The Japan Society Applied Electromagnetics and Mechanics

日本AEM学会誌 Volume 1 Number 3 DECEMBER 1993

研究TOPICS

インダクションモータの電磁振動の解析

Electromagnetic Vibration Analysis of a Squirrel-Cage Induction Motor

小野寺 悟、山沢 清人 (信州大学)

The electromagnetic vibration of a three-phase squirrel-cage induction motor excited with a sinusoidal supply voltage are discussed quantitatively at no-load. A simple method to estimate the radial electromagnetic force caused by the air gap field harmonics and the vibration on the stator core due to the radial force is proposed. The vibration on the stator core is cauculated as a function of the supply voltage and the frequency. The calculated results are verified by experimens. The theory obtained here is useful for evaluating the vibration of a motor.

Key Words: Radial Electromagnetic Force, Electromagnetic Vibration, Quantitative Analysis, Field Harmonics, Induction Motor.

1. まえがき

誘導電動機ではギャップに蓄えられる磁気エネルギーを介して電気・機械エネルギー変換が行われ，ギャップ磁束密度が性能に重要な影響を与える。ギャップ磁束密度には，巻線の分布による高調波起磁力とスロット開口によるパーミアンス脈動のために，基本波成分以外に多くの高調波成分が含まれる。この高調波磁束密度の相互作用によって高調波トルク(1)-(8)や損失(4)および径方向電磁力が発生する。

この径方向電磁力はギャップ全円周に正弦波状に分布する分布力であり(5)，固定子または回転子鉄心に対して強制励振力として作用し，振動騒音の発生原因となる(6)-(8)。

最近，電動機の低騒音化要求が強まり，振動騒音に関する緻密な実験的検討(9)-(11)および低騒音化設計の指針を得るための理論的な検討(12)-(14)が多く報告されている。

ここでは，まず電磁振動騒音の原因となる分布力の概念と定量解析式を示し，分布力振幅と固定子鉄心の面内曲げ振動の定量的な計算手法を説明し，分布力発生の要因を明らかにする。そして，解析の一例として電源電圧および電源周波数による固定子鉄心振動の変位振幅の変化を，簡略式に基づいて計算して実測値との対応を明らかにする。

2. 径方向電磁力の定量解析式

分布力の一般定量解析式(12)，(13)は，仮想変位の原理に基づいてギャップの磁気エネルギー変化より求めることができるが(5)，ここでは一般式の概要を簡単に述べ，分布力の概念と無負荷運転状態について導出した簡略定量解析式(12)について詳しく説明する。

<2·1> 分布力の概念

誘導電動機の巻線は，幾つかのスロットの中に分けて納められているため，起磁力は階段状に分布し，基本波以外に高調波成分が含まれる。また，スロット開口部の磁気抵抗は，歯の部分に比べてはるかに高いため，ギャップのパーミアンスは一様ではなく脈動成分が含まれる。ギャップ磁束密度は起磁力分布とギャップパーミアンス分布の積として生じるため，ギャップ磁束密度には基本波以外に多くの高調波成分が含まれることになる。

このギャップ高調波磁束密度は種々の次数および回転速度を持っている。これらのギャップ磁束密度の相互作用により，接線方向電磁力および径方向電磁力が発生する。次数が等しくかつ回転速度の等しい2つの磁束密度の作用によって接線方向電磁力すなわちトルクが発生する。また，2つの磁束密度の次数が異なる場合には径方向電磁力が生じる。この磁束密度の次数の差をmとすると径方向の電磁力は，図1に示す様にギャップ全円周の1/mを一波長として正弦波状に分布

NII-Electronic Library Service

The Japan Society Applied Electromagnetics and Mechanics

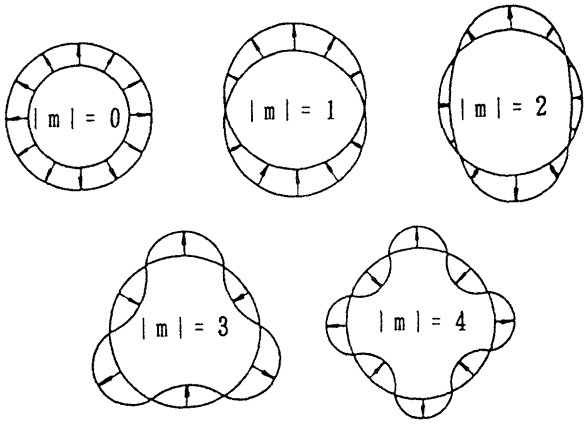

Fig. 1 Mode of the radial magnetic force.

する。また，この力はある角振動数で変動するため，回転子鉄心および固定子鉄心に対して強制励振力として作用し，軸振動および固定子鉄心からの音響放射の原因となる。以後，mを分布力の次数と呼ぶ。

分布力は，ギャップの磁気エネルギー変化から次のように計算できる。今，ギャップ円周方向の角度θなる点においてギャップ長δが$\partial\delta$だけ変化した時のθ点における磁気エネルギーW_θの変化を∂W_θとすると，角度θにおける径方向の力，すなわち分布力K_θは，次式で表される[5]。

$$K_\theta = -\frac{\partial W_\theta}{\partial \delta} = \frac{p\tau l_a}{2\pi\delta} B \cdot F \, d\theta \qquad (1)$$

ただし，FとB：ギャップの全起磁力と磁束密度，
p：極対数，τ：極ピッチ，l_a：鉄心の長さ.

(1)式から判るように，分布力はギャップの起磁力Fと磁束密度Bとの積に比例する。解析的に求めた[1] FとBを(1)式に代入することにより，分布力の一般解析式[5],[12]が得られる。ここでは，一般解析式の概要を整理して以下に示す。

一般に，極対数pと回転子スロット数Z_2との間に次式で示す[Ⅰ]あるいは[Ⅱ]のいずれかの関係が満足される場合，次数mの分布力が発生する。

[Ⅰ] $kZ_2 = 6gp + m$ (2-a)

[Ⅱ] $kZ_2 = (6g-2)p + m$ (2-b)

ただし，k，g：任意の整数値。

ギャップ円周方向の角度θ点における分布力K_θの一般式は次のように表される。

$$K_\theta = \sum_n \Big[\frac{3}{2} K_{1pn(pn+kZ2)} I_1^2 \cos\{m\theta - \omega_k t\}$$
$$\pm Z_2 K_{21pn} I_1 I_{2pn'} \sin\{m\theta - \omega_k t \mp \phi_{2pn'}\}$$
$$\pm \frac{Z_2}{2} \sum_{\alpha=\pm1}^{\pm\infty} K_{2pnp(n+\alpha 6q)} I_{2p(n+\alpha 6q)} I_{2pn'}$$
$$\times \cos\{m\theta - \omega_k t + \phi_{2p(n+\alpha 6q)} \mp \phi_{2pn'}\}\Big] \qquad (3)$$

ここで，n および n' は空間高調波（基本波も含む）次数であり任意の整数 h を用いて，次式のように表される。

$$n, n' = 1 + 6h \qquad (4)$$

n と n' の関係および分布力の角振動数ω_k（$=2\pi f_k$）は，(2-a)式と(2-b)式の二つの条件[Ⅰ]，[Ⅱ]によって異なり，次式で表される。

[Ⅰ]の関係を満足する場合：

$$pn' = pn + kZ_2 - m \qquad (5)$$
$$\omega_k = \{(1-s)kZ_2/p\}\omega$$

ただし，(3)式の複号は上の符号をとる。

[Ⅱ]の関係を満足する場合：

$$pn' = -(pn + kZ_2 - m) \qquad (6)$$
$$\omega_k = \{2 + (1-s)kZ_2/p\}\omega$$

ただし，(3)式の複号は下の符号をとる。

ここで，s はすべり，ω は電源角周波数である。

(3)式において，I_1 は電源角周波数ωの固定子電流の実効値である。また，一般に回転子には，n 次高調波磁束によって，その次数 n に応じて異なった角周波数 $S_n\omega$ の電流が誘導される。角周波数$S_n\omega$の回転子電流の実効値をI_{2pn}，位相角をϕ_{2pn} で表す。ただし，S_nは次式で示され，高調波磁束に対するすべりを意味する。

$$S_n = 1 - (1-s)n \qquad (7)$$

なお，(3)式右辺各項の係数 $K_{1pn(pn+kZ2)}$，K_{21pn} および $K_{2pnp(n+\alpha 6q)}$ は，設計諸元より決定される係数[12]である。また，q は固定子毎極毎相のスロット数である。

以上の解析式より，電動機の設計諸元に基づいて，分布力を定量的に扱うことができる。

<2·2> 無負荷運転状態における分布力の簡略式

無負荷運転状態では，分布力の一般式(3)式右辺第２項が支配的である[13]。そこで，この(3)式右辺第２項のみを考えることとし，さらに，次の二つを仮定する。

(1) ギャップパーミアンス脈動は，その平均値と固定子スロットピッチを１周期とする脈動成分のみを考える。この時，ギャップパーミアンスは次式となる。

NII-Electronic Library Service

The Japan Society Applied Electromagnetics and Mechanics

$$P_{00} + P_{01}\cos(6qp\theta) \qquad (8)$$

ここで，P_{00} はギャップパーミアンス脈動の平均値であり，真空の透磁率と等価ギャップ長の比に例する。また，P_{01} は固定子スロットピッチを1周期とするギャップパーミアンス脈動成分の振幅である。

(2) 鉄心の磁化特性は線形とする。この時，ギャップパーミアンス係数 P_{00} および P_{01} は一定値となる。

以上の仮定のもとで，分布力 K_θは次のように表される[12]。

$$K_{\theta n} = \Sigma \pm \frac{p\tau l_a}{2\pi\delta}\frac{3\sqrt{2}N_1}{2\pi}\sum_{\alpha=-1}^{+1} P_{0\alpha}\frac{k_{w(n+\alpha 6q)}}{p(n+\alpha 6q)} I_1 \times \frac{\sqrt{2}Z_2}{2\pi}\frac{1}{pn-m} I_{2pn'}\cos(m\theta-\omega_k t) \qquad (9)$$

ただし，無負荷定常運転状態では，$I_{2p1}=0$ であるため，$n'=1$ となる n は考慮しない。

(9)式は，表1に示すように，「固定子電流 I_1 による pn次 の磁束密度 と 回転子電流 $I_{2pn'}$ の作る $-(pn'+kZ_2)=(pn-m)$次 の起磁力との積で生じる m 次の分布力」を意味する。

Table 1. Flux density and magnetomotive force causing the radial force.

	Eq. (9)	physical meaning
B	$\frac{3\sqrt{2}N_1}{2\pi}\sum_{\alpha=-1}^{+1}P_{0\alpha}\frac{k_{w(n+\alpha 6q)}}{p(n+\alpha 6q)} I_1$	pn-th flux density due to the stator current I_1
F	$\frac{\sqrt{2}Z_2}{2\pi}\frac{1}{pn-m} I_{2pn'}$	(pn-m)-th MMF due to the rotor current $I_{2pn'}$ $(pn-m)=-(pn'+kZ_2)$

無負荷運転状態における固定子電流 I_1 と回転子高調波電流 $I_{2pn'}$ の簡略計算式[12]は，それぞれ次式で表される。

$$I_1 = E_1/(R_1^2+X_{1t}^2)^{1/2} \qquad (10)$$

$$I_{2pn'} \fallingdotseq (X_{21pn'}/X_{2tpn'})I_1 \qquad (11)$$

ここで，E_1は固定子巻線に印加される相電圧，R_1とX_{1t}は固定子巻線の抵抗と自己リアクタンス，$X_{2tpn'}$は$I_{2pn'}$回路(pn'次回路)の自己リアクタンス，$X_{21pn'}$は固定子電流回路からpn'次回路への相互リアクタンスであり，各リアクタンスは，それぞれ以下の式で表される。

$$X_{1t} = \omega\frac{3N_1^2 p\tau l_a}{2\pi^2} P_{00}\left(\frac{k_{w1}}{p}\right)^2 \qquad (12)$$

$$X_{21pn'} = \frac{3N_1 p\tau l_a}{\omega 2\pi^2}\sum_{\alpha=-1}^{+1} P_{0\alpha}\frac{k_{w(n'+\alpha 6q)}}{p(n'+\alpha 6q)}\frac{1}{pn'} \qquad (13)$$

$$X_{2tpn'} = \omega\frac{Z_2 p\tau l_a}{2\pi^2} P_{00}\left\{\frac{\pi/Z_2}{\sin(pn'\pi/Z_2)}\right\}^2 \qquad (14)$$

ただし，N_1：固定子毎相の直列導体数，
q：固定子毎極毎相のスロット数，
k_{wn}：n 次調波に対する巻線係数。

以上の諸式から判るように，線形磁化特性を仮定したとき，固定子電流I_1は固定子相電圧E_1に比例し，回転子高調波電流$I_{2pn'}$は，I_1に比例する。従って，(9)式で表される分布力の振幅は，固定子相電圧（電源電圧）の二乗に比例する。

また，(11)式右辺の $X_{21pn'}\cdot I_1$ なる起電力はI_1 による pn'次 の磁束密度によって回転子に誘起される起電力を意味する。そして，(13)式から判るように，リアクタンス $X_{21pn'}$ がギャップパーミアンス脈動の影響を受けることが定量解析において重要な点である。

なお，ギャップパーミアンス係数 P_{00} および P_{01} は，有限要素法などの磁界解析を活用して定量的に算定できる[2]。

さて，分布力の解析式(9)式は，n に関する総和の形で表されているが，実用計算上どのような n を考慮すれば十分であるかを次に考察する。高調波次数のうちで，$n_s = 1\pm 6q$ (q:固定子毎極毎相のスロット数)で示される次数が第1次スロット高調波であり，一般にこの次数の高調波の巻線係数は基本波と同じ値をとるので，短節巻によるスロット高調波起磁力の低減が期待できない。さらに，この次数の磁束密度成分は，基本波起磁力のみの存在を仮定してもギャップパーミアンスの脈動によって生じる。このような点でスロット高調波は他の次数と性質が大きく異なる。ある極対数 p に対して(2-a)式あるいは(2-b)式を満足するZ_2，k および g の組み合わせは複数存在する。その中でも，$g=\pm q$ で(2-a)式あるいは(2-b)式が成立する場合には，n=1 の時 $n'=n_s$ となり，この分布力成分が支配的となる[13]。従って，$g=\pm q$ の場合には n=1 のみ考慮すれば良い。一方，$g\neq\pm q$ の値に対して(2-a)式あるいは(2-b)式が満足される場合には，特定の成分が支配的となることはないので，複数の n を考慮する必要があるが，この場合には，比較的有力な低次の高調波成分と $n'=n_s$ となる n を考慮すれば実用上十分である[13]。

NII-Electronic Library Service

The Japan Society Applied Electromagnetics and Mechanics

3．分布力による電磁振動の解析式

上述の分布力は鉄心に対して強制振動を与えるが，鉄心に生じる振動の性質は分布力の次数mによって異なる。一般に，定常運転時の電磁騒音の原因となるのは，$|m| \geqq 2$ の場合であり，$|m| \geqq 2$ の分布力によって励振される固定子鉄心は $|m|$ 次の面内曲げ振動を生じる[5]。一方，$|m| = 1$ の分布力はギャップ全円周を一波長とするように分布するため，回転子の曲げ振動の原因となる。また，$|m| = 0$ の場合はギャップ円周上の空間的位置に無関係に一様な大きさの分布力が発生する[5]が，この場合には高調波同期トルクの発生条件とも一致する[3]。従って，$|m| = 1$ および $|m| = 0$ の場合は主に始動時の軸振動が問題となる。ここでは定常運転時の電磁騒音の原因となる $|m| \geqq 2$ の分布力による固定子鉄心の振動について考える。

今，(9)式の分布力の振幅を$K_{\theta max}$とすると，この分布力によって励振される固定子鉄心の定常的な面内曲げ振動の変位振幅dは，(15)式で表される。ただし，鉄心形状は円環と仮定する。

$$d = R_{dy} \cdot K_{\theta max} \qquad (15)$$

ここで，R_{dy}は動的レセプタンス(1/動剛性)であり次のように表される[12]。

$$R_{dy} = \frac{a}{(h_c/r_c)^3 \, E \, l_a \, (1-m^2)^2/12} \qquad (16)$$

$$a = [\{1-(\omega_k/\omega_M)^2\}^2+(2\zeta\,\omega_k/\omega_M)^2]^{-1/2} \qquad (17)$$

ただし，a：動的変位振幅倍率，ω_M：固定子鉄心の固有角振動数（$=2\pi f_M$），ζ：固定子鉄心の振動減衰比，E：鉄心材料のヤング率，h_c：継鉄部分の高さ，r_c：継鉄部分の中心までの半径，l_a：鉄心の長さ。

4．固定子鉄心振動の理論解析値と実測値の比較

<4·1> 供試機の主要諸元と発生分布力

供試機の主要諸元を表2に示す。表3には，この電動機で理論的に推定される発生分布力の次数mと振動数f_kを示す。ただし，運転条件は無負荷定常状態である。供試機では，分布力の発生条件(2-b)式を k=-1, g=-4, m=-2 および k=+1, g=+5, m=-2 で満足するため，(6)式より分布力の振動数として，f_k=-25f（f:電源周波数）および f_k=29f の二つの振動数が得られる。従って，固定子鉄心には，振動数が 25fと29f の楕円変形モード($|m| = 2$)の面内曲げ振動が生じるものと推定される。

Table 2. Data of the motor used in the analysis

Rating : 3.7kW-204V-60Hz-4Pole
p=2, Z_2=54, q=4, N_1=104, Y-connection δ= 0.55[mm], l_a = 150[mm], τ = 110[mm] $P_{00}=16.6\times10^{-4}$[H/m²], $P_{01}=1.85\times10^{-4}$[H/m²] h_c/r_c =20.5/92.25[mm], unskewed rotor slot
Measured eigen values of the stator assembly: f_M=1412[Hz] ζ=2.8[%], 1782[Hz] ζ=7.0[%]

Table 3. m and f_k of the radial force K_θ

mode m	frequency f_k [Hz]	Eq.(2-b) $kZ_2=(6g-2)p+m$
-2	-25f	k=-1, g=-4(g = ±q)
-2	29f	k= 1, g= 5(g ≠ ±q)

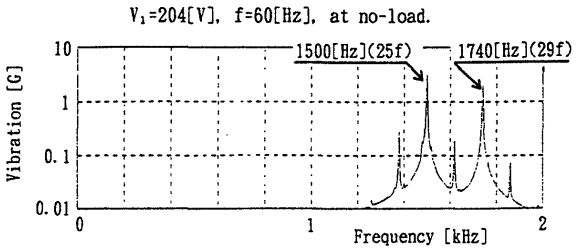

Fig.2 Measured frequency spectrum of the vibration on the stator core.

図2には，固定子鉄心表面における振動加速度の実測スペクトラムを示す。ただし，供試機の運転条件は，電源電圧V_1=204 V，周波数f=60 Hzの無負荷定常状態である。これより，固定子鉄心表面において発生している振動の有力成分は1500Hz(25f)および1740Hz(29f)であり，表3に示す理論的に推定された値と一致していることが判る。

次に，上記固定子鉄心振動の変位振幅を検討する。(15)式から判るように，振動変位振幅dは分布力振幅$K_{\theta max}$と動的レセプタンスR_{dy}との積で与えられる。

まず，分布力振幅について考える。(9)式より分布力を計算する時に考慮すべき高調波次数 nとn'の組合せを表4に示す。すなわち，表3に示したように，分布力の25f成分は(2-b)式を g =±q で満足し，29f成分は g≠±q で満足する。従って，<2·2>節の考察より，25f成分については n=1 のみを考え，29f成分については，低次の高調波次数として有力な n=-5 とス

NII-Electronic Library Service

The Japan Society Applied Electromagnetics and Mechanics

ロット高調波次数である n=-23 の二つの次数を考えるものとする。

Table 4. Harmonic orders related to components of K_θ

component	n	n'	n±6q
25f	1	25	25, -23
29f	-5	-23	19, -29
	-23	-5	1, -47

次に，動的レセプタンスR_{dy} を考える。動的振動応答の定量的な考察に際しては，(16)式と(17)式から判るように，振動系の固有振動数f_Mと振動減衰比ζが重要である。固有振動数は供試機の設計諸元から解析的に推定できるが[15]，振動減衰比ζを設計諸元から求めることは，現状では困難である。また，ここでは振動変位振幅に影響する分布力振幅の理論計算を検証することが主題であるため，R_{dy}の計算には，供試機の固定子鉄心のインパルス加振に対する振動伝達関数を実測することによって得られたf_Mとζの値を用いることにする。図３には表２に示す諸元を用いて計算した固定子鉄心のR_{dy}を示す。f=60Hzの無負荷定常状態では，25fおよび29fの振動成分に対して，R_{dy} はそれぞれ X および Y で示した値をとる。

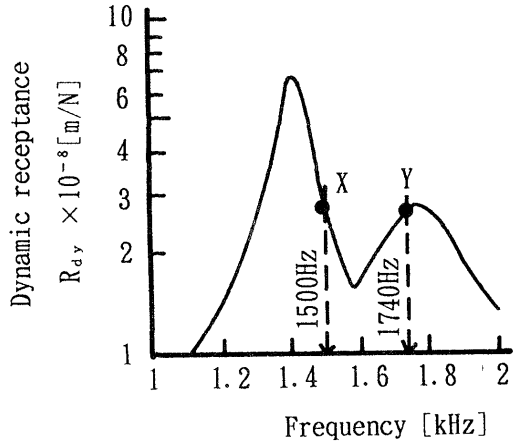

Fig. 3 Calculated value of R_{dy} of the stator assembly.

<4·2> 電源電圧および電源周波数による固定子鉄心振動の変化

まず，電源電圧V_1(線間電圧=$\sqrt{3}E_1$)による振動変位振幅dの変化を定量的に検討する。

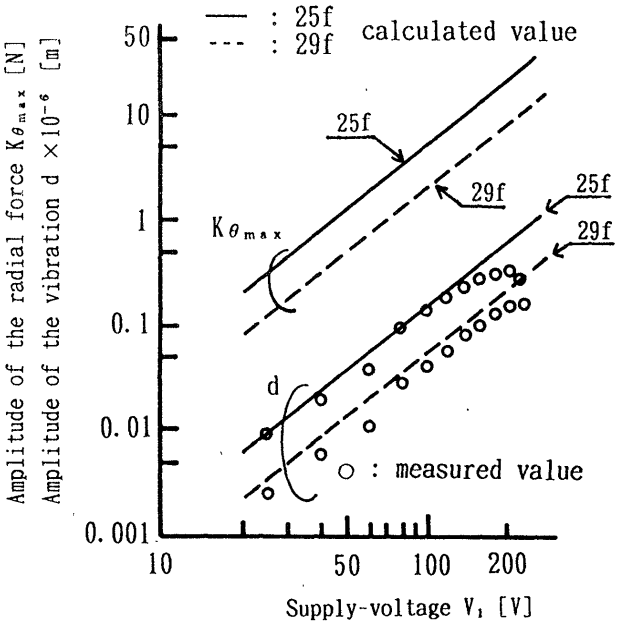

Fig. 4 The supply voltage dependence of the vibration amplitude.

図４には供試機における分布力振幅$K_{\theta max}$ の計算値および固定子鉄心表面での振動変位振幅dの計算値を実測値と比較して示す。ただし，電源周波数f=60Hz一定の無負荷定常状態である。〈2•2〉節で説明したように$K_{\theta max}$ の理論計算値はV_1^2に比例する。また，(15)式に示すように振動変位振幅dの理論計算値は，$K_{\theta max}$に比例するため，dも V_1^2 に比例している。この振動変位振幅dの計算値は，V_1<150Vの範囲において実測値と良く一致しているが，V_1≧150Vの範囲では計算値と実測値に差が生じ，25f成分で顕著である。

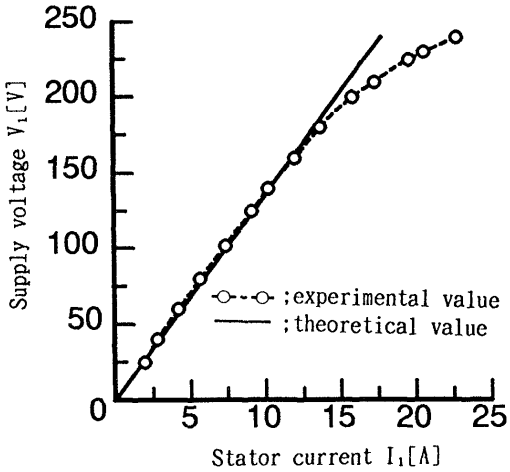

Fig. 5 The supply voltage vs. stator current characteristic for b_{s1}=2.7 mm.

NII-Electronic Library Service

The Japan Society Applied Electromagnetics and Mechanics

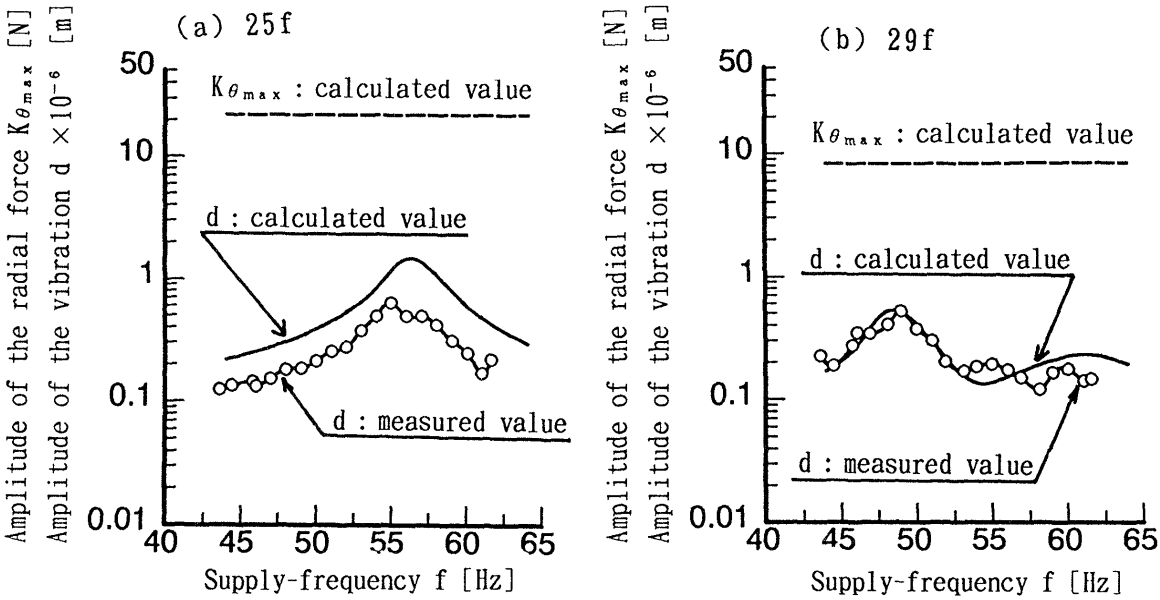

Fig. 6 The relations between the vibration and the supply voltage, (a)25f-component and (b)29f-component.

図5には供試機の電源電圧と固定子電流の関係を示す。これより，V_1=170Vの定格電圧以下では磁化特性は線形と考えて良いが、定格電圧以上では飽和傾向があることが判る。

次に，電源周波数fによる振動変位振幅dの変化を定量的に検討する。供試機の分布力振幅$K_{\theta max}$の計算値と固定子鉄心表面での振動変位振幅dの計算値および実測値を図6(a),(b)に示す。 ただし,運転条件は V_1/f(=204V/60Hz)一定の無負荷定常状態である。V_1/fが一定であるため，f の変化に対して$K_{\theta max}$ はほぼ一定となる。従って，振動変位振幅dの f に対する図示のような変化は(16)式で表される動的レセプタンスR_{dy} すなわち，振動系の動的応答特性に依存している。また，計算値と実測値は比較的良く一致しいるが，25f成分については計算値が実測値に対して2倍程度大きく算定されている。

この25f成分の計算誤差および図4に示す振動変位振幅の飽和現象の原因は図5に示すような電磁気的特性の非線形性およびここでは考慮していない機械的特性の非線形性にあると考えられる。すなわち，磁化特性の飽和に伴ない分布力振幅の減少が生じ、励振力の増加に伴ない振動系の動剛性の変化が生じていると考えることができる。

5. むすび

かご形誘導電動機の電磁振動騒音の原因となる径方向電磁力(分布力)による固定子鉄心の振動変位振幅を無負荷運転状態について定量的に理論解析する手法を述べた。

最後に，実験機について御協力頂いた山洋電気(株)第1事業部の関係各位に謝意を表する次第である。

文　献

(1) 尾本・石崎:「かご形誘導電動機の非同期トルクについて」,電気工学論文集 4,3,127 (1952-5)
(2) 石崎・小野寺・斉藤・三村:「かご形誘導電動機の高調波非同期トルクに影響する要因の定量的検討」,電学論B,106,511(1986-6)
(3) 小野寺・石崎・斉藤:「かご形誘導電動機における高調波同期トルクに対する固定子スロット開口幅の影響」,電学論B,106,777(1986-9)
(4) A. Ishizaki, S. Onodera and K. Saito:"Quantitative Study on Faotors Affecting Harmonic Torques and Losses in Squirrel-Cage Induction Motor", International Cnference on Evolution and Modern Aspects of Induction Machines-Proceeding, July,1986, pp.355-362.
(5) 石崎:「かご形誘導電動機の振動および騒音について」, 電学誌, 75,5,451(1955-5)
(6) L. E. Hildebrand:"Quiet Induction Motors", AIEE Trans.,48,848(1930)

NII-Electronic Library Service

The Japan Society Applied Electromagnetics and Mechanics

(7) H. Jordan:"Angenaherte berechnung des magnetischen gerausches von kafiglaufermotoren", ETZ, 71, 491(1950)
(8) P. L. Alger:"The Magnetic Noise of Polyphase Induction Motors", AIEE Trans., 73, 118(1954)
(9) F. Kako, T. Tsuruta and H. Kohmo:"EXPERIMENTAL STUDY ON MAGNETIC NOISE OF LARGE INDUCTION MOTORS", IEEE Transaction, Vol. PAS-102, No. 8, August, 1983, pp. 2805-2810.
(10) 広塚・坪井:「かご形誘導電動機のスロット数組合わせによる電磁振動の実験的考察」, 電学論D, 109, 347(1989-5)
(11) 石橋・野田・森:「小形誘導電動機の電磁振動について」, 電学論D, 112, 307(1992-3)
(12) 小野寺・山沢:「誘導電動機の電磁振動に関する理論的考察」, 電気学会回転機研資, RM-92-97, (1992-10)
(13) 小野寺・山沢:「誘導電動機の電磁振動に関する検討」, 電学論D, 112, 1117(1992-11)
(14) 小野寺・山沢:「誘導電動機の電磁振動に対するスロット数組合せの影響」, 平5電気学会全大, No. 806
(15) 小野寺・山沢:「誘導電動機の電磁振動に関する定量的検討」, 電気学会回転機研資, RM-91-123, (1991-11)

NII-Electronic Library Service