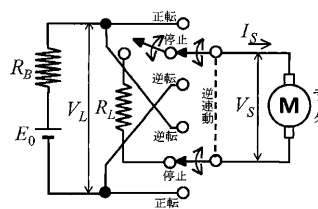


図 14 操作系（機械式接点スイッチ）の電気回路

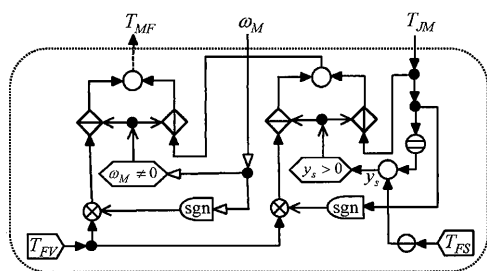


図 12 軸受の摩擦トルクの機構モデル

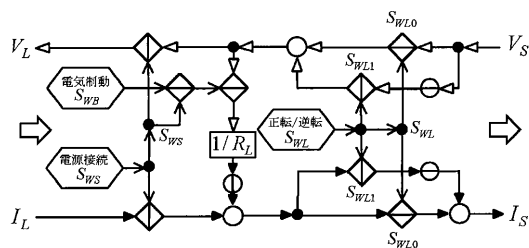


図 15 物理機能線図による操作系（機械式接点スイッチ）のモデル

タにつないだ電気回路である。図 15 は、このスイッチの物理機能線図によるモデルである。ここで、 R_L は電気ブレーキの制動力を決める抵抗である。電気ブレーキでは、電源を OFF にしたときにモータの空転で誘起される起電力を制動抵抗 R_L で消費させて制動トルクを調節する。そして $R_L = 0$ のとき最大のトルクが発生する。なおスイッチの接触抵抗と絶縁抵抗は考慮しない。

スイッチの操作は表 1 に示した六角形の条件判定記号で決められ、その操作信号は OFF を 0 に ON を 1 に指定して出力する。図 15 には、機能的に次の 3 種類の働きをするスイッチが存在する。

- (1) S_{WS} は、1 でモータに電力を供給し、0 で供給しない。
- (2) S_{WL} は、0 で切替スイッチ変数 $S_{WLO} = 1$ 、 $S_{WLI} = 0$ となり電流が順方向に流れてモータが正回転し、1 で $S_{WLO} = 0$ 、 $S_{WLI} = 1$ となり電流が逆方向に流れてモータが逆回転する。
- (3) S_{WB} は、 $S_{WS} = 0$ の電源 OFF の条件下で、1 で電氣的にブレーキを掛け、0 でブレーキを掛けないで止める。

図 15 から次の支配方程式が得られる.

$$\begin{bmatrix} V_L \\ I_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & S_{WE} \\ S_{WE} & -\frac{1}{R_s} S_{WB}(1 - S_{WS}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_L \\ V_S \end{bmatrix} \quad (25)$$

ここで S_{we} は、起動・停止と正回転・逆回転を兼ねた電源切替えスイッチであり

$$S_{WE} = S_{WS}(S_{WLO} - S_{WLI}) \quad (26)$$

4.5.3 電子スイッチ

図 15 中のスイッチ S_{WS} の切替えを電子的に行うものを電子スイッチと呼ぶ。図 16 は、トランジスタの持つスイッチング機能を利用し、それを実行するための簡単な電子回路を電池とモータにつないだ図であり、 E_{CNT} に矩形波の信号電圧を加えることによってトランジスタ TR が高速の ON/OFF 動作を行う。 R_A は、トランジスタに過大な電流が流れるのを防止するため

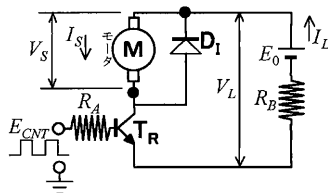


図 16 操作系（電子スイッチ）の電気回路

のベース抵抗であり、機能には関与しない。Dr1は、サージ電圧（トランジスタ OFF の瞬間にコイルが発生する過大な負の逆起電力）をバイパスさせることにより、コイルに貯えたエネルギーをモータに還すと共に、トランジスタを保護するためのホイーリングダイオードである。

図 17 は、物理機能線図によるこの電子スイッチの機能モデルであり、トランジスタの機能を左六角形の条件判定と抵抗 R_{ON} と R_{OFF} で表している。すなわちトランジスタの ON と OFF は、スイッチング信号発生器の矩形波信号電圧 E_{CNT} が、判定電圧 E_{TH} より高いときに ON、低いときに OFF となる。そして ON のときには低い導通抵抗 R_{ON} 、OFF のときには極めて高い遮断抵抗 R_{OFF} になる。一方ホーリングダイオードの機能は、右六角形の条件判定 S_{wd} と導通状態の抵抗 R_D で表現している。すなわちダイオードは、インダクタンスに生じる負の逆起電力のために、モータ電圧 V_s が負になったときに、抵抗 R_D を介してインダクタンスの蓄積エネルギーをモータに還元する。

なお、図 15 の電気ブレーキの制動抵抗 R_L と図 17 の R_D は一見同じ機能をするように見えるが、前者は正のモータ誘起電圧で働き、後者は負のインダクタンス逆起電力で働く。これらを踏まえた電子スイッチの数学モデルは

$$\begin{bmatrix} V_L \\ I_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ON} S_{WT1} + R_{OFF} S_{WT0} & 1 \\ 1 & -\frac{S_{WD}}{R_o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_L \\ V_S \end{bmatrix} \quad (27)$$

4.6 モータ系のモデル

4.6.1 電源と操作系の統合

図6の電源系におけるレベル4から3への統合として、電源と操作系を結合して電源系のモデルを導く。結合の方法は、結合条件式を用いて各々の数学モデルを結び付けて整理すればよい。その結合条件式は

$$V_I = V_R, I_R = I_I \quad (28)$$

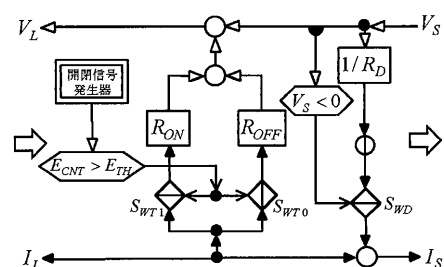


図 17 物理機能線図による操作系（電子スイッチ）のモデル

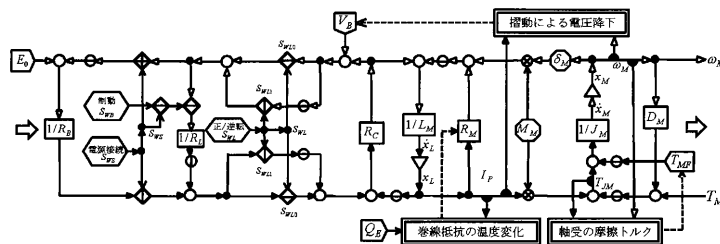


図 18 物理機能線図によるモータ系のモデル（機械式接点スイッチの場合）

操作系が機械式接点スイッチの場合には，式（24）と（25）を式（28）に代入して整理すれば

$$I_S = \left[-\frac{1}{R_B} S_{WA} \quad \frac{E_0}{R_B} S_{WE} \right] \begin{bmatrix} V_S \\ 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

ここで S_{WA} は，電源の ON/OFF と電気ブレーキの有無を選択するための制動スイッチ変数であり，式（26）より $S_{WE}^2 = S_{WS}$ になるから

$$S_{WA} = S_{WS} + \frac{R_B}{R_L} S_{WB} (1 - S_{WS}) \quad (30)$$

操作系が電子スイッチの場合には，式（24）と（27）を式（28）に代入して整理すれば

$$I_S = \left[-\frac{1}{R_K} - \frac{S_{WD}}{R_D} \quad \frac{E_0}{R_K} \right] \begin{bmatrix} V_S \\ 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

ここで

$$R_K = R_B + R_{TR} \quad (32)$$

4.6.2 電源系とモータの統合

図 6 におけるレベル 3 から 2 への統合として，電源系とモータを結合してモータ系のモデルを導く．その際，電源系中の操作系は機械式接点スイッチとし，モータの詳細モデルを用いれば，モータ系の物理機能線図は図 13 右図と図 15 と図 9 を単に結合することにより，図 18 のように得られる．

その数学モデルは，式 19 と式 29 を結合条件式

$$V_M = V_S, I_S = I_M \quad (33)$$

に代入して整理すれば，得られる．

5. まとめ

著者らが提案した新しいモデル化手法である物理機能線図を用いて，柔軟支持はりと直流モータ系をモデル化した例を紹介した．これらの例によって，物理機能線図の内容，電気系と機械系の一体モデルの作り方，モデルの結合・分解・展開・統合・分解の方法，機構モデルを用いた非線形系のモデル化手法などの概要を理解していただいた．

参 考 文 献

- 1) 長松昌男，角田鎮男，長松昭男：製品開発のための新しいモデル化手法(機能モデルの基本概念)，日本機械学会（C 編），64-622，1997/2004（1998）
- 2) 長松昭男，角田鎮男，長松昌男：同上(展開と統合)，同上，64-627，4126/4223（1998）
- 3) 角田鎮男，長松昌男，長松昭男：同上(非線形系 1 基本要素)，同上，65-632，1403/1410（1999）
- 4) 角田鎮男，平松繁喜，長松昌男，長松昭男：回転運動機器の機能表現のためのモデル化(第 1 報 クラッチとブレーキ)，同上，65-635，2601/2608（1999）
- 5) 平松繁喜，角田鎮男，長松昌男，長松昭男：回転運動機器の機能表現のためのモデル化(第 2 報 遊星歯車列)，同上，65-638，3926/3933（1999）
- 6) 長松昌男，長松昭男：複合領域シミュレーションのための電気・機械系の力学，コロナ社（2013）
- 7) 長松昌男，長松昭男：電気・機械一体モデルの開発と応用，第 1 報 物理学的基礎，シミュレーション，Vol.32，No.1，48-54（2013）
- 8) 長松昌男，長松昭男：電気・機械一体モデルの開発と応用，第 2 報 力学と電磁気学間の新しい相似則の提案，シミュレーション，Vol.32，No.2，136-143（2013）
- 9) 長松昌男，長松昭男，角田鎮男：電気・機械一体モデルの開発と応用，第 3 報 モデルベース開発のためのモデル化，シミュレーション，Vol.32，No.3，221-232（2013）

本連載講座「電気・機械一体モデルの開発と応用」の第1報～第3報に誤記がありましたので、お詫びし、以下に正誤表を付記します（矢印→の左が誤、右が正）。

1. 第1報 物理学的基礎, シミュレーション, 第32巻, 第1号, 48頁～54頁

- ・ 48 頁表 1 : 磁束性の連続性 → 磁束線の連続性
- ・ 49 頁表 3 : $\text{rot } \mathbf{E} = \partial \mathbf{B} / \partial t$ → $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$
- ・ 51 頁左下から 2 行 : $H = 1/K$ → $H = 1/K$
- ・ 53 頁右下から 16 行 : ただし力・電流相似は → ただし在来の力・電流相似は
- ・ 54 頁表 4 : 力・電流相似 → 在来の力・電流相似
- ・ 同上 : 新提案相似 → 新提案の力・電流相似
- ・ 54 頁右下から 13 行 : 6) 同上, 135 頁, 136 頁 → 6) 同上, 133 頁～136 頁

2. 第2報 力学と電磁気学間の新しい相似則の提案 同上, 第2号, 136頁～143頁

- ・ 全体の合計 34 か所 : 電気容量 → 静電容量
- ・ 141 頁右下から 5 行, 142 頁左上から 8 行と 18 行, 143 頁左下から 3 行, 143 頁右上から 11 行 : 表 4 → 表 3
- ・ 142 頁右上から 7 行 : 式 9 → 式 15
- ・ 142 頁右下から 8 行 : 3.2.1 2 次電気系 → 3.2.2 2 次電気系

3. 第3報 モデルベース開発のためのモデル化, 同上, 第3号, 221頁～232頁

- ・ 227 頁左上から 20 行 : (剛性 K 逆数: $H = 1/K$), 電気系では静電容量 (または電気容量) C → (K 逆数: $H = 1/K$), 電気系では静電容量 C
- ・ 228 頁右下から 16 行 : 電力の保存から $I_1 V_1 = I_2 V_2$ であるから, $I_1 = N_R I_2, V_2 = N_R V_1$ の関係がある. → $I_1 = N_R I_2, V_2 = N_R V_1$ の関係があり⁴⁾, 電力の保存式 $I_1 V_1 = I_2 V_2$ が成立する.
- ・ 228 頁右下から 11 行 : 各々のピッチ円上の力と速度を f_1 と v_1 , f_2 と v_2 とすれば, 仕事率の保存から $f_1 v_1 = f_2 v_2$ であるから, $f_1 = r_R f_2, v_2 = r_R v_1$ の関係がある. この半径比 $r_R = r_2 / r_1$ → 各々の中心軸のトルクと角速度を T_1 と ω_1 , T_2 と ω_2 とすれば, $T_1 = r_R T_2, \omega_2 = r_R \omega_1$ の関係があり, 仕事率の保存式 $T_1 \omega_1 = T_2 \omega_2$ が成立する. この半径比 $r_R = r_1 / r_2$
- ・ 230 頁左上から 13 行 : 電流が入力し → 電流 I_1 が入力し
- ・ 231 頁式 20 右辺第 1 項係数行列内の 2 行 2 列 : $\frac{1}{LG_r}$ → $-\frac{1}{LG_r}$