

書評

Perturbation Methods, Bifurcation Theory
and Computer Algebra

by Richard H. Rand and Dieter

薮野 浩司 (筑波大学、物理工学系)

本書では非線形常微分方程式あるいは偏微分方程式に対する解析的近似解法が説明され、非線形振動現象(自励振動など)や座屈現象(オイラー座屈など)を支配する方程式に対する解析例が示されている。さらにコンピュータへのインプリメントが容易に行なえるように、個々の解析法に対する、数式処理によるプログラムが載っている。以下本書の内容および意図をわかりやすく紹介するため、1. 解析的近似解法を用いた非線形力学系の解析、および2. 解析的近似解法に対する Computer Algebra(数式処理または計算機代数)の援用について概観し、3. 中心多様体理論について解説を加える。

1. 解析的近似解法を用いた非線形力学系の解析について

近年、磁気力を受ける物体に生じる分岐現象やカオス現象などが多数報告されている(例えば、F. C. Moon, CHAOTIC VIBRATIONS, (1987), Wiley). このような複雑な現象を生じる非線形力学系の解析には、数値解法(たとえば Runge-Kutta 法)よりも解析的近似解法(たとえば摂動法や幾何学的解析手法)を用いる方が、振動現象の励振機構などの定性的な側面を知る上で有利なことはいうまでもない。

たとえば以下のような非線形常微分方程式を考える ($|\epsilon| \ll 1$)

$$\frac{dx}{dt} + x + \epsilon x^3 = a \cos \nu t \quad (1)$$

上式は以下のように x を ϵ のべき級数で仮定し(実際には t についても適当な展開を行なう必要がある)摂動法によって解くことが可能である。

$$x = \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \epsilon^3 x_3 + \cdots \quad (2)$$

もちろん、Runge-Kutta 法による直接数値計算によって解くことも可能である。しかしながら、数値計算では

当然のことながら結果を数値でしか得られないのに対し、摂動法ではパラメータの関数として解を求めることができる。従って、解析しようとしている振動現象に対して、力学系を構成するパラメータ(ここでは ϵ, a, ν)のうちのどのパラメータが支配的かを明らかにできるという点で、摂動法は数値解法にくらべ有利である。

本書では非線形力学系をできるだけ定性的に解析しようという立場から摂動法や幾何学的解析手法が取り上げられている。摂動法に関しては、Lindstedt method, Averaging method(平均化法), Two variable expansion method(二変数展開法)が非常に簡潔に紹介されている。しかしながら近年の非線形振動解析に関する研究で頻繁に使われている Method of multiple scales(多重尺度法)が取り上げられていないのは残念である。

一方、幾何学的解析手法としては Normal form(標準形), Center manifold(中心多様体), Liapunov-Schmidt reduction の解説がなされている。これらの幾何学的手法は摂動法とはことなりここ10年来盛んに力学系解析に応用されるようになった手法で、とくに分岐点近傍での力学系の定性的な把握に威力を発揮する。中心多様体理論についてはあとで簡単に説明する。

2. 解析的近似解法に対する Computer Algebra(数式処理または計算機代数)の援用について

カオスや分岐現象などを生じる複雑な非線形力学系を解析的近似解法によって解析する場合、高次近似解析を行なう必要に迫られる(たとえば式(2)において x_1 のみならず $x_2, x_3, \dots$ を求める必要が生じる)。この際、膨大な計算量が必要となるためコンピュータの援用が必要不可欠である。しかしながら、Runge-Kutta 法や有限要素法などに代表される数値解析法とは異なり、解析的近似解法はその演算が

基本的に非数値的すなわち記号的 ($1 + 1 = 2$ というような計算ではなく $a + a = 2a$ というような計算) であるため, FORTRAN などの数値処理言語を用いることはできない. そこで本書では上述した各種の解析的近似解法に対して数式処理言語によるプログラミング法が紹介されている. これによって, 人間が紙と鉛筆を使って行なってきた膨大な手計算が不要になる. プログラム例は数式処理言語 MACSYMA で書かれているが, 同言語はすでに開発が中止されているため, 実際に解析的近似解法をコンピュータにインプリメントする際には, 本書の内容を参考にして Mathematica や Maple を用いてプログラミングし直すのが現実的であろう.

ところで, 表題中の Computer algebra には数式処理と計算機代数の二通りの日本語訳がある. 数式処理は前述した記号演算 ($a + a = 2a$) を計算機に代行させることを意味する. これに対し計算機代数は代数演算の計算機上での効率的算法を指す (具体的にはグレブナ基底, ヘンゼル構成, 記号的ニュートン法, 近似代数など: これらについては, 佐々木ほか, 計算代数と計算幾何 (岩波講座応用数学) 参照). 本書は非線形力学系解析に対する数式処理の援用法のみが述べられており, 計算機代数の援用法については言及していない. これについては, グレブナ基底や記号的ニュートン法の分岐方程式解析に対する有効性が Journal of symbolic computation などでも報告されているものの, 今だ研究段階であり今後の発展が期待されている.

3. 中心多様体理論について

最後に, 本書で述べられている幾何学的解析手法のうち中心多様体理論について, 以下に示すような簡単な力学系 (J. Guckenheimer and P. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, (1990), 133, Springer) を用いて説明する.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} xy \\ \alpha x^2 \end{pmatrix} \\ &\equiv A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + N(x, y) \end{aligned} \quad (3)$$

非線形項 $N(x, y)$ を無視した場合式 (3) は, 以下のよう方程式になる.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (4)$$

この時行列 A の固有値は $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$ であり, これらに対する固有ベクトルは $p_1 = [1 \ 0]^t$ および $p_2 = [0 \ 1]^t$ である. 従って解は二つの任意定数 C_1, C_2 とを用いて以下のように表せる.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{0 \times t} + \begin{pmatrix} 0 \\ C_2 \end{pmatrix} e^{-t} \quad (5)$$

以上の結果から次のようなことがわかる.

(1) $x = y = 0$ は不動点である. (式 (4) において $dx/dt = dy/dt = 0$ のとき $x = y = 0$ であるから)

(2) y 軸上に初期状態がある (すなわち $t = 0$ で, $x = 0, y = y_0, y_0$ は任意定数) 場合, 解は y 軸上を移動し時間とともに不動点 $x = y = 0$ に近づく (なぜなら, このような初期条件が与えられた場合式 (5) において $C_1 = 0, C_2 = y_0$ となるから). この時, y 軸は不動点 $x = y = 0$ の安定部分空間 (Fig.1 の E_s) と呼ばれる.

(3) x 軸上に初期状態がある (すなわち $t = 0$ で, $x = x_0, y = 0, x_0$ は任意定数) 場合, 解は x 軸上で動かない (なぜなら, このような初期条件が与えられた場合式 (5) において $C_1 = x_0, C_2 = 0$ となるから). この時, x 軸は不動点 $x = y = 0$ の中心部分空間 (Fig.1 の E_c) と呼ばれる.

以上 (1), (2), (3) より, 不動点 $x = y = 0$ 近傍の解挙動は y 方向には安定 (時間とともに y は 0 に近づく) であるが, x 方向に関しては安定判別不可能 (時間が経過しても x は 0 に近付きも離れもしない) なることがわかる.

では x 方向の安定性はどのように決定されるかというと, 非線形項 N によって決定される. 具体的には中心多様体というものを求めることによって, x 方向の安定性を調べることが可能である. 以下具体的に中心多様体の構成法を述べる. 非線形項を考慮に入れた場合中心部分空間は当然のことながら何らかの変形を受けることが予想される. しかしながら非線形項はもともと微小量であるから, $x = y = 0$ において中心部分空間 E_c (Fig.1 参照) すなわち x 軸に接するように変形されることが知られている (J. Carr, Application of center manifold theory, (1981), Springer 参照). (変形された中心部分空間を中心多様体と呼ぶ) 従って中心多様体 W_c は以下のように仮定できる.

$$y = h(x) \quad (6)$$

ただし中心多様体は中心部分空間に $x = y = 0$ で接するとしたので $h(0) = 0, dh(0)/dx = 0$ であ

る。では、式(3)の中心多様体を求めてみよう。中心多様体 $y = h(x)$ は条件 $h(0) = 0$, $dh(0)/dx = 0$ より以下のように未知数 $p, q, \dots$ を用いて x^2 以下のべき級数として仮定できる。

$$y = h(x) = px^2 + qx^3 + \dots \quad (7)$$

$p, q, \dots$ が求まれば中心多様体が決定されたことになる。ところで $dh/dt = dy/dt$ は以下のように書き表せる。

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = (2px + 3qx^2)xy \\ &= (2px + 3qx^2)x(px^2 + qx^3) \end{aligned} \quad (8)$$

ここで二つ目の等号の右辺は、式(7)から dy/dx を求め、式(3)によって dx/dt を表すことによって得られる。一方、 dy/dt は式(3)によって以下のようにも書き表すことができる。

$$\frac{dy}{dt} = -y + \alpha x^2 = -(px^2 + qx^3) + \alpha x^2 \quad (9)$$

式(8)と式(9)は等しくなければならないので、

$$(2px + 3qx^2)x(px^2 + qx^3) - (px^2 + qx^3) + \alpha x^2 = 0 \quad (10)$$

上式で x^2 の係数を0とおくと、 $p = \alpha$ のように α が求まる。従って、中心多様体は以下のように求まった。

$$y = h = \alpha x^2 \quad (11)$$

上式を式(3)の dx/dt に関する式の y に代入すれば、

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x^3 \quad (12)$$

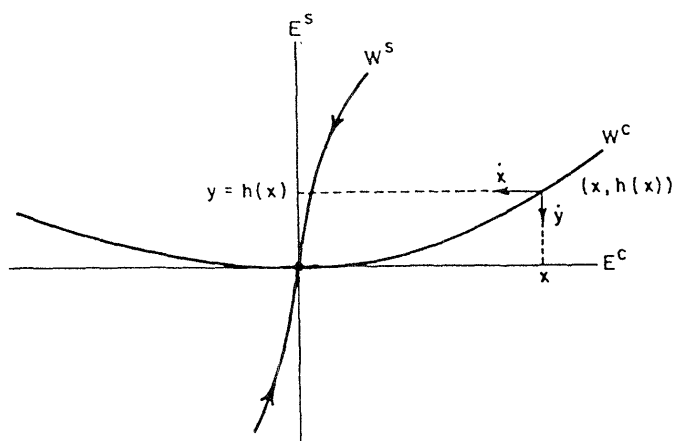


Fig.1 Center manifold W_c and center subspace E_c

が得られ、この結果 x 方向の安定判別が可能になり、 $\alpha < 0$ とすれば x 方向に不動点 $x = y = 0$ は安定であることがわかる (Fig.2 参照)。また詳しい説明は省略するが、任意に初期条件を与えた場合解挙動は急速に中心多様体上に落ち込むことが知られており、この結果解は中心多様体上を時間とともに変化すると考えて差し支えない。以上、中心多様体を構成して力学系を解析することの利点をまとめると、次のようになる。

(1) 非線形項を考慮して中心多様体を構成すれば、線形理論では安定性の判別が不可能な不動点に対して安定判別が行なえる

(2) 力学系の解挙動は中心多様体上に拘束されるので力学系の次元を下げるができる (上記の例では2次元から1次元に次元が落ちた)

4. おわりに

以上、Perturbation Methods, Bifurcation Theory and Computer Algebra の書評ならびに本書の内容に関連した事項の解説を行なった。実際の力学系理論は本書で扱われている内容以上に非常に多岐にわたりかつ数学的である (たとえば分岐理論に限ってみても構造安定性、位相共役性、開折、余次元、不完全性など)。これらに関しては集合位相論、関数解析等の理解を前提とした数学書を参考にする必要がある。なお、Fig.1 および Fig.2 は前記 Guckenheimer らの文献から引用した。

Richard H. Rand and Dieter Armbruster, Perturbation Method, Bifurcation Theory and Computer Algebra (1987), Springer Verlag.

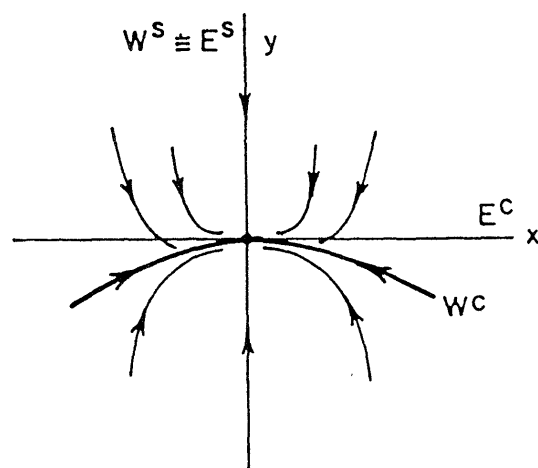


Fig.2 Center manifold and qualitative behavior