

DEA 評価者の主観性を取り入れるためのフレームワーク

DEA approach embedding the analyst's intention

○ 青木 真吾 (広島工業大) 井上 和重 (大阪府立大) 梶島 良太 (大阪府立大)

Shingo AOKI, Hiroshima Institute of Technology, s.aoki.sm@it-hiroshima.ac.jp
Kazushige INOUE, Osaka Prefecture University, inoue@mis.cs.osakafu-u.ac.jp
Ryota GEJIMA, Osaka Prefecture University, gejima@mis.cs.osakafu-u.ac.jp

To extend the Assurance Region (AR) approach for DEA (Data Envelopment Analysis), this paper proposed a new approach. The basic idea of this approach is to constrain for the data set while traditional approach is to constrain for the DEA-weight. The merit of proposed method is to take analyst's intention without estimating any infeasible solution.

Key words: Data Envelopment Analysis (DEA), Assurance Region (AR), Decision Support System

1. はじめに

包絡分析法(DEA: Data Envelopment Analysis)は, 事業体(DMU: Decision Making Unit)の相対的な生産効率性を測定するための手法である[1]. この手法の特徴は, 評価対象となる DMU を含む多数の DMU 群のデータから形成されるパレート最適なフロンティア(DEA では, このフロンティアを効率的フロンティアと呼ぶ)を基準に評価を行うことにある. 評価対象となる DMU の評価値は, 自身の活動に最も近いフロンティアと相对比较されることによって求まるため, 評価対象によって異なる点が評価基準となる. 従って, DEA では評価対象である DMU の特徴を考慮した客観的な評価をすることが可能である.

DMU の活動を表すデータ項目(入出力項目), 比較するための DMU 群, そして, 分析に用いる DEA モデルをどのように選択するかは意思決定者に依存するが, これらさえ決定されれば, 誰もがデータに基づく客観的な解を求めることができる.

しかしながら, 実際に DEA を適用する立場に立つと, 客観的な解が算出された上で, データ項目間の操作・調整が必要な場合が多々存在する. これは以下の 2 つの場合に生じうる. 一つ目は, 0(ゼロ)ウェイトと呼ばれる問題が生じる場合である. 分析者は, 調査したい DMU の活動を表すデータ項目を選ぶのだが, 実際に計算をすると, 分析に用いられない項目が多々起こる. 二つ目は, 意思決定者の勘や経験などの主観的な情報をモデルに組み込む場合である. DEA では, データ項目間の関係は独立なものとして扱われる. 従って, DEA が算出する客観的な解は, 意思決定者が思うような項目間の強弱は考慮されていない.

この問題に対処する方法として DEA では領域限定法[2]が提案されているが, 制約条件の設定が難しく, 場合によっては“解なし”が生じてしまう.

そこで, 本研究ではデータ項目間の操作・調整が必要な場合を想定し, これに対処するためのフレームワークについて提案する. 具体的には, 領域限定法において“解なし”が起こらないデータ項目間の比率に対して制約を与える問題から DEA モデルを展開し, ゼロウェイト問題に対する新しい解釈方法について紹介する.

2. 包絡分析法

今, n 個の DMU_j ($j=1,2,\dots,n$) が存在し, それぞれ m 個の入力($x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj}$)と s 個の出力($y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{sj}$)で活動が特徴づけられたとする. このとき, 最も基本的なモデルである CCR モデルは次の(1)式で示される線形計画問題として定式化される.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \sum_{r=1}^s u_r^{(k)} y_{rk} \\ \text{s.t.} \quad & -\sum_{i=1}^m v_i^{(k)} x_{ij} + \sum_{r=1}^s u_r^{(k)} y_{rj} \leq 0 \\ & (j=1,2,\dots,n) \\ & \sum_{i=1}^m v_i^{(k)} x_{ik} = 1 \\ & v_i^{(k)} \geq 0, u_r^{(k)} \geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

ここで, (v_i, u_r) は, それぞれ入力と出力に関するウェイトを示している. 従って, 一番目の制約式は, すべての DMU の活動に対し, 仮想的出力/仮想的入力が“1”以下になるように設定されている. そして, 二番目の制約式は調査したい DMU の仮想的入力を“1”に固定した上で, 目的関数にあるように仮想的出力を最大化するようにウェイトを決定する式として定式化されている.

3. 領域限定法

(1)式より, 調査対象となる DMU の効率性を最も上げるデータ項目に対してのみウェイトが値を持つことになる. 逆に, そうでない項目は“0”ウェイトを持つことになるが, それが, どの程度効率性の向上に関係がないかは(1)式から求めることはできない. このことは数学的には問題がないが, 実用上に問題が生じていると言える.

このような観点からデータ項目間の操作・調査を行う領域限定法が開発されている[2]。この手法は、分析者の持つ何らかの主観をデータ項目間の関係に反映させることで、“0”ウェイトとなるデータ項目の値がどうなっているかを調査する問題と考えることができる。

具体的には、下記の(2)式のような制約を(1)式に追加することなどが方策として採られている[3]。

$$\begin{aligned}\underline{\alpha}_i &\leq \frac{v_i^{(k)}}{v_i^{(k)}} \leq \overline{\alpha}_i \quad (i=2, \dots, m) \\ \underline{\beta}_r &\leq \frac{u_r^{(k)} y_{rk}}{\sum_{r=1}^s u_r^{(k)} y_{rk}} \leq \overline{\beta}_r \quad (r=1, \dots, s)\end{aligned}\quad (2)$$

ここで、 (α_i, β_r) は分析者の主観を反映させるパラメータである。上記は一部の例ではあるが、ウェイトに重要度を与えることで主観性を組み込み、かつ、“0”ウェイトを強制的に解消しようとするものである。しかしながら、この方式ではパラメータの値のつけ方によっては、(1)式の二番目の制約式を満たせず“解なし”となる問題がある。

4. 提案手法

本研究では、従来の領域限定法のように制約条件にデータ項目の重要度を与えるのではなく、近年多目的最適解の解法として見られるように目的関数に重みを与える方法を考える。

まず、(1)式で示されるモデルに関し、出力に関して重要度を設定する方式を考える。具体的には(1)式の目的関数を下記の(3)式のように変更する。

$$\text{Max} \quad \sum_{r=1}^s \gamma_r u_r^{(k)} y_{rk} \quad (3)$$

ここで、 γ_r は出力項目の重要性を表すパラメータである。目的関数に調整を加えているため、(2)式の方式と異なり“解なし”が生じることはない。しかしながら、(2)式の条件より緩和されているため、 γ_r の設定の仕方には工夫が必要である。そこで、このような問題に対する解法のフレームワークを提案するために(2)式の制約式に(3)式の目的関数を加えた線形計画問題の双対問題について考える。双対問題は以下の(4)式のように定式化できる。

$$\begin{aligned}\min \quad & \theta_k \\ \text{s.t.} \quad & \theta_k x_{ik} \geq \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j^{(k)} \quad (i=1, 2, \dots, m) \\ & \gamma_r y_{rk} \leq \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j^{(k)} \quad (r=1, 2, \dots, s) \\ & \theta_k : \text{free}, \lambda_j^{(k)} \geq 0\end{aligned}\quad (4)$$

ここで、 $\lambda_j^{(k)}$ はデータを凸結合するための変数である。 θ_k は入力の縮小率を示す変数であり双対定理により(3)式で示される最適目的関数値と一致する。

γ_r はパラメータであり、 $\gamma_r \neq 0$ とすると(4)式の二番目の制約式は下記のように展開される。

$$y_{rk} \leq \sum_{j=1}^n \frac{y_{rj} \lambda_j^{(k)}}{\gamma_r} \quad (r=1, 2, \dots, s) \quad (5)$$

(5)式より、(4)式の解釈は、修正された出力データで作られる凸結合による最大の出力を維持した上でどこまで入力を縮小できるかという問題と考えることができる。

次に、縮小率について考える。(4)式よりすべての入力に様に縮小率 θ_k が掛かっている。ここで出力の重要度を設定したのと同様にパラメータ η_i を用いて修正を行うことにすると、(4)式の一番目の制約式は次のように展開される。

$$\theta_k x_{ik} \geq \sum_{j=1}^n \frac{x_{ij}}{\eta_i} \lambda_j^{(k)} \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (6)$$

以上より、入出力項目それぞれに対する重要度を示すパラメータ (η_i, γ_r) を組み込んだモデルは下記のように定式化される。

$$\begin{aligned}\min \quad & \theta_k \\ \text{s.t.} \quad & \theta_k x_{ik} \geq \sum_{j=1}^n \frac{x_{ij}}{\eta_i} \lambda_j^{(k)} \quad (i=1, 2, \dots, m) \\ & y_{rk} \leq \sum_{j=1}^n \frac{y_{rj}}{\gamma_r} \lambda_j^{(k)} \quad (r=1, 2, \dots, s) \\ & \theta_k : \text{free}, \lambda_j^{(k)} \geq 0\end{aligned}\quad (7)$$

(7)式より、提案手法は、従来の領域限定法と異なり、凸結合に用いるデータに制約が掛かっていることがわかる。

(η_i, γ_r) の値をどのように設定するかは分析者に依存するが、(7)式は“解なし”が出ないことを保証した上で分析者の意図を組み込むことができ、間接的に“0”ウェイトを減少させるフレームワークとなっている。

5. おわりに

本研究では、データ項目間の操作・調整が必要な場合を想定し、これを対処するためのフレームワークについて提案した。提案手法は、多目的最適化で用いられるアプローチを基に展開したものとなっており、従来手法と異なり“解なし”がでないことを保証した上で分析者の意図を組み込むことが可能なモデルとなっている。

今後の展望としては、提案モデルは入力間あるいは出力間の関係のみの重要度の設定となっており入出力間の関係を組み込むためのモデルを開発すること。そして、パラメータの合理的な設定方法を構築することなどが挙げられる。

文献

- [1] W. W. Cooper, L. M. Seiford, and K. Tone: “Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software Second Edition”, Springer, New York, USA, 2007.
- [2] R. G. Thompson, F. D. Singleton, R. M. Thrall, and B. A. Smith: “Comparative Site Evaluations for Locating a High-Energy Physics Lab in Texas”, *Interfaces*, Vol. 16, pp. 35-49, 1986.
- [3] S. Liu: “A fuzzy DEA/AR approach to the selection of flexible manufacturing systems”, *Computers and Industrial Engineering*, Vol. 54, pp. 66-76, 2008.