

3D プリンターを利用した樹脂アンテナの製作と性能評価

小林 弘一 川村 龍一 岸田 涼雅

工学部 電子情報通信工学科
(2014 年 9 月 30 日受理)

Fabrication of Resin Antenna using 3D Printer and its Estimation

Hirokazu KOBAYASHI, Ryu-ichi KAWAMURA, Ryoga KISHIDA

Electromagnetic Wave Information System Laboratory

Department of Electronics, Information and Communication Engineering,

Faculty of Engineering

Abstract

By applying a 3D printer, which has rapidly been attracting attention in the last few years, we fabricated a small-aperture horn antenna, such as a pyramidal horn, ridged pyramidal horn, and corrugated conical horn, and present the results of the measured radiation characteristics. These antennas were designed by means of the aperture field method or numerical solution, and the dimension data were input to the 3D printer and fabricated by laminating resin. Next, these resin surfaces were coated with conductive paint, and the input impedance and radiation pattern were measured, after which the results were compared with the theoretical calculations. We confirmed that there is no problem in the reflection characteristic by applying conductive paint on the same flat resin board and measuring the reflectivity of the conductive paint that is attached to the open side of a waveguide. The electrical performance of these resin antennas that were fabricated by a 3D printer had almost no problem in comparison with the conventionally produced antennas, and we could show that estimating small antennas using a 3D printer can be performed cheaply and in a short amount of time.

キーワード; 3D プリンター, 樹脂アンテナ, 開口面アンテナ, 角錐ホーン, ダブルリッジ角錐ホーン, コルゲート円錐ホーン, Fresnel 積分

Keyword; 3D Printer, Resin Antenna, Aperture Antenna, Pyramidal Horn, W-Ridged Pyramidal Horn, Corrugated Conical Horn. Fresnel Integral

1. まえがき

紙に印刷する通常のプリンターに対し、本論文で扱う 3D プリンターは 3 次元の CAD/CG などのデータから直接立体物を樹脂等にて製作する装置を指す。製作の方法としては、熱で融解した樹脂を少しずつ積み重ねる熱溶解積層タイプ、液状の樹脂に紫外線などを照射し少しずつ硬化させていくインクジェットタイプ、そして粉末の樹脂に接着剤を吹きつけていく粉末固着タイプなどに大別される。3D プリンターの最大の特徴は PC 画面でしか見ることができなかった画像を実際の物として容易に製作できることである。とりわけ、小規模の物は CAD データから手軽にかつ低コストで製作できるので、教育分野でのデザインあるいはモックアップ、医療分野での断層撮影データの擬似立体モデル、各種研究分野での試作、家庭での趣味の分野など、急速に利用範囲が拡大されつつある [1]。また、プリンターの性能仕様にもよるが、通常のプリンターと同様に製作物には複数の色を指定したり、製作物の樹脂密度、あるいは製作位置精度を変えたりすることができる。

本論文では、ABS 樹脂を材料に熱溶解積層法によって代表的な小型の開口面（ホーン）アンテナを製作し、入力インピーダンスおよび放射パターン等の評価を行う。これは 3D プリンターの有効性を確認するという意味で、試作対象のアンテナは小型の角錐ホーン、コルゲートホーンなどの開口面アンテナを選定している。なお、製作したアンテナの表面は誘電体樹脂のままであるので、何らかの導電塗料を塗布あるいは散布して、動作周波数での反射率を確保することにしている。結局のところ、3D プリンターによるアンテナの性能は、この導電塗料による反射率がポイントとなる。このため先ず最初に、同軸導波管変換器の導波管端にアルミニウム金属を装着し、これを金属塗装後の樹脂に置き換えて、反射損失の差異を最初に実測した。この結果、差異は 0.1dB 以内となり、通常の金属特性を呈することを確認している。このように、樹脂アンテナ全面での反射率が確保できれば、後はアンテナの仕上がり精度がどれほど設計値に近いかわという機械加工の場合と同じ問題となる。

比較的小規模のアンテナの製作は、従来より設計値の機械的寸法を元にフライス盤あるいは旋盤等で機械加工を行なうか金型をつくってから製作している。従って、性能等に支障があれば、その度この過程を繰り返すことになり、時間コストと予算に問題が生じる場合がある。しかし、”3D プリンターによる試作”という工程をいれる

ことにより、結果的に時間も予算も抑えられることが期待できる。この製作工程は、アンテナの設計→3D データの作成→3D プリンターによる印刷→導電塗料による塗装、という流れになる。

アンテナそのものを 3D プリンターで製作し、導電塗料を塗布して金属加工と同じ電気的特性を目指す方法は、筆者の知る限り初めての報告と思われる。最終的に 3D プリンターによる製作は低コストで短期間の開発試作が目的となるが、それにはマイクロ波帯での反射率の確保と再現性がポイントなる。一方、近い将来、3D プリンターで金属生成も可能になると言われており、この際には、高い寸法精度を必要とする特殊なアンテナを除き、本論文で扱う小型の開口面アンテナなどはほぼ 3D プリンターによるもので、製作が可能となる。また、マイクロ波帯で低損失な樹脂材料の提案も期待され、先の金属材料との同時加工により、現状、プリント基板にエッチングで生成しているパッチアンテナなども、低コストで短時間に試作が可能となると予想される。

2. 角錐ホーンアンテナ

矩形導波管を自然な形でピラミッド状に広げた角錐ホーンアンテナは、従来の機械加工による製作によっても比較的安価で製作でき、かつ理論計算とよく一致することから、標準アンテナとしての利用の他に、各種通信、レーダ機器などに広く利用されている進行波型の開口面アンテナである。このアンテナの計算理論は、以下のようにして比較的容易に求められる。

先ず、矩形導波管モードがそのまま扇型伝送路に進行するとして、Hankel 関数で表現される開口電磁界分布を 2 次位相まで考慮した漸近展開式で近似し、この開口分布と等価な電磁流がつくる放射界を導く [2, 3]。2 次位相の矩形積分なので、結果は Fresnel 積分で表現される。この要約だけを次に示す。

考えている角錐ホーンアンテナの構造を図 1 に示す。2 次位相まで考慮した TE₁₀ 基本モードによる開口電磁界分布を次式で与える。

$$E_x(x, y) = \cos \frac{\pi y}{A} \exp(-jk\Phi_y), \quad \Phi_y = \frac{y^2}{2\rho_1}, \quad (1)$$

$$E_\phi(x, y) = \cos \frac{\pi y}{a} \exp(-jk\Phi_x), \quad \Phi_x = \frac{x^2}{2\rho_2}. \quad (2)$$

第 (1) 式が H 面、(2) 式が E 面の分布である。これが遠方でつくる放射界は球座標 (r, θ, ϕ) において、次のよう

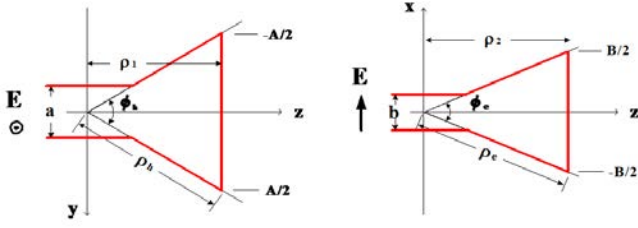


図-1 角錐ホーンのパラメータ (L: H面, R: E面)

Fig.1 Parameters of pyramidal horn (L: H-, R: E-plane)

に計算される。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\theta, \phi) &= \frac{jk \exp(-jkr)}{4\pi r} \cdot \frac{1 + \cos \theta}{2} \\ &\quad \cdot (\mathbf{i}_\theta \cos \phi + \mathbf{i}_\phi \sin \phi) \cdot g_e \cdot \{g_{h1} + g_{h2}\}, \quad (3) \\ g_e &= g\left(\frac{1}{2k\rho_2}, \sin \theta \cos \phi, \frac{kB}{2}\right), \\ g_{h1} &= g\left(\frac{1}{2k\rho_1}, \frac{\pi}{kA} + \sin \theta \sin \phi, \frac{kA}{2}\right), \\ g_{h2} &= g\left(\frac{1}{2k\rho_1}, -\frac{\pi}{kA} + \sin \theta \sin \phi, \frac{kA}{2}\right). \end{aligned}$$

ここで、 $(\mathbf{i}_\theta, \mathbf{i}_\phi)$ は各々球座標天頂角と方位角方向の単位ベクトルであり、関数 $g(p, q, s)$ は Fresnel 積分 $F(x)$ で表され、次式で定義される。

$$\begin{aligned} g(p, q, s) &= \sqrt{\frac{\pi}{2p}} \exp\left(\frac{jq^2}{4p}\right) F\left[\sqrt{\frac{2p}{\pi}} \left(s - \frac{q}{2p}\right)\right], \quad (4) \\ F(x) &= C(x) + jS(x) = \int_0^x \exp\left(-j\frac{\pi}{2}t^2\right) dt. \end{aligned}$$

以上の表示式で、寸法は全て波数 $k = 2\pi/\lambda$ で正規化してある。結局のところ、この数値計算は Fresnel 積分がポイントとなる。このため、付録に Fresnel 積分の数学的な諸性質および著者により提案された拡張 Fresnel 積分について解説している。ホーンアンテナあるいは波動の回折に関する数値計算に便利のように FORTRAN と MATLAB コードを提示しているので、参照されたい。なお、上記のホーンアンテナの理論式は TE_{10} モードが仮定できれば、導波管の切り口のような小開口でもメインローブの精度は実測とよく一致することが確認されている [3]。

今、 $A = 77, B = 62, \rho_h = 150, \rho_e = 145$ [mm] として、第 (3) 式による計算結果を図 2 に示す。給電用の矩形導波管は規格品 (WR-90) を想定し、同図の周波数は X バンドの下限と中心、上限となる 8, 10, 12 GHz として

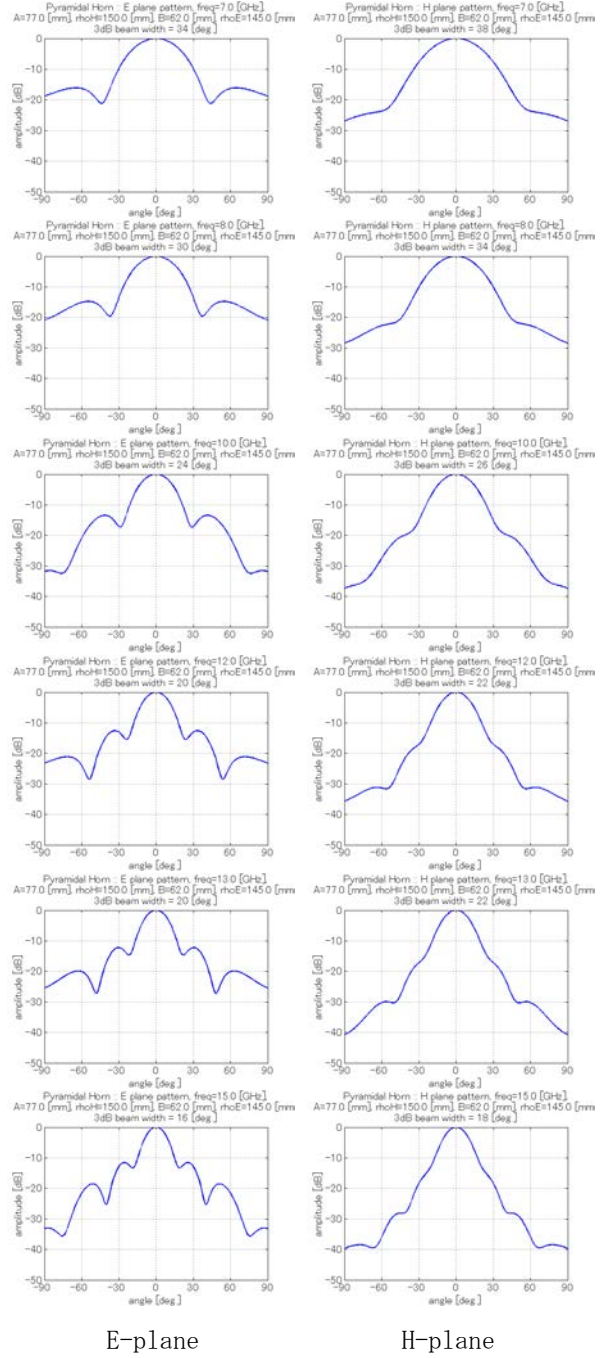


図-2 角錐ホーン遠方放射界の理論値: $A = 77, B = 62, \rho_h = 150, \rho_e = 145$ [mm] (上から 7, 8, 10, 12, 13, 15 GHz)

Fig.2 Theoretical radiation field of pyramidal horn: $A = 77, B = 62, \rho_h = 150, \rho_e = 145$ [mm] (from upper 7, 8, 10, 12, 13, 15 GHz)

いる。同図では、X バンドの他に後述のリッジ付ホーンで 7, 13, 15 GHz を測定しているので、参考のためこの周波数の遠方放射界も掲載している (同図の理論計算は

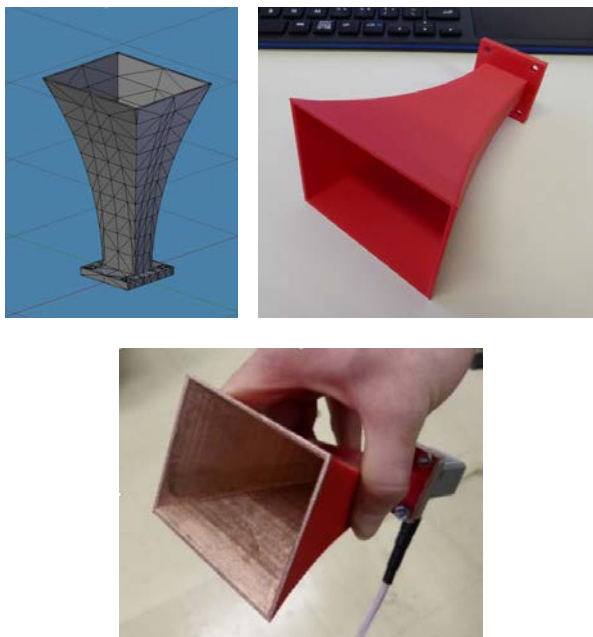


図-3 3D プリンターによって製作した樹脂角錐ホーンの外観（上左：CAD 図面，上右：導電塗料の塗布前，下：内部塗布後）

Fig.3 Photo of resin pyramidal horn fabricated by 3D-PRT (upper-left: CAD model, upper-right: before, lower: after painting)

TE₁₀ モードによる放射界を求めているので、リッジ導波管と異なることに注意されたい。

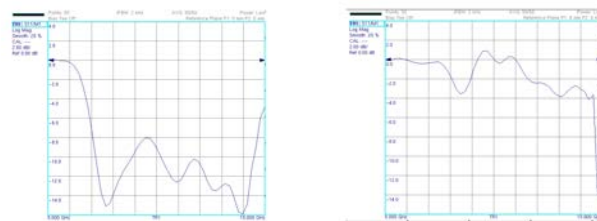
上記寸法で試作した角錐ホーンの外形写真を図 3 に示す。同図では、CAD モデルの外形（上左）、導電塗料塗布前（上右）、塗布後（下）を指す。ホーンの壁はその内部に緩やかな曲面状で構成している。その方程式は

$$E - \text{面} : x = f_{we}(z) = 0.0017z^2 - 0.0191z + 5.1,$$

$$H - \text{面} : x = f_{wh}(z) = 0.0013z^2 + 0.0388z + 11.4$$

としている（単位：mm，図 6 参照）。なお、アンテナ vswr の改善のため直線壁を滑らかな 2 次曲面とするが、広角領域のサイドローブ以外、放射パターンに対しては大きな影響はないことを数値計算で確認している。

図 4 は上記サイズで試作した角錐ホーンの S₁₁ 反射損失の周波数特性であり、同軸導波管の導波管端を基準としている。同図左はアンテナ開口前方に反射物がないとき、右は開口をアルミニウム金属板で覆ったときの反射特性である。反射特性改善のためのチューニングなどは特に実施していないが、X バンド全域で良好な特性となっていることが分かる。一方、同図右はホーンアンテナの

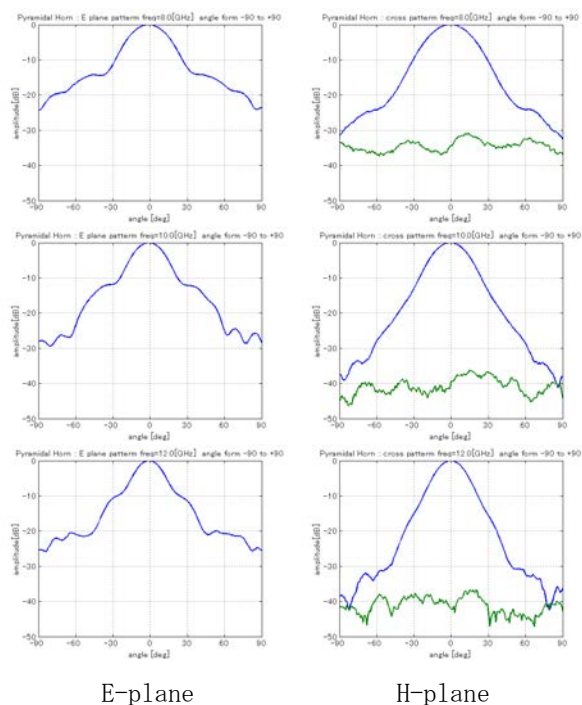


aperture: open

shielded

図-4 角錐ホーン（図 3）の実測反射損失特性：同軸導波管出力端

Fig.4 Measured return loss characteristics of pyramidal horn in Fig.3 at output port of coaxial-waveguide adapter



E-plane

H-plane

図-5 角錐ホーン（図 3）の実測遠方放射界（上から 8, 10, 12 GHz）

Fig.5 Measured radiation field of pyramidal horn in Fig.3 (from upper 8, 10, 12 GHz)

内部損失の 2 倍の値を示すことになり、金属板で開口を覆っても完全な反射は実現できないが、これはアンテナ損失の傾向を知る簡易的な方法となる [3]。この結果より凡そ L=1 dB 程度の損失が推測され、従来の一般的な金属角錐ホーンと同程度となっている。理論的な開口利得とこの損失の差が近似的に絶対利得を与えると考えて

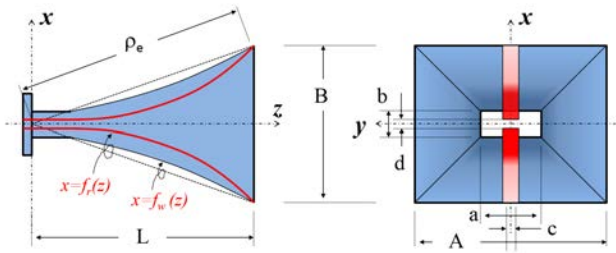


図-6 リッジ付角錐ホーン的外形とパラメータ

Fig.6 Outline of pyramidal horn with double-ridges

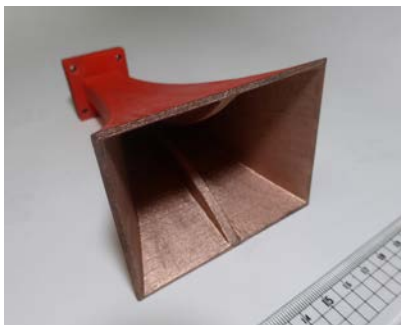


図-7 試作したリッジ付樹脂角錐ホーンの外観写真（導電塗料塗布後）

Fig.7 Photo of resin pyramidal horn with double-ridges fabricated by 3D-PRT (after painting)

もよい。これを基に計算すると、アンテナ絶対利得は

$$G = 4\pi A/\lambda^2 \cdot L = 17.8 \text{ dB}_i$$

と評価される。なお、製作した角錐ホーンの各部の寸法は設計寸法に対し誤差 1% 以下の精度となっている。

図 5 は図 2 の理論放射界に対応する実測遠方パターンである。同図の左側が E-面、右側が H-面パターンおよび交差偏波特性である。上から測定周波数が 8, 10, 12 GHz の場合を示している。両者とも最大値を 0 dB として正規化している。理論値に比べサイドローブ等に差異が見られるが、電力半値幅などは概ね一致している。H-面パターンには、正偏波に対する交差偏波の特性も示している。正偏波からは凡そ -20 ~ -30 dB の特性となっており、金属ホーンと同程度と見做される。

3. リッジ付角錐ホーン

リッジ付導波管は下限動作周波数を改善する目的で、主に矩形導波管の電界壁の片側、あるいは両側にリッジを装荷したものである [4, p. 353, Tab. 1-13]。従って、等

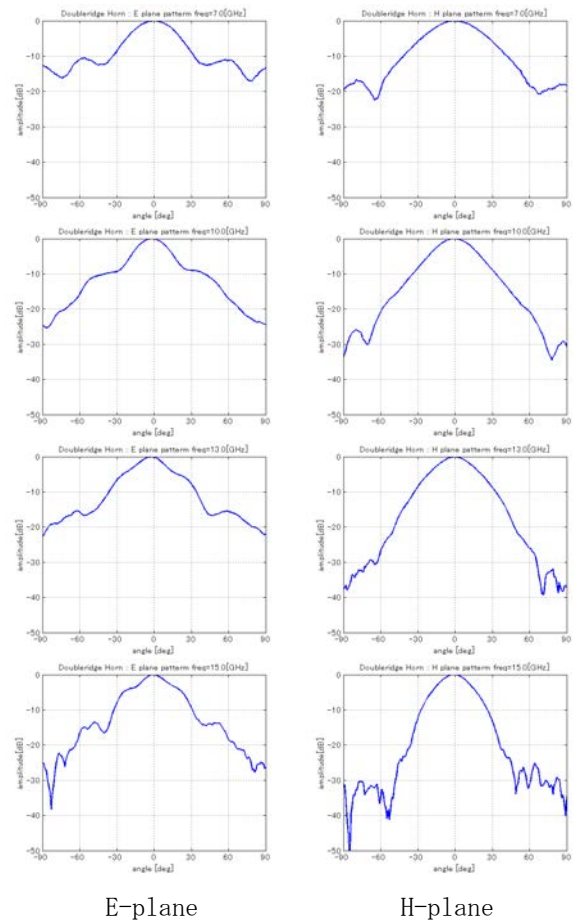
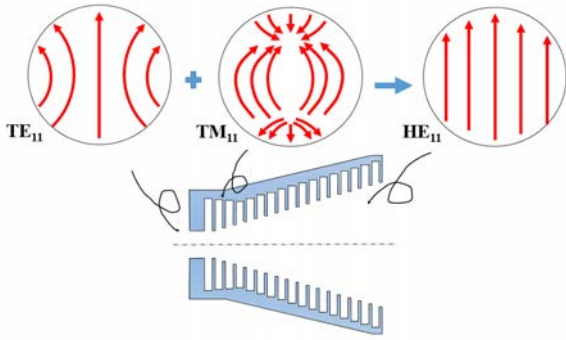


図-8 リッジ付角錐ホーン（図 7）の実測遠方放射界（上から 7, 10, 13, 15 GHz）

Fig.8 Measured radiation field of pyramidal horn with double-ridges in Fig.7 (from upper 7, 10, 13, 15 GHz)

価的に導波管のサイズを縮小することになり、X-Ku 帯などの広帯域のシステム、特に大電力の送信系に用いられることが多く、規格品が市販されている。このリッジ付導波管からホーン状にリッジを形成させると、角錐ホーンと同じような放射界を生成できると考えられる [5]。

図 6 にリッジ付角錐ホーンのパラメータ外形を示す。リッジはホーン電界壁に沿うように形成し、その先端は開口面で消滅するようにする。リッジ付導波管の厳密な伝送モードはハイブリッドモード (trough-mode) であるので、通常の角錐ホーンと違ったものになるが、リッジなしの角錐ホーンと同じ放射界表示で与えても大きな影響はないと考え、前述の角錐樹脂ホーンと同じサイズとなる $A=77, B=62, \rho_h=150, \rho_e=145$ として、3D プリンターによる試作を行った。この際のリッジ形状の方程

図-9 ハイブリッド HE₁₁ モードの生成Fig.9 Hybrid HE₁₁ mode generation

式は次式で与えた。

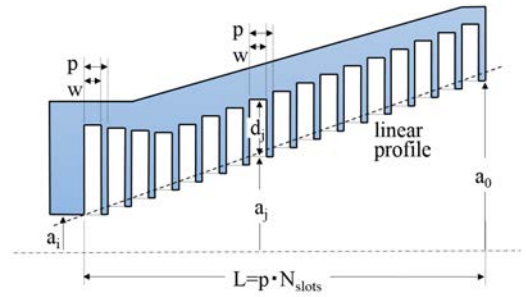
$$\begin{aligned} x &= 0.025z + 1.67 \quad \text{for } 0 \leq z \leq 66.9, \quad [\text{mm}] \\ &= 0.0073z^2 - 0.016z + 18.4 \quad \text{for } 66.9 \leq z \leq 151.2 \end{aligned}$$

ただし、同軸導波管変換器との接続部を $z = 0$ としている。給電導波管とのインターフェースは規格品 WRD-650 ($a = 18.3, b = 8.15, c = 4.40, d = 3.45$ mm) を用いて、これに合わせて導波系の内径とリッジを徐々に開口サイズに近付けている。規格導波管の周波数範囲は 6.5-18 GHz であるので、原理的にアンテナも同じ範囲で動作すると期待できる。図 7 は前述の寸法を 3D プリンターに入力して製作したときの外形写真である。

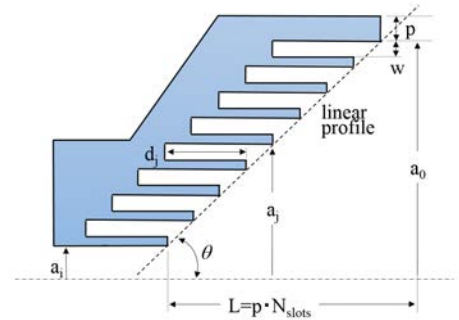
図 8 は試作したリッジ付樹脂ホーンの遠方パターン実測である。同図の左側が E-面、右側が H-面パターンであり、H-面には交差偏波特性も併記してある。測定周波数は上から 7, 10, 13, 15 GHz である。両者とも最大値を 0 dB として正規化している。E 面のサイドローブ特性がリッジ無しの場合に比べ改善されていることが分かるが、他方、交差偏波特性は凡そ -15 dB 前後まで劣化していた。なお、反特性は 7-15 GHz 全域で -10 dB 以下であることを確認している（測定器の仕様上、周波数上限は 15 GHz までを測定）。

4. コルゲート付円錐ホーン

ハイブリッドモードアンテナ、その代表的なアンテナとなるコルゲートホーンは当初、反射鏡アンテナのスビルオーバー軽減を目的に開発された経緯があり、交差偏波成分が少ない、軸対称のビームが設計できる、さらに広い帯域特性であるなど、多くの利点をもつ高級なアンテナである [6]。このハイブリッドモードは内部壁にひだ状のコルゲーションを装荷して実現する。代表的な伝搬



(a) Hybrid-mode type with radial corrugated slots



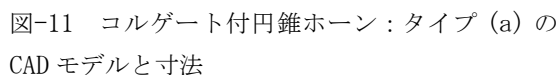
(b) Choke type with axially corrugated slots

図-10 直線状のプロフィールをもつコルゲート円錐ホーン

Fig.10 Corrugated conical horn with linear corrugation profile

モードは HE₁₁ (TE₁₁+TM₁₁+他) であり、開口分布の交差偏波成分をほぼ消滅させることができる。コルゲーションの高さが凡そ 1/4 波長になると、HE₁₁ モードは径方向にガウス分布状に、周方向に変化のない軸対称な形となる [7]。この様子を図 9 に示す。ガウス分布のフーリエ変換はガウス分布となるので、遠方パターンは低いサイドローブ特性を呈することが予想でき、交差偏波が僅少でアンテナボアサイト軸に対して対称な放射ビームが実現される。

本論文では、文献 [8] に記載されている設計式を用いて、3D プリンターによる試作を行うことにする。図 10 に示すように、コルゲート円錐ホーンには 2 種類のタイプがあり、一つは前述のホーン壁に沿ってコルゲートをスロットを径方向に付加するもの：同図 (a)、もう一つはスロットをホーンの中心軸に対してリング状に設けるものであり：同図 (b)、前者は比較的高利得のアンテナ、後者はチョーク型回路をアンテナ開口に応用したものと考えられ、中低利得のアンテナに適しているとされる。ア



アンテナの動作（中心）波長を λ 、アンテナ利得を $G_{\text{in dB}}$ とすると、同文献より次の表示式が得られる。

図 11 にハイブリッドモード型コルゲート付円錐ホーン：タイプ (a) の試作 CAD モデルおよび寸法を示す。段数は $N=10$ で中心動作周波数は $f=10$ GHz としている。コルゲーションの形はリニアプロフィールであり、開口長、軸長は各々 80, 125 mm である。矩形導波管-円形導波管変換部とともに、3D プリンターで製作したハイ

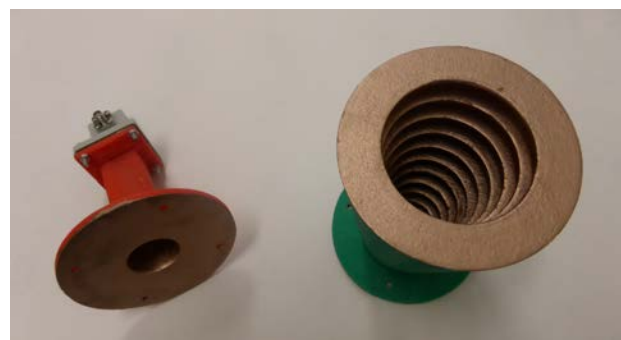


図-12 コルゲート付樹脂円錐ホーン：タイプ (a)
の塗料塗布後外観

Fig.12 Outline after painted of corrugated conical resin horn: type (a)

ブリッドモード型のコルゲート付樹脂円錐ホーンの外形写真を図 12 に示す。入力インピーダンスの実測結果は、8-12 GHz 全域で -12 dB 以下となつて良好な特性を呈しているが、一方、開口を金属平板で塞いで挿入損失を簡易的に評価すると低域で大きな値を示している。実際、アンテナパターンもビームが崩れており、適正な HE_{11} 伝送モードが生成されていないことが伺える。この要因としては、コルゲート内部の導電塗料の不十分さと推測している。

図 13 は上記のコルゲート付円錐ホーンの実測遠方パターンである。同図の左側が E-面、右側が H-面パターンであり、H-面には交差偏波特性も併記してある。入ノ端の矩形導波管は WR-90 規格であり、TE₁₀ モードのみの保証帯域は 8-12 GHz である。しかし、円形およびコルゲーションによって高次モードの生成は矩形導波管のままよりは小さいと考えられるので、同図の測定周波数は 10, 13, 15 GHz としている。E-/H-面とも最大値を 0 dB として正規化している。角錐ホーン特有の E 面のサイドローブ特性は大きく改善されていることが分かる。また、両面でのビームの対称性、ビーム幅の周波数特性もコルゲートアンテナの特長を呈していることが読みとれる。一方、交差偏波特性は正偏波からは凡そ -25 dB 前後となっており、HE₁₁ モードの形成に更なる改善の余地が残されている。

次にチョーク回路タイプのコルゲート付樹脂円錐ホーンの試作について議論する。図 14 は試作した同円錐ホーン：タイプ (b) の CAD モデルである。前述のハイブリッ

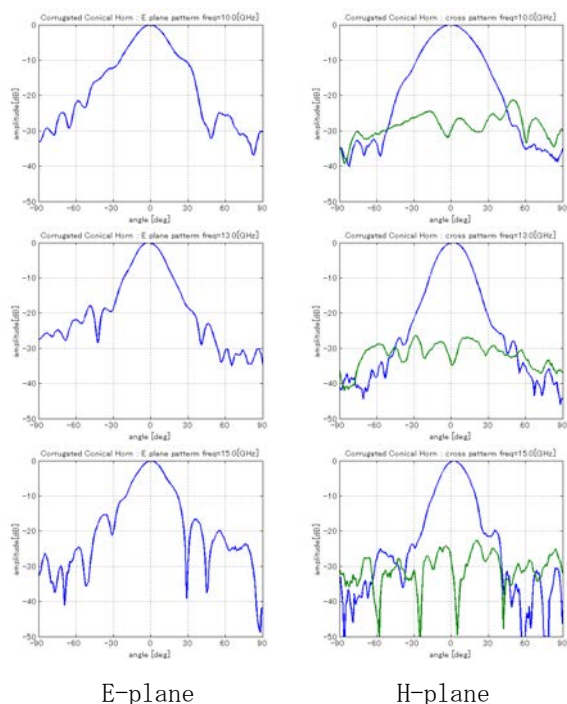


図-13 コルゲート付円錐ホーン（図 12）の実測遠方放射界（上から 10, 13, 15 GHz）

Fig.13 Measured radiation field of corrugated conical horn in Fig.12 (from upper 10, 13, 15 GHz)

ドモードタイプと同様に、中心動作周波数は $f=10$ GHz としており、段数は $N=11$ である。開口長、軸長は各々は 112.5, 60.5 mm である。入力インピーダンスは 8-12 GHz 全域で -15 dB 以下となって良好な特性を呈している。

図 15 は本樹脂アンテナのパターン実測風景を示した写真である。この結果を図 16 に示す。同図の左側が E-面、右側が H-面パターンであり、H-面には交差偏波特性も併記してある。入力端の矩形導波管は WR-90 規格であり、周波数帯域は 8-12 GHz である。E-/H-面とも最大値を 0 dB として正規化している。図には示していないが、入力インピーダンスは凡そ -15 dB 以下となっている。前述のハイブリッドモードタイプと比べて、チョークタイプのコルゲートホーンはコルゲートフィン根元の根元も確実に塗料塗布が実施できる。角錐ホーン特有の E 面のサイドローブ特性はハイブリッドモードタイプと同様に大きく改善されており、また、両面でのビームの対称性、ビーム幅の周波数特性もコルゲートアンテナの特長を呈している。一方、交差偏波特性は正偏波から凡そ -20 数 dB となっており、角錐ホーンより良いとは言えない。コル

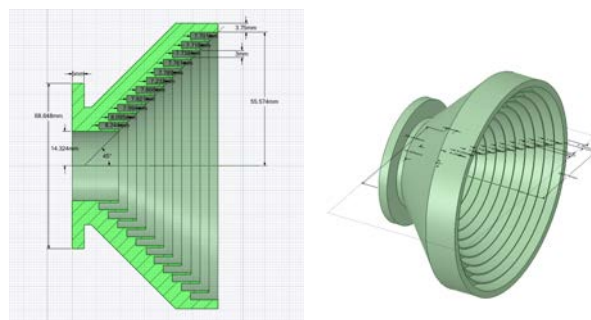


図-14 コルゲート付円錐ホーン：タイプ (b) の CAD モデルと寸法

Fig.14 CAD model and dimensions of corrugated conical resin horn: type (b)



図-15 コルゲート付樹脂円錐ホーン：タイプ (b) の実測風景

Fig.15 Measuring photo of corrugated conical resin horn: type (b)

ゲートホーンの交差偏波特性は、一般に角錐などの通常ホーンよりも良好であることが特長である。前述のハイブリッドモードタイプとともに、交差偏波特性の改善は今後の課題としたい。

5. まとめ

近い将来、金属粉末による安価な凝結型 3D プリンターが市場に登場すると言われている。この際、導電塗料の塗布工程が省略でき、かつ製作精度も向上することが期待できる。さらに、マイクロ波帯で低損失な樹脂材料が提供されれば、プリント板アンテナなども短時間でかつ安価に製作可能となり、数値解法ソフトウェアの結果が CAD/CG を経て、そのまま 3D プリンターでの製作が容易にできるようになるかもしれない。

本論文では、代表的な小型の開口面アンテナである角錐ホーン、それを広帯域化したリッジ付角錐ホーン、そ

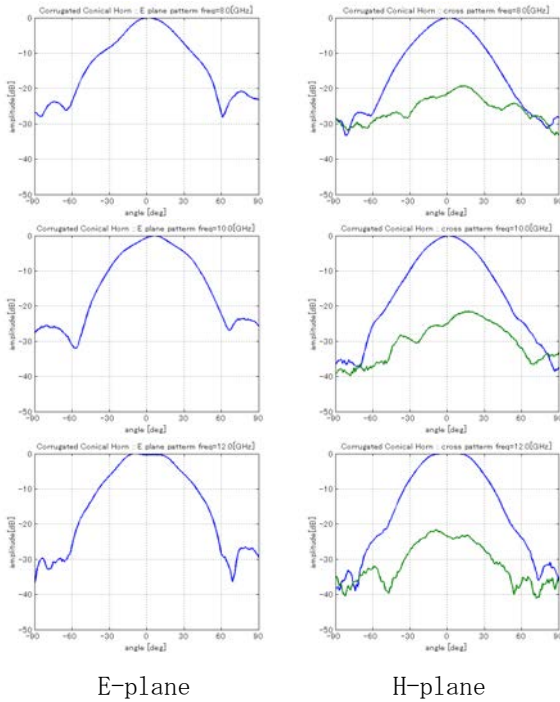


図-16 コルゲート付円錐ホーン (図 15) の実測遠方放射界 (上から 8, 10, 12 GHz)

Fig.16 Measured radiation field of corrugated conical horn in Fig.15 (from upper 8, 10, 12 GHz)

して内壁に沿ってコルゲーションを装荷した高利得タイプとリング状のフィンを装荷した中低利得のコルゲート円錐ホーンの試作と評価を行った。この結果、アンテナとしての性能上に特に大きな問題は見られないことが分かった。一つ挙げるとすれば、導電塗料を施す際の確実性と再現性であろうか。例えば、角などを含めて、直流面抵抗とマイクロ波帯の反射率に何らかの相関性があれば、塗料塗布の確実性が把握でき、本論のような樹脂アンテナの製作がより容易となる。

一方、3D プリンター装置の仕様にもよるが、曲率をもつ平面あるいは立体物の製作は精度を確保するのに工夫が必要である。この場合、座標軸のどこの面から積層させるかなど、プリンターの特性を熟知しながら製作すべきと考える。これはまた、ひさし状の部位を積層させるときの課題でもある。ひさし状の部位を積層させるため、プリンターは半自動でひさしを支える低密度樹脂のサポート部位を積層する。これは後で取り除くことになるが、除去後の表面の粗さもマイクロ波伝送という観点から問題となる場合がある。とくにフランジでの接続の際には注意したい。

今後、チョーク回路型リングスロットによる給電部と、その後に続く非直線状のプロフィール型コルゲートフィンによるフレア部とから成るコルゲートアンテナの設計法を考案し、導電塗料の確実性および再現方法の確立とともに 3D プリンターによる試作製作を行う予定である。

謝 辞

当波動情報システム研究室の卒研生である松永侑樹君らによる樹脂アンテナの設計協力に感謝する。

参考文献

- 1) 経済産業省, 厚生労働省, 文部科学省 編, ものづくり白書 (2013 年版), コラム第 1 部, 第 3 節 世界のものづくり産業が注目する”3 次元プリンタ”, 2013 年.
- 2) 本郷廣平, 電波工学の基礎, 実教出版, 1983 年.
- 3) 小林弘一, 空間波動の工学理論, サクラテック出版., 2011 年.
- 4) K. Chang (Ed.), Handbook of Microwave and Components, Vol. I, Microwave Passive & Antenna Components, Wiley Interscience, 1989.
- 5) 小林弘一, 山形利彦, 小型・広帯域リッジ導波管アンテナ, 電子情報通信学会春季総合大会, B-684, 1986 年.
- 6) Y. T. Lo and S. W. Lee (Ed.), Antenna Handbook, Van Nostrand Reinhold, 1988.
- 7) A. W. Rudge, K. Milne, A. D. Olver and P. Knight (Ed.), The handbook of antenna design, IEE UK, 1986.
- 8) C. A. Balanis (Ed.), Modern Antenna Handbook, John Wiley & Sons, 2008.

付録 1 Fresnel 積分の数学的性質

本文 (4) 式は 2 次の変数を指数とする指数関数の積分であり、波動の回折などの説明で初めて Fresnel が扱ったので、これを Fresnel 積分と呼んでいる。ここでは文献 [3] をもとに議論を進める。波動現象の重要関数である Fresnel 積分の定義式には係数あるいは変数の取り方で種々のものがあるが、次の代表的な 3 つを定義しておく。

$$F(x) = \int_0^x \exp(-jt^2) dt = C(x) - jS(x) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \frac{\exp(j\frac{\pi}{4})}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \exp(-jt^2) dt \\ &= \sqrt{\frac{j}{\pi}} \int_x^\infty \exp(-jt^2) dt \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} F_2(x) &= \frac{\exp[j(\frac{\pi}{4} + x^2)]}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \exp(-jt^2) dt \\ &= \exp(jx^2) F_1(x) \end{aligned} \quad (9)$$

なお、引数 x は実数とする。第 (7) 式をみても分かるように、Fresnel 積分の呼び方は 2 つの実数積分に対して用いられる。しかし、 $F(x)$ を実部と虚部に分けることは何の利点ももたない。これは平面波 $\exp(jkx)$ を $\cos(kx)$ と $\sin(kx)$ に分離しないことから伺える。

さて最初に、引数が 0 の $F_1(x)$ の値を求める。Laplace 変換を使うと直ちに解が得られるが、この付録では敢えて複素関数を使って導出する。実関数の積分に対して、複素積分を経由して計算する例である。まず、

$$F_1(0) = F_2(0) = \frac{\exp(j\frac{\pi}{4})}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp(-jt^2) dt \quad (10)$$

で積分 $I = \int_0^\infty \exp(-jt^2) dt$ を求めるため、次のような複素積分を行なう。図 17 は積分路 C を示したものであり、この C を一周して整関数 $\exp(-z^2)$ 、 $z = x + jy$ を積分する。このとき、次の関係式を得る。

$$0 = \int_C \exp(-z^2) dz = \int_0^R \exp(-x^2) dx + \int_\Gamma \exp(-z^2) dz + \int_{BO} \exp(-z^2) dz \quad (11)$$

この第 2 項については、積分が消滅することを予想して次のように操作する。

$$\begin{aligned} I_2 &= \left| \int_\Gamma \exp(-z^2) dz \right| = \left| jR \int_0^{\pi/4} \exp(-R^2 + j3\theta) d\theta \right| \\ &\leq \left| R \int_0^{\pi/4} \exp(-R^2 \cos 2\theta) d\theta \right| \\ &= R \int_0^{\pi/2} \exp(-R^2 \cos t) dt \end{aligned} \quad (12)$$

さらに、 $t = \pi/2 - u$ において変数変換すると、

$$\begin{aligned} &R \int_0^{\pi/2} \exp(-R^2 \sin u) du \\ &< R \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{2R^2}{\pi} u\right) du = \frac{\pi}{2R} [1 - \exp(-R^2)] \end{aligned} \quad (13)$$

を得る。これで、 $R \rightarrow \infty$ とすると最後の式は 0 となり、絶対値であるので $I_2 = 0$ となる。次いで、第 (11) 式の右辺第 3 項の積分に対して $z = r \exp(j\pi/4)$ と変数変換する。これは、 $dz = \exp(j\pi/4) dr$ であるので、

$$\begin{aligned} I_3 &= \exp\left(j\frac{\pi}{4}\right) \int_R^0 \exp\left[-r^2 \exp\left(j\frac{\pi}{2}\right)\right] dr \\ &= -\frac{1+j}{\sqrt{2}} \int_0^R \exp(-jr^2) dr \end{aligned} \quad (14)$$

と計算される。第 1 項の積分は

$$I_1 = \int_0^{R \rightarrow \infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}/2$$

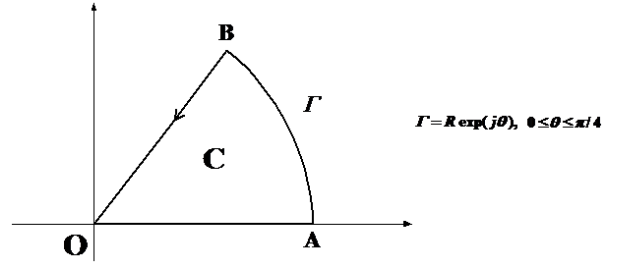


図-17 積分路: $C = OA + \Gamma + BO$

Fig. 17 Contour of integration: $C = OA + \Gamma + BO$

と計算されるので、第 (11) 式は最終的に

$$0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + 0 - \frac{1+j}{\sqrt{2}} \int_0^{R \rightarrow \infty} \exp(-jr^2) dr \quad (15)$$

となる。これより、積分 I は次式で評価される。

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \exp(-jt^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp\left(-j\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{4} (1-j) \end{aligned} \quad (16)$$

最終的に、 $F_1(x=0)$ の値は

$$F_1(0) = F_2(0) = \frac{1}{2} \quad (17)$$

となる。これは簡単な物理的意味を持っている。半平面を含む完全導体の楔に電磁波が照射すると、角 (edge) を境に照射する領域としない領域に分離できる。この境界上の回折界の値は上式の値をとる。境界上でエネルギーの半分になっている。また、第 (16) 式の結果を使えば、 $\int_x^\infty = \int_0^\infty - \int_0^x$ であるから、直ちに

$$F_1(x) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{j}{\pi}} F(x) \quad (18)$$

の関係が得られる。

Fresnel 積分の対称性は

$$\begin{aligned} F(x) + F(-x) &= 0, \\ F_1(x) + F_1(-x) &= 1, \\ F_2(x) + F_2(-x) &= \exp(jx^2) \end{aligned} \quad (19)$$

で与えられる。この式の証明は簡単なので省略する。

高次の回折界を求めるさいに微分の漸化式が必要になる場合がある。これは、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} F_1(x) &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-j\left(x^2 - \frac{\pi}{4}\right)\right], \\ \frac{\partial}{\partial x} F_2(x) &= j2x F_2(x) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(j\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned} \quad (20)$$

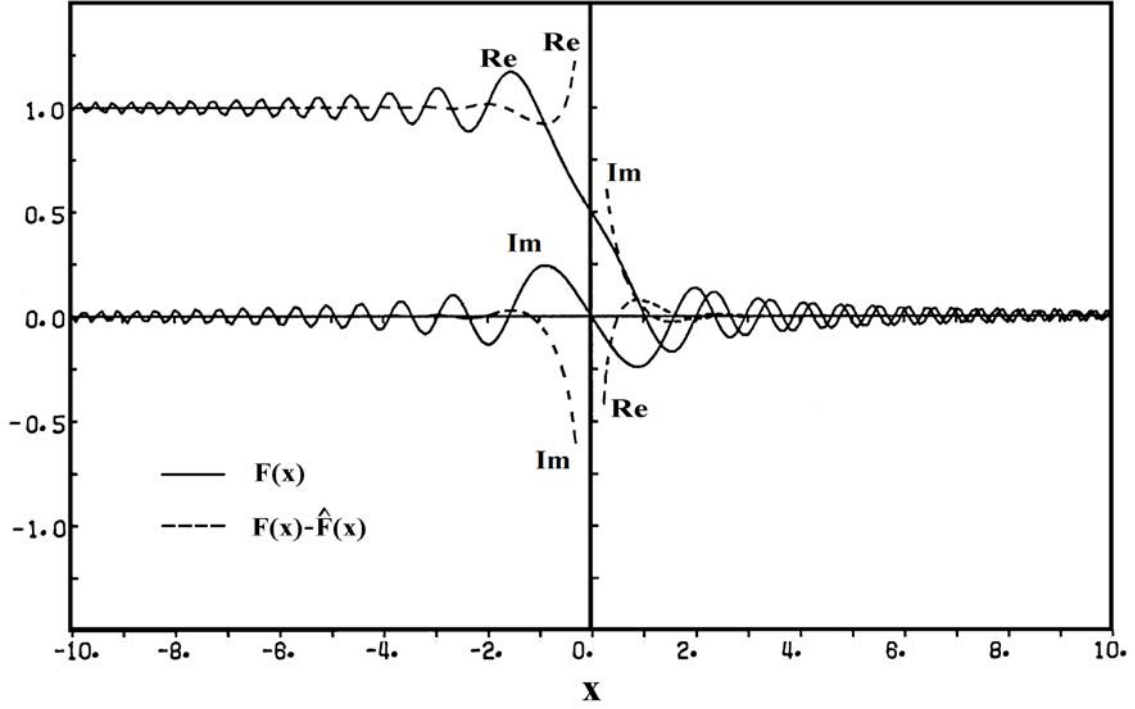


図-18 Fresnel 積分の漸近解の精度

Fig.18 Accuracy for asymptotic solution of Fresnel integral

の関係が計算されるので、 $F_2(x)$ の漸化式は次のようになる。

$$F_2^{(n)}(x) = j2xF_2^{(n-1)}(x) + j2(n-1)F_2^{(n-2)}(x),$$

$$n \geq 2 \quad (21)$$

引数 x が小さい $x \ll 1$ のときの級数 (Taylor) 展開を求めておく。これは、 $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ を利用すると、

$$F(x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-jt^2)^n}{n!} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-j)^n}{n!} \int_0^x t^{2n} dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-j)^n}{n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (22)$$

$$F_1(x) = \frac{1}{2} - \frac{x \exp(j\frac{\pi}{4})}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-jx^2)^n}{n!(2n+1)} \quad (23)$$

$$F_2(x) = \frac{\exp(jx^2)}{2} - \frac{x \exp[j(\frac{\pi}{4} + x^2)]}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-jx^2)^n}{n!(2n+1)}$$

$$(24)$$

が計算される。

最後に、もっと重要な性質となる引数大きい値の場合、つまり Fresnel 積分の漸近展開を考える。これには、積分 $\int_x^{\infty} \exp(-jt^2) dt$ に部分積分を順次用いることにより、 x の逆数に展開された漸近式が得られることを利用すればよい。 x の + 向と - 向の 2 つの方向に分けて考える。初めに、 $x \rightarrow \infty$ の場合は

$$\int_x^{\infty} \exp(-jt^2) dt$$

$$= \left[-\frac{\exp(-jt^2)}{j2t} \right]_x^{\infty} - \frac{1}{j2} \int_x^{\infty} \frac{\exp(-jt^2)}{t^2} dt$$

$$= \frac{e^{-jx^2}}{j2x} + \frac{1}{(-j2)^2} \left\{ \left[\frac{e^{-jt^2}}{t^3} \right]_x^{\infty} + 3 \int_x^{\infty} \frac{e^{-jt^2}}{t^4} dt \right\}$$

$$= \frac{e^{-jx^2}}{j2x} - \frac{e^{-jx^2}}{(-j2)^2 x^3} - \frac{3e^{-jx^2}}{(-j2)^3 x^5} + \frac{15}{(-j2)^3} \int_x^{\infty} \frac{e^{-jt^2}}{t^6} dt \quad (25)$$

より、 $F_1(x)$ は次式で与えられる。

$$F_1(x) = \frac{\exp[j(\frac{\pi}{4} - x^2)]}{j2\pi x}$$

$$\cdot \sqrt{\pi} \left\{ 1 + \frac{1}{2}(-jx^2)^{-1} + \frac{3}{4}(-jx^2)^{-2} + \frac{15}{8}(-jx^2)^{-3} + \dots \right\} \quad (26)$$

ここで、引数が半整数の Gamma 関数

$$\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2m)!}{2^{2m}m!}\sqrt{\pi} \quad (27)$$

を用いると、次のように表示できる。

$$\begin{aligned} F_1(x) &\sim \frac{\exp\left[-j\left(\frac{\pi}{4}+x^2\right)\right]}{2\pi x} \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) (-jx^2)^{-m} \\ F_2(x) &\sim \frac{\exp\left(-j\frac{\pi}{4}\right)}{2\pi x} \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) (-jx^2)^{-m} \end{aligned} \quad (28)$$

$x \rightarrow \infty$ の極値では、 $F_1(x)$, $F_2(x)$ の実部と虚部は共に 0 に漸近する。

負の無限大に x が近づく場合は、先の対称性が使える。つまり、(28) 式の級数中の外は奇関数になっているので、 $|x| \rightarrow \infty$ のとき

$$\begin{aligned} F_1(x) &\sim U(-x) + \hat{F}_1, \\ \hat{F}_1(x) &= \frac{\exp\left[-j(\pi/4+x^2)\right]}{2\pi x} \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) (-jx^2)^{-m} \\ F_2(x) &\sim U(-x) + \hat{F}_2, \\ \hat{F}_2(x) &= \frac{\exp(-j\pi/4)}{2\pi x} \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) (-jx^2)^{-m} \end{aligned} \quad (29)$$

となる。ここで、 $U(\tau)$ は Hevisides のステップ関数であり、

$$U(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{for } \tau > 0 \\ 0 & \text{for } \tau < 0 \end{cases} \quad (30)$$

で定義される。 $x \rightarrow -\infty$ のとき、ステップ関数の寄与で $F_1(x)$ と $F_2(x)$ は 1 に収束することが分かる。図-18 は $F_1(x) - \hat{F}_1(x)$ と第 (7) 式の $F_1(x)$ を比較したものである。同図では実数部と虚数部に分けてプロットしてある。予想通り、 $|x| > 2$ 辺りから $F_1(x) - \hat{F}_1(x)$ は $U(-x)$ に収束している。なお、 $\hat{F}_1(x)$ は $m = 0$ の初項だけの値を用いている。

付録 2 拡張 Fresnel 積分

一様な指数関数の Fourier 変換は sinc 関数になる。被積分関数が一様な電磁界あるいは電磁流分布の場合はアンテナパターンが sinc 関数になり、時間波形の場合は周波数スペクトラムが sinc 関数になる。何れも位相項が一次関数で振幅に重みがないときである。では、振幅に変化があるときはどうなるのか。

まず、関数 $K_n(u)$ を標準化関数、すなわち sinc 関数を基底とし、その高次の重ね合わせとして表す。これは位相項が線形の 1 次関数で与えられ振幅関数が高次多項

式の場合の積分に相当する。位相変化が比較的緩やかな場合には電磁流分布、つまり散乱体の曲率による振幅変化を考慮すると、放射積分は次の関数 $K_n(u)$ の形の重ね合わせで全体の散乱界あるいは放射界が表示される。関数 $K_n(u)$ の定義は

$$K_n(u) = \int_{-1}^1 t^n \exp(jut) dt \quad (31)$$

で与えられる。漸化式を求める際の基本的な方法である部分積分を使うと、

$$\begin{aligned} K_n(u) &= \int_{-1}^1 t^n \frac{1}{ju} \frac{d}{dt} (\exp(jut)) dt \\ &= \frac{1}{ju} [t^n \exp(jut)]_{-1}^1 - \frac{n}{ju} \int_{-1}^1 t^{n-1} \exp(jut) dt \\ &= \frac{1}{ju} \{ \exp(ju) - (-1)^n \exp(-ju) - nK_{n-1}(u) \}, \\ &\quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (32)$$

と展開される。ここで、 $n = 0$ の場合は次のように計算される。

$$\begin{aligned} K_0(u) &= \int_{-1}^1 \exp(jut) dt = 2\text{sinc}(u), \\ \text{sinc}(u) &= \frac{\sin(u)}{u} \end{aligned} \quad (33)$$

また、 $K_n(u)$ の $u = 0$ の値、および $|u| \ll 1$ のときの表示式を求めておくと、

$$\begin{aligned} K_n(u=0) &= \int_{-1}^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \{1 - (-1)^{n+1}\} \\ K_n(|u| \ll 1) &= \int_{-1}^1 t^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(jut)^m}{m!} dt \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ju)^m}{m!} \int_{-1}^1 t^{n+m} dt \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ju)^m}{m!} \frac{1}{n+m+1} \{1 - (-1)^{n+m+1}\} \end{aligned} \quad (34) \quad (35)$$

のようになる。

位相項を 1 次まで考慮した積分は上記の関数 $K_n(u)$ で表される。これを 2 次まで拡張した場合を考える。結果は前述の Fresnel 積分の漸化式となり、Fresnel 積分をもっと一般的に表すことに相当するので、拡張 Fresnel 積分と呼んでおく。これは位相を 2 次関数まで考慮しているの、散乱界あるいは放射界の精度は 1 次のものよりも改善できることが期待できる。実際の解析では、2 次方程式で表される 2 次曲面による回折界の計算に必要となる [3]。

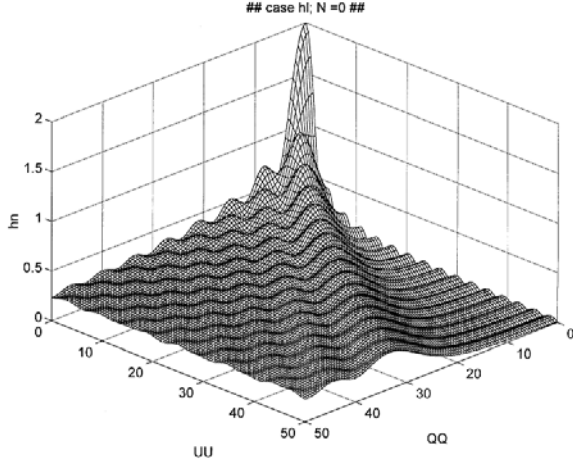


図-19 拡張 Fresnel 積分 $H_{n=0}(q, u)$; $q, u > 0$ からの鳥瞰図

Fig. 19 Extended Fresnel Integral $H_{n=0}(q, u)$; view from $q, u > 0$

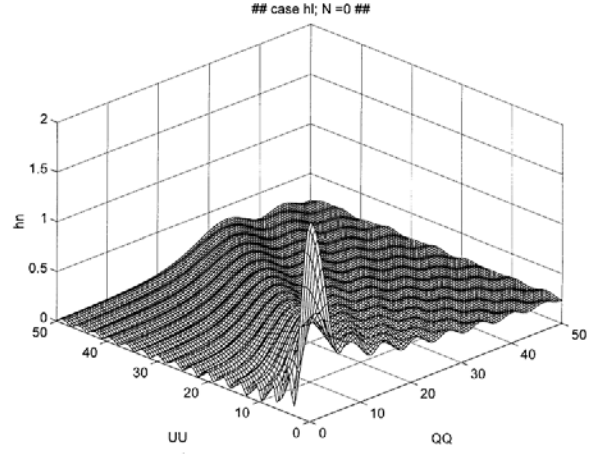


図-20 拡張 Fresnel 積分 $H_{n=0}(q, u)$; $q, u < 0$ からの鳥瞰図

Fig. 20 Extended Fresnel Integral $H_{n=0}(q, u)$; view from $q, u < 0$

今、関数 $H_n(q, u)$ を次式で定義する。

$$H_n(q, u) = \int_{-1}^1 s^n \exp[j(qs^2 + us)] ds \quad (36)$$

この積分を先の Fresnel 積分で表すため、適当な変数変換の後、部分積分を用いて漸化式を求める。まず、第 (36) 式の指数部を $qs^2 + us = \delta t^2$, $\delta = \text{sgn}(q)$ で変換する。このとき、 $s = t/\sqrt{q} - u/2q$ となり、(36) 式は次のように変換される。

$$H_n(q, u) = \frac{\exp[-ju^2/(4q)]}{\sqrt{|q|}} \int_{T_2}^{T_1} \left(\frac{t}{\sqrt{|q|}} - \frac{u}{2q} \right)^n \exp(j\delta t^2) dt \quad (37)$$

この積分は部分積分を行なうことにより、以下に示すように Fresnel 積分で表すことができる。

$$\begin{aligned} H_n(q, u) &= \frac{\exp[-ju^2/(4q)]}{\sqrt{|q|}} \int_{T_2}^{T_1} \left(\frac{t}{\sqrt{|q|}} - \frac{u}{2q} \right) \cdot \left(\frac{t}{\sqrt{|q|}} - \frac{u}{2q} \right)^{n-1} \frac{1}{j\delta 2t} \frac{d}{dt} \exp(j\delta t^2) dt \\ &= \frac{\exp[-ju^2/(4q)]}{j2q} \int_{T_2}^{T_1} \left(\frac{t}{\sqrt{|q|}} - \frac{u}{2q} \right)^{n-1} \cdot \frac{d}{dt} \exp(j\delta t^2) dt \\ &\quad - \frac{u \exp[-ju^2/(4q)]}{j4q\sqrt{|q|}} \int_{T_2}^{T_1} \frac{1}{t} \left(\frac{t}{\sqrt{|q|}} - \frac{u}{2q} \right)^{n-1} \cdot \frac{d}{dt} \exp(j\delta t^2) dt \end{aligned} \quad (38)$$

このうち第 1 項は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\exp[-ju^2/(4q)]}{j2q} \left\{ \left[\left(\frac{t}{\sqrt{|q|}} - \frac{u}{2q} \right)^{n-1} \exp(j\delta t^2) \right]_{T_2}^{T_1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{n-1}{\sqrt{|q|}} \int_{T_2}^{T_1} \left(\frac{t}{\sqrt{|q|}} - \frac{u}{2q} \right)^{n-2} \exp(j\delta t^2) dt \right\} \\ &= \frac{\exp[j(q+u)] - (-1)^{n-1} \exp[j(q-u)]}{j2q} \\ &\quad - \frac{n-1}{j2q} H_{n-2}(q, u) \end{aligned} \quad (39)$$

また、第 2 項は次式のようにになる。

$$\begin{aligned} A_2 &= -\frac{u \exp[-ju^2/(4q)]}{j4q\sqrt{|q|}} \int_{T_2}^{T_1} j2\delta \left(\frac{t}{\sqrt{|q|}} - \frac{u}{2q} \right)^{n-2} \cdot \exp(j\delta t^2) dt \\ &= -\frac{u}{2q} H_{n-1}(q, u) \end{aligned} \quad (40)$$

従って最終的に、(36) 式の拡張 Fresnel 積分 $H_n(q, u)$ は次のような漸化式で表すことができる。

$$\begin{aligned} H_n(q, u) &= \frac{\exp[j(q+u)] - (-1)^{n-1} \exp[j(q-u)]}{j2q} \\ &\quad - \frac{u}{2q} H_{n-1}(q, u) - \frac{n-1}{j2q} H_{n-2}(q, u), \quad n = 2, 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (41)$$

ただし、 $H_0(q, u)$, $H_1(q, u)$ は定義式より直接以下のよう求められる。

$$H_0(q, u) = \int_{-1}^1 \exp[j(qs^2 + us)] ds$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\exp\left(-j\frac{u^2}{4q}\right)}{\sqrt{|q|}} \int_{T_2}^{T_1} \exp[j\delta t^2] dt \\
&= \frac{\exp\left(-j\frac{u^2}{4q}\right)}{\sqrt{|q|}} \{F(T_1) - F(T_2)\} \\
&= \frac{\exp\left(-j\frac{u^2}{4q}\right)}{\sqrt{|q|}} \cdot \{C(T_1) - C(T_2) + j\delta [S(T_1) - S(T_2)]\} \\
&T_1 = \sqrt{|q|} \left(\frac{u}{2q} + 1\right), \quad T_2 = \sqrt{|q|} \left(\frac{u}{2q} - 1\right), \\
&\delta = \text{sgn}(q) \\
H_1(q, u) &= \frac{\exp\left(-j\frac{u^2}{4q}\right)}{\sqrt{|q|}} \int_{T_2}^{T_1} \left(\frac{t}{\sqrt{|q|}} - \frac{u}{2q}\right) \exp(j\delta t^2) dt \\
&= \frac{\exp\left(-j\frac{u^2}{4q}\right)}{|q|} \int_{T_2}^{T_1} t \exp(j\delta t^2) dt - \frac{u}{2q} H_0(q, u) \\
&= \frac{\exp\left(-j\frac{u^2}{4q}\right)}{j2q} [\exp(j\delta t^2)]_{T_2}^{T_1} - \frac{u}{2q} H_0(q, u) \\
&= \frac{\exp[j(q+u)] - \exp[j(q-u)]}{j2q} - \frac{u}{2q} H_0(q, u) \\
&= \frac{\exp(jq)}{q} \sin(u) - \frac{u}{2q} H_0(q, u) \quad (43)
\end{aligned}$$

ここで、 $q = 0$ のときは $H_n(q = 0, u) = K_n(u)$ となる。従って、 $|q| \ll 1$ である場合、関数 $H_n(q, u)$ は $K_n(u)$ で表すことができ、次のように展開される。

$$\begin{aligned}
H_n(|q| \ll 1, u) &= \int_{-1}^1 s^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(jq s^2)^m}{m!} \exp[jus] ds \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(jq)^m}{m!} \int_{-1}^1 s^{n+2m} \exp[jus] ds \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(jq)^m}{m!} K_{n+2m}(u) \\
&= K_n(u) + jq K_{n+2}(u) - \frac{q^2}{2} K_{n+4}(u) - j \frac{q^3}{6} K_{n+6}(u) \\
&\quad + \frac{q^4}{24} K_{n+8}(u) + j \frac{q^5}{120} K_{n+10}(u) + \dots \quad (44)
\end{aligned}$$

関数 $H_n(q, u)$ は前述のように Fresnel 積分 $F(T)$ で表され、 $F(T)$ は多項式近似で数値計算できるので計算時間としては、大きな問題にならない。しかし、散乱体のパッチ形状によっては曲率が大きくなる場合がある。このときパラメータ q, u の値が大きくなって $\sum H_n(q, u)$ の収束性が緩慢になり、漸化式で高次項を求めると誤差が累積する場合がある。このような場合、Fresnel 積分の計算精度を高くすることも必要になる。図-19 および-20 は関数 $H_n(q, u)$ のパラメータ q, u を 0~50 で変化させたときの絶対値を各々 $n = 0$ でプロットしたものである。図-19/20 の $q = 0$ の値は前述の通り標準化パターンと

なっている。

Fresnel 積分は、波動理論での必須の基本関数である。そのため、第 (7) 式の $C(x)$, $S(x)$ の多項式近似によるサブルーチンを FORTRAN 言語で、第 (41) 式の拡張 Fresnel 積分は MATLAB 言語で掲載しておく。

```

SUBROUTINE FRENEL(X, C, S)
PI=3.14159265
SIGN=1.
IF (X.LT. 0.) SIGN=-1.
X=ABS(X)
SQPIH=SQRT(0.5*PI)
SQX=SQRT(X)
IF (X.GT. 2.) GO TO 20
T=16.-X**4
AA=((5.100785E-11*T+5.244297E-9)*T+5.451182E-7)*T+3.273308E-5
AA=((AA*T+1.020418E-3)*T+1.102544E-2)*T+1.840962E-1
BB=((6.677681E-10*T+5.883158E-8)*T+5.051141E-6)*T+2.441816E-4
BB=(BB*T+6.1213E-3)*T+8.02649E-2
C=X*AA*SQPIH*SIGN
S=X**3*BB*SQPIH*SIGN
RETURN
10 T=4./X**2
AA=(((-6.633926E-4*T+3.401409E-3)*T-7.27169E-3)*T+7.428246E-3
AA=((AA*T-4.027145E-4)*T-9.314911E-3)*T-1.207998E-6
AA=AA*T+1.994712E-1
BB=((8.768258E-4*T-4.169289E-3)*T+7.970943E-3)*T-6.792801E-3
BB=((BB*T-3.095341E-4)*T+5.972151E-3)*T-1.606428E-5
BB=(BB*T-2.493322E-2)*T+4.444091E-9
SINX=SIN(X*X)
COSX=COS(X*X)
C=0.5*SQPIH+2.*SQPIH*(SINX*AA+COSX*BB)/X
S=0.5*SQPIH+2.*SQPIH*(-COSX*AA+SINX*BB)/X
C=C*SIGN
S=S*SIGN
RETURN
END

% Extended Fresnel Integrals using MATLAB
clear ;
% input
Nmax = input('n = ');
Qmin = input('Qmin = ');
Qmax = input('Qmax = ');
Umin = input('Umin = ');
Umax = input('Umax = ');
% Fresnel(x) = C(x) + jS(x)
QQ = (Qmax - Qmin)*10 + 1 ; % data area for 'Q'
UU = (Umax - Umin)*10 + 1 ; % data area for 'U'
% data area
T1 = zeros(QQ, UU) ;
T2 = zeros(QQ, UU) ;
c1 = zeros(QQ, UU) ;
c2 = zeros(QQ, UU) ;
s1 = zeros(QQ, UU) ;
s2 = zeros(QQ, UU) ;
H0 = zeros(QQ, UU) ;
H1 = zeros(QQ, UU) ;
Hn = zeros(QQ, UU) ;
% H0, H1
for uu = 1:UU
for qq = 1:QQ
q = Qmin+(qq-1)/10 ;
u = Umin+(uu-1)/10 ;
if abs(q) = 0.01
[CK] = msinc(u, Nmax+8) ;
H0(qq, uu) = CK(1)-0.5*q2*CK(5)+q4*CK(9)/24.
+i*q*(CK(3)-q2*CK(7)/6.) ;
if Nmax 0
H1(qq, uu) = CK(2)-0.5*q2*CK(6)+q4*CK(10)/24.
+i*q*(CK(4)-q2*CK(8)/6.) ;
Hn(qq, uu) = CK(Nmax+1)-0.5*q2*CK(Nmax+5)+q4*CK(Nmax+9)/24.
+i*q*(CK(Nmax+3)-q2*CK(Nmax+7)/6.) ;
end
else
T1(qq, uu) = sqrt(abs(q))*(u/(2.*q)+1) ;
[c1(qq, uu), s1(qq, uu)] = fresnel2(T1(qq, uu)) ;
T2(qq, uu) = sqrt(abs(q))*(u/(2.*q)-1) ;
[c2(qq, uu), s2(qq, uu)] = fresnel2(T2(qq, uu)) ;

```

```

delta = sign(q) ;
CS = c1(qq,uu)-c2(qq,uu)+i*delta*(s1(qq,uu)-s2(qq,uu)) ;
H0(qq,uu) = exp(-i*u2/(4.*q))/sqrt(abs(q))*CS ;
H1(qq,uu) = exp(i*q)/q*sin(u)-u/(2.*q)*H0(qq,uu) ;
end
end
end
% Hn
if Nmax == 0
Hn = H0 ;
elseif Nmax == 1
Hn = H1 ;
else
Hn0 = H0 ;
Hn1 = H1 ;
for n = 2:Nmax
for uu = 1:UU
for qq = 1:QQ
q = Qmin-1+qq ;
u = Umin-1+uu ;
if abs(q) == 0
HN1 = (exp(i*(q+u))-(-1.^(n-1))*exp(i*(q-u)))/(i*2.*q) ;
HN2 = -u/(2.*q)*Hn1(qq,uu) ;
HN3 = -((n-1)/(2.*q*i))*Hn0(qq,uu) ;
Hn(qq,uu) = HN1+HN2+HN3 ;
end
end
end
Hn0 = Hn1 ;
Hn1 = Hn ;
end
end
%
%
function f = func fresnel(x)
c = zeros(size(x));
s = zeros(size(x));
z = x.*2*pi/2;
case1 = (0 < z-4);
case2 = (~case1);
%
% case1
z1 = z(case1);
cc1 = cos(z1);
ss1 = sin(z1);
z1 = 4./z1;
a1 = ((((((8.768258e-4.*z1-4.169289e-3).*z1+7.970943e-3).*z1-
6.792801e-3).*z1...
-3.095341e-4).*z1+5.972151e-3).*z1-1.606428e-5).*z1-2.493322e-
2).*z1+4.444091e-9;
b1 = (((((-6.633926e-4.*z1+3.401409e-3).*z1-7.271690e-
3).*z1+7.428246e-3).*z1...
-4.027145e-4).*z1-9.314911e-3).*z1-1.207998e-6).*z1+1.994712e-
1;
z1 = sqrt(z1);
c(case1) = 0.5+z1.*(cc1.*a1+ss1.*b1);
s(case1) = 0.5+z1.*(ss1.*a1-cc1.*b1);
% case2
z2 = z(case2);
c2 = sqrt(z2);
s2 = z2.*c2;
z2 = (4-z2).*(4+z2);
c(case2) = c2.*(((5.100785e-11.*z2+5.244297e-
9).*z2+5.451182e-7).*z2+3.273308e-5).*z2...
+1.020418e-3).*z2+1.102544e-2).*z2+1.840962e-1);
s(case2) = s2.*(((6.677681e-10.*z2+5.883158e-8).*z2+5.051141e-
6).*z2+2.441816e-4).*z2...
+6.121300e-3).*z2+8.026490e-2);
%
c = abs(c);
s = abs(s);
%
casex = (x < 0);
c(casex) = -c(casex);
s(casex) = -s(casex);
s = -s;
%
f = c+1j*s;
end

```