1B3-3

厳密な線形化手法による非線形モデル予測制御

Nonlinear Model Predictive Control Approach Using Feedback Linearization

○ 谷口唯成 (東海大学), 菅野道夫 (European Centre for Soft Computing)

Tadanari TANIGUCHI, Tokai University, taniguchi@tokai-u.jp
Michio SUGENO, European Centre for Soft Computing, SPAIN

We propose nonlinear model predictive control for piecewise bilinear systems based on feedback linearization. Model predictive control approaches are an attractive feedback strategy for a class of nonlinear systems with a relatively rabid motion. An illustrative example is given to show the validity of the proposed methods.

Key Words: nonlinear model predictive control, feedback linearization, piecewise bilinear systems,

1 緒言

区分的双線形システムによるモデル予測制御 [1, 2] の設計アルゴリズムを提案する．モデル予測制御はプロセス制御手法の一つであり，制御対象の挙動を予測するモデルを用いてオンラインで最適制御問題を考慮するものである．一般的な最適制御とは異なり，有限時間での最適制御を行い，コスト関数に対して有限ステップでの評価を行う．利点として，制御系設計アルゴリズムが直感的で理解しやすい，制御系の制約条件を陽に表現できる．モデル化誤差に対するロバスト性，外乱抑制等の特徴を有する点が挙げられる．しかし非線形制御系を取り扱うための制御系のモデリングは通常，容易ではない。

そこで本研究では，非線形制御系を取り扱うモデルとして，区分的双線形システム [3, 4, 5, 6] を用いる．区分的双線形システムによる制御系設計では，制御対象の状態空間を区分領域に分割し，矩形領域の端点による凸結合としてモデル化を行うため，モデル化が容易であることが特徴である．モデル化精度についても区分領域の分割数によって可視的に変更することが可能である．区分的双線形システムの安定化には，厳密な線形化手法 [5] による制御系設計を適用する．これにより多次元システムへの適用，領域分割数の増大に対して，計算時間の短縮化が行えるようになる．

最後にシミュレーション実験でカオス的な挙動を示す非線形システムに適用し，提案手法の有効性の検討を行う．

2 モデル予測制御の定式化

本節では，一般的なモデル予測制御で取り扱う有限時間最適制御問題を示す．以下の離散系システムを考える．

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k), \\ y(k) &= C(k)x(k) \end{aligned} \tag{1}$$

ここで状態 $x(k) \in \Re^n$, 入力 $u(k) \in \Re^m$, 出力 $y(k) \in \Re^p$), $A(k) \in \Re^{n\times n}$, $B(k) \in \Re^{n\times m}$, $C(k) \in \Re^{p\times n}$ である．

ここで有限時間最適制御問題は，

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} \left(x(k)' Q x(k) + u(k) R u(k) + x(N)' P_f x(N) \right) \tag{2}$$

システム (1) に対して，コスト関数 (2) 式を最小化する制御入力

$$\mathcal{U}^* = \begin{pmatrix} u(0) & u(1) & \cdots & u(N-1) \end{pmatrix}$$

を求めることである．ここで $Q > 0$, $R > 0$, $P_f \geq 0$ であり，N は制御ホライズンである．

3 区分的双線形モデルの標準形

本節では，非線形システム (3) に対する区分的双線形モデルについて説明する．紙面の都合上，2 次元システムの場合のみ説明する．多次元システムの場合も同様に適用可能である．

$$\dot{x}(t) = f_{org}(x(t)) + g_{org}(x(t))u(t) \tag{3}$$

区分的双線形モデルは図 1 に示すように，状態空間を矩形の領域 R_{ij} に分割し，領域ごとにモデルを構成する．図 1 の領域分割方法は原点付近の領域において原点を端点とするゼロ端点分割である．一般に領域 R_{ij} の端点ベクトル $d(i,j)$ は $d(i,j) \equiv (d_1(i), d_2(j))^T$ である．ここで，$d_1(i) < d_1(i+1)$, $d_2(j) < d_2(j+1)$, i, j はそれぞれ整数である．以下では，任意の領域を $R_{\sigma\tau}$ で表すが，$R_{\sigma\tau}$ は $d(\sigma,\tau)$, $d(\sigma+1,\tau)$, $d(\sigma,\tau+1)$, $d(\sigma+1,\tau+1)$ を端点として持ち，区分的双線形モデルは矩形領域の端点による凸結合として表現される．

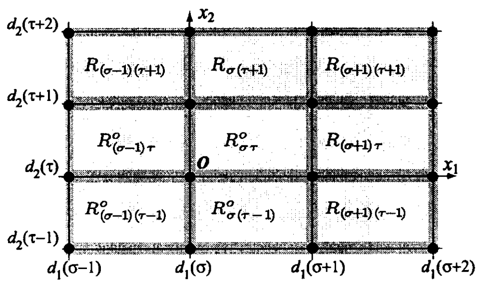

Fig. 1: 2 次元状態空間での領域分割

$x(t) \in R_{\sigma\tau}$ において，$x(t)$, $f(x(t))$, $g(x(t))$ を区分的双線形システムで表現（パラメトリック表現）したモデルは以下のように記述する．

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(x(t)), \tag{4}$$

ここで

$$f(x(t)) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \sum_{i=\sigma}^{\sigma+1} \sum_{j=\tau}^{\tau+1} \omega_1^i(x_1(t)) \omega_2^j(x_2(t)) f(i,j),$$

$$g(x(t)) = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \sum_{i=\sigma}^{\sigma+1}\sum_{j=\tau}^{\tau+1} \omega_1^i(x_1(t))\omega_2^j(x_2(t))g(i,j),$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \sum_{i=\sigma}^{\sigma+1}\sum_{j=\tau}^{\tau+1} \omega_1^i(x_1(t))\omega_2^j(x_2(t))d(i,j),$$

$$\omega_i^\sigma(x_i) = (d_i(\sigma+1) - x_i)/(d_i(\sigma+1) - d_i(\sigma)),$$
$$\omega_i^{\sigma+1}(x_i) = (x_i - d_i(\sigma))/(d_i(\sigma+1) - d_i(\sigma)),\ i = 1, 2.$$
$$\omega_j^\tau(x_j) = (d_j(\tau+1) - x_j)/(d_j(\tau+1) - d_j(\tau)),$$
$$\omega_j^{\tau+1}(x_j) = (x_j - d_j(\tau))/(d_j(\tau+1) - d_j(\tau)),\ j = 1, 2.$$

4 区分的双線形モデルによるモデル予測制御手法

本節では，区分的双線形モデルによるモデル予測制御の設計アルゴリズムについて説明する．以下の手順により設計を行う．

1. 区分的双線形システムの厳密な線形化
   区分的双線形システムの制御系設計のため，厳密な線形化手法を適用する．
2. 厳密な線形化システムの離散化
   本論文で適用するモデル予測制御手法では，制御対象 (1) が離散系であるため，連続系である厳密な線形化システム (5) に対しサンプリング時間 T による離散化を行う．
3. モデル予測制御による区分的非線形制御器の設計
   ここでは，終端コスト $x(N)'P_fx(N)$ の $P_f \geq 0$ とコスト関数 (2) 式を最小化する入力 $\mathcal{U}^*$ を導出する．
4. 離散系である区分的非線形制御器を連続系に変換
   元のオリジナル非線形システム (3) を制御するために離散システムである制御器を 0 次ホールドを適用し、連続システムへ変換する．

4.1 区分的非線形制御器の設計

従来行ってきた区分的双線形モデルによる制御系設計では，設計条件が双線形行列不等式 (BMI) になるため，領域分割数が多くなると設計変数パラメータが増大し，実用時間内に最適解を導出することが困難であった。そこで，厳密な線形化手法 [8] による制御系の設計手法を区分的双線形モデルに対し適用する．これにより，

1. 安定化制御器設計条件の解法が非線形計画問題ではなく，代数的な数式処理であるため，特に領域分割数が増大したとき制御器設計の計算時間が従来法に比べて大幅に短縮される
2. 従来、領域分割方法毎（原点が分割領域の端点とする場合と、原点を内部に含む場合）に設計手法を考慮していたが、本提案手法では設計手法が領域分割方法に依存しない
3. 特別な条件を考慮せずに，領域ごとの制御器，リアプノフ関数等の連続性が保たれる

などの特徴を有する．

(4) 式の非線形システムに対し，厳密な線形化手法を適用する．線形化後のシステムは

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bv(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v(t) \quad (5)$$

となる．ただし $z(t) = \phi(x(t))$ は座標変換式である．

以下の条件を満足するとき，(4) 式のシステムは上記の線形化制御器で入出力状態線形化が可能であるといえる．

定理 1 [8] (4) 式の非線形システムが厳密な線形化可能であるための必要十分条件は，以下の条件を満足する領域 Ω が存在することである．

1. $\{g,\ ad_fg\}(x(t))$ がすべての $x \in \Omega$ で線形独立.
2. $\{ad_f^0g,\ ad_f^0g\}(x(t))$ が Ω でインボリューティブ.

次に座標変換式 $z(t) = \phi(x(t))$ と制御器のパラメータ $\alpha(x(t))$, $\beta(x(t))$ を決定する。非線形システム (4) 式に対する厳密な線形化制御を実現する制御器のパラメータは以下のように決定できる．

$$\begin{aligned} u(x(t)) =& \alpha(x(t)) + \beta(x(t))v(t) \\ =& -\frac{L_f^2\phi(x(t))}{L_gL_f\phi(x(t))} + \frac{1}{L_gL_f\phi(x(t))}v(t) \end{aligned}$$

なお $v(t)$ は (5) 式の線形制御器 $v(t) = -Fz(t)$ として容易に決定できる．

4.2 線形化システムの離散化

線形化システム (5) をサンプリング時間 T[s] により離散化すると

$$\begin{aligned} z(k+1) =& \bar{A}z(k) + \bar{B}v(k) \\ =& \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z(k) + \begin{pmatrix} T^2/2 \\ T \end{pmatrix} v(k), \quad (6) \\ v(k) =& -\bar{F}z(k) \end{aligned}$$

となる．

4.3 有限時間最適制御器の設計

4.3.1 終端コスト

以下の LMI 条件 (7), (8) 式を満足する LMI 変数 X, M が存在するならば，終端コスト $x(N)'P_fx(N)$ の $P_f \geq 0$ は存在する．

$$X \geq 0, \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} X & (\bar{A}X - \bar{B}\bar{M})' & \bar{M}' & X \\ \bar{A}X - \bar{B}\bar{M} & X & 0 & 0 \\ \bar{M} & 0 & R^{-1} & 0 \\ X & 0 & 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} > 0 \quad (8)$$

ただし $P_f = X^{-1}$, $\bar{M} = \bar{F}X$ である．

4.3.2 コスト関数を最小化する $\mathcal{U}^*$

(6) 式に対するコスト関数 (2) 式は以下のように表現できる．

$$J = \mathcal{Z}'\mathcal{Q}\mathcal{Z} + \mathcal{U}'\mathcal{R}\mathcal{U}$$

ただし，

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(0) + \mathcal{C}\mathcal{U},$$
$$\mathcal{Z}(0) = \begin{pmatrix} z(0) & \bar{A}z(0) & \cdots & \bar{A}^{N-1}z(0) & \bar{A}^Nz(0) \end{pmatrix}',$$

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & & \cdots & & 0 \\ \bar{B} & 0 & & & \\ \bar{A}\bar{B} & \bar{B} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \bar{A}^{N-2}\bar{B} & \bar{A}^{N-3}\bar{B} & \cdots & \bar{B} & 0 \\ \bar{A}^{N-1}\bar{B} & \bar{A}^{N-2}\bar{B} & \cdots & \bar{A}\bar{B} & \bar{B} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} v(0) & v(1) & \cdots & v(N-2) & v(N-1) \end{pmatrix}',$$
$$\mathcal{Q} = \mathrm{diag}\begin{pmatrix} Q & \cdots & Q & P_f \end{pmatrix},\ \mathcal{R} = \mathrm{diag}\begin{pmatrix} R & \cdots & R \end{pmatrix}.$$

コスト関数を最小化する $\mathcal{U}^*$ は以下の条件式に対して QR アルゴリズムを適用し求めることができる.

$$(2\mathcal{C}'\mathcal{Q}\mathcal{C}+2\mathcal{R})\,\mathcal{U}^*+2\mathcal{C}'\mathcal{Q}\mathcal{Z}(0)=0$$

導出された $\mathcal{U}^*$ のうち, $v(0)=\mathcal{U}^*(1)$ のみ制御対象に適用する.

5 適用例

提案手法を以下の非線形システムに適用する.

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2(t)\\ -x_1(t)+(1-x_1(t)^2)x_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}u(t) \quad (9)$$

まず領域分割により区分的双線形モデルを構成する. 領域分割は状態空間を 5×5 で分割し, 各領域の端点は $x_1(t)$ に対しては, $d_1\in[-\pi/2\ \ -3\pi/5\ \ -\pi/5\ \pi/5\ 3\pi/5\pi]$, $x_2(t)$ に対しては, $d_2\in[-\pi/2\ \ -3\pi/5\ \ -\pi/5\ \pi/5\ 3\pi/5\pi]$ とした.

(6) 式の線形化システムのサンプリング時間は $T=0.1[s]$ として, 離散化を行った. コスト関数の定数ベクトルは

$$Q=\mathrm{diag}\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix},\ R=1$$

とした. 制御ホライズンは $N=5$ とし, 終端コストに関する P_f は, (7), (8) 式より

$$P_f=\begin{pmatrix}22.8&11.3\\11.3&20.9\end{pmatrix}>0$$

と導出した. 図 2, 3 は初期値 $x(0)=(3\pi/4,3\pi/4)'$ での制御結果である.

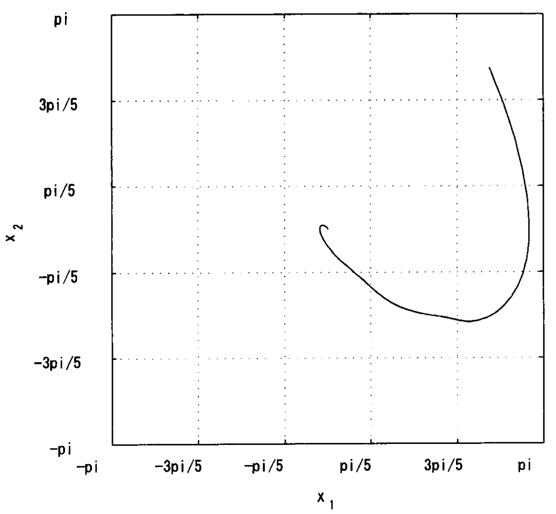

Fig. 2: 状態空間（領域分割数 5×5）における制御結果

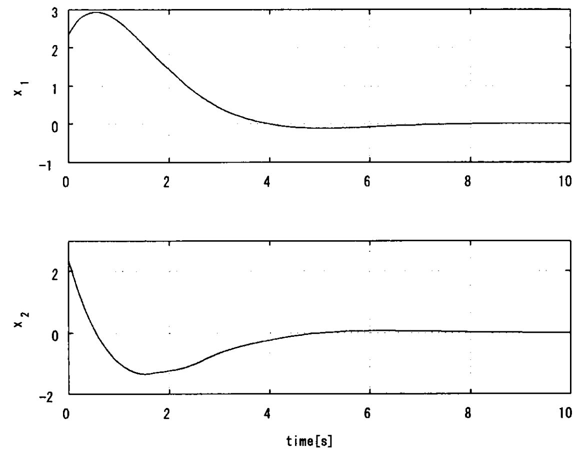

Fig. 3: 各状態変数ごとの制御結果

6 結言

本論文では, 区分的双線形システムによるモデル予測制御の設計アルゴリズムを提案した.

モデル予測制御はプロセス制御の中でも強力な設計ツールではあるが, 非線形制御対象のモデル化については, 通常困難であることが多い.

そこで本研究では, 非線形制御系を取り扱うモデルとして, 区分的双線形システムを用い, 厳密な線形化手法によるモデル予測制御手法の提案を行った. 最後にシミュレーション実験で非線形システムに適用し, 提案手法の有効性の検討を行った.

7 謝辞

本研究は科研費（23700276）の助成を受けたものである。

References

[1] M.V.Kothare, V.Balakrishnan and M.Morari, Robust Constrained Model Predictive Control Using Linear Matrix Inequalities, *Automatica*, 10:1361-1379, 1996.

[2] D.Q. Mayne, et al., Constrained Model Predictive Control: Stability and Optimality, *Automatica*, 36:789-814, 2000.

[3] M. Sugeno, On Stability of Fuzzy Systems Expressed by Fuzzy Rules with Singleton Consequents, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 7, no. 2, 1999.

[4] M. Sugeno and T. Taniguchi, On Improvement of Stability Conditions for Continuous Mamdani-like Fuzzy Systems, *IEEE Tran. Systems, Man, and Cybernetics*, Part B, vol.34, no.1, 2004.

[5] T. Taniguchi and M. Sugeno, Stabilization of Nonlinear Systems with Piecewise Bilinear Models derived from Fuzzy If-then Rules with Singletons, *FUZZ-IEEE 2010*, 2010.

[6] T. Taniguchi and M. Sugeno, Piecewise Bilinear System Control Based on Full-state Feedback Linearization, *SCIS&ISIS 2010*, 1591-1596, 2010.

[7] S. Boyd, L. E, Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, Linear Matrix inequalities in System and Control Theory, *SIAM*, 1994.

[8] Jean-Jacques E. Slotine and Weiping Li, Applied Nonlinear Control, Prentice Hall, 1991.